ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 519.632/633

Г.И. ШИШКИН

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ КОРРЕКЦИЕЙ НЕВЯЗКИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНВЕКТИВНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Моделирование процессов тепло- и массообмена в случае их малой продолжительности и/или малости коэффициентов температуропроводности-диффузии приводит к краевым задачам для сингулярно возмущенных параболических и эллиптических уравнений — уравнений с малым параметром ε при старших производных. Для таких задач хорошо известны трудности, возникающие при их численном решении стандартными методами, развитыми для регулярных краевых задач [1], [2]. Известна также проблема, связанная с разработкой специальных численных методов, ошибки которых не зависят от возмущающего параметра ε, т. е. ε-равномерно сходящихся методов [3]–[5]. Для достаточно представительных классов сингулярно возмущенных краевых задач в [6]–[9] разработаны и изучены различные методы построения ε-равномерно сходящихся разностных схем. Эти методы используют подходы на основе адаптирующих сеток, сгущающихся в окрестности пограничных и переходных слоев (описание методов см., напр., в [3]; [6]; [7], с. 123; [8], с. 30; [9], с. 82) и/или метода подгонки (его описание см. в [4], [5]). Заметим, что порядок точности приближенных решений в случае уравнений конвекции-диффузии не выше первого по пространственным и временной переменным. Особый интерес представляют ε-равномерно сходящиеся разностные схемы высокого порядка точности, т. к. позволяют повысить эффективность вычислительных алгоритмов.

В случае регулярных краевых задач эффект повышения точности может быть получен за счет уменьшения невязки разностных схем на решениях краевых задач. Коррекция невязки достигается с использованием устойчивых схем невысокого порядка точности [10], что приводит к повышению точности алгоритма с сохранением его устойчивости. Для применения такого метода требуется достаточно хорошее поведение производных решения краевой задачи; порядок требуемых “хороших” производных растет с ростом точности сеточного решения.

Непосредственное использование методов коррекции невязки (и их обоснование) для сингулярно возмущенных задач вызывает трудности, связанные с достаточно сложным поведением решений и, в частности, с неограниченным ростом производных при $\varepsilon \to 0$. Заметим, что в случае нестационарных задач частные производные по временной переменной сохраняют особенности самого решения, тогда как дифференцирование по пространственным переменным повышает сингулярность. Такое поведение производных по времени позволило достаточно естественно развить технику дефект-коррекции для сингулярно возмущенных задач с целью повышения точности по временной переменной [11]. Для повышения точности по пространственным переменным уже требуется специальная коррекция, учитывающая различное поведение производных по пространству в окрестности пограничного слоя и вне его. В работе [12] для уравнений реакции-диффузии построены схемы высокого порядка точности по пространственным переменным. Заметим, что построение таких же схем в случае уравнений с конвективными членами

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00362).

существенно усложняется, т. к. невязка уже не является ε-равномерно ограниченной. Таким образом, требуется дальнейшее развитие техники, разработанной в [12].

В данной работе рассматриваются сеточные аппроксимации задачи Дирихле для сингулярно возмущенных параболического уравнения на отрезке и эллиптического уравнения на полосе в том случае, когда дифференциальные уравнения содержат конвективные члены. Для краевых задач приводится алгоритм построения ε-равномерно сходящихся схем высокого порядка точности по пространственным переменным. В алгоритме используется коррекция невязки на последовательно решаемых сеточных задачах. Разностные схемы строятся на сетках, сгущающихся в окрестности пограничных слоев. Выписаны сеточные операторы для специальных разностных схем, решения которых сходятся ε-равномерно со скоростью $O(N^{-3}\ln^4 N + N_0^{-1})$ и $O(N^{-3}\ln^4 N)$ в случае параболических и эллиптических уравнений соответственно, где N и N_0 определяют число узлов сетки по пространству и времени.

В отличие от известных работ (см., напр., [13]) в данной работе техника дефект-коррекции рассматривается в случае равномерной нормы $\|\cdot\|_{L_\infty}$ (в [13] исследовалась сходимость в L_2-норме, которая, вообще говоря, не является адекватной для задач с пограничными слоями). Схемы высокого (до третьего) порядка точности для сингулярно возмущенных уравнений конвекции-диффузии ранее не рассматривались.

1. Постановка задачи для параболических уравнений

В области $G = D \times (0,T]$, $D = \{x:\ 0 < x < d\}$ с границей $S = \overline{G} \setminus G$ рассмотрим задачу Дирихле для параболического уравнения[1]

$$L_{(1.1)}u(x,t) \equiv \left\{\varepsilon a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - c(x,t) - p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\right\}u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G, \tag{1.1а}$$

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S. \tag{1.1б}$$

Здесь $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$ и $\varphi(x,t)$, $(x,t) \in S$, — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условию

$$0 < a_0 \le a(x,t) \le a^0, \quad p(x,t) \ge p_0 > 0, \quad b(x,t) \ge b_0 > 0, \quad c(x,t) \ge 0, \quad (x,t) \in \overline{G},$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0,1]$.

При стремлении параметра к нулю в окрестности множества $S^{L-} = \Gamma^- \times (0,T]$, где $\Gamma^- = \{x : x = 0\}$, появляется регулярный пограничный слой, описываемый обыкновенным дифференциальным уравнением. Полагаем $S = S_0 \cup S^L$, где $S_0 = \overline{D} \times \{t = 0\}$ и $S^L = \{x : x = 0,\ d\} \times (0,T]$ суть нижнее основание и боковая граница множества $\overline{G}$, $S^L = S^{L-} \cup S^{L+}$.

Для задачи (1.1) в ([7], с. 165) с использованием кусочно-равномерных сеток, сгущающихся в окрестности пограничного слоя, построена разностная схема, решение которой сходится ε-равномерно со скоростью $O(N^{-1}\ln^2 N + N_0^{-1})$. Взяв эту схему в качестве базовой, построим разностную схему, порядок скорости сходимости которой по пространственной переменной выше второго. При построении схемы используем метод коррекции невязки (описание метода для регулярных задач см., напр., в [10] и библиографию там же).

2. Вспомогательные построения

Приведем априорные оценки решения краевой задачи, а также специальную разностную схему. На основе этой схемы построим разностную схему повышенного порядка точности по пространственной переменной. Априорные оценки используем при построении схем и обосновании сходимости. Техника вывода оценок подобна приведенной в [7], [14].

---

[1]Запись $L_{(j.k)}$ ($f_{(j.k)}(x,t)$, $M_{(j.k)}$) означает, что этот оператор (функция, постоянная) введен в формуле $(j.k)$. Через M, M_1 (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные, не зависящие от ε и от параметров разностных схем.

2.1. *Априорные оценки решения и производных.* Выпишем оценки решения задачи (1.1). Предполагаем, что на множестве $S^* = \overline{S}^L \cap S_0$ выполнены условия согласования, обеспечивающие достаточную гладкость решения при фиксированных значениях параметра.

Решение задачи представим в виде суммы функций

$$u(x,t) = U(x,t) + W(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}, \tag{2.1}$$

где $U(x,t)$, $W(x,t)$ — регулярная и сингулярная части решения. Функция $U(x,t)$ — сужение на $\overline{G}$ функции $U^0(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}^0$. Здесь $\overline{G}^0$ — расширение множества $\overline{G}$ за границу S^{L-}; функция $U^0(x,t)$ — решение задачи

$$L^0_{(1.1)} U^0(x,t) = f^0(x,t), \quad (x,t) \in G^0, \quad U^0(x,t) = \varphi^0(x,t), \quad (x,t) \in S^0,$$

где $S^0 = \overline{G}^0 \setminus G^0$, коэффициенты оператора $L^0_{(1.1)}$ и правая часть уравнения $f^0(x,t)$ — гладкие продолжения коэффициентов оператора $L_{(1.1)}$ и правой части $f(x,t)$, сохраняющие их свойства, $\varphi^0(x,t)$ — достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию $\varphi^0(x,t) = \varphi(x,t)$, $(x,t) \in S_0 \cup S^{L+}$. Функция $W(x,t)$ — решение задачи

$$L_{(1.1)} W(x,t) = 0, \quad (x,t) \in G, \quad W(x,t) = \varphi(x,t) - U(x,t), \quad (x,t) \in S.$$

Для функции $u(x,t)$ и компонент $U(x,t)$, $W(x,t)$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x,t) \right| \le M\varepsilon^{-k}, \quad \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} U(x,t) \right| \le M, \\ \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} W(x,t) \right| \le M\varepsilon^{-k} \exp[-m_{(2.2)} \varepsilon^{-1} r(x, \Gamma^-)], \\ (x,t) \in \overline{G}, \quad k + 2k_0 \le K_0, \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $m_{(2.2)}$ — произвольная постоянная из интервала $(0, m^0)$, $m^0 = (a^0)^{-1} b_0$, $r(x, \Gamma^-)$ — расстояние от точки x до множества Γ^-. Величина K_0 зависит от гладкости данных задачи и порядка условий согласования на S^*. В случае достаточно гладких данных и выполнения условий согласования до порядка K включительно имеем $K_0 = 2K$.

Теорема 2.1. *Для решения краевой задачи* (1.1) *и компонент* $U(x,t)$, $W(x,t)$ *из представления* (2.1) *справедливы оценки* (2.2).

Замечание. Дифференцирование по переменной t не увеличивает сингулярность решения и его компонент и их производных по x.

2.2. *Специальная разностная схема.* Приведем специальную разностную схему из [7]. Предварительно выпишем классическую схему [1]. На множестве $\overline{G}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{G}_h = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_0. \tag{2.3}$$

Здесь $\overline{\omega}_1$ — сетка на множестве $\overline{D}$, вообще говоря, неравномерная, $\overline{\omega}_0$ — равномерная сетка на отрезке $[0, T]$. Полагаем $h^i = x^{i+1} - x^i$, $x^i, x^{i+1} \in \overline{\omega}_1$, $x^1 = 0$, $x^{N+1} = d$, $h = \max\limits_i h^i$. Через $N+1$ и $N_0 + 1$ обозначим число узлов сеток $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_0$ соответственно; пусть $h \le MN^{-1}$, $h_t = TN_0^{-1}$. На сетке $\overline{G}_h$ задаче (1.1) сопоставим разностную схему

$$\Lambda_{(2.4)} z(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \tag{2.4а}$$

$$z(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h. \tag{2.4б}$$

Здесь $G_h = G \cap \overline{G}_h$, $S_h = S \cap \overline{G}_h$,

$$\Lambda_{(2.4)} z(x,t) \equiv \{\varepsilon a(x,t) \delta_{\overline{x}\widehat{x}} + b(x,t)\delta_x - c(x,t) - p(x,t)\delta_{\overline{t}}\} z(x,t),$$

$\delta_{\overline{x}\widehat{x}}z(x,t) = 2(h^{i-1}+h^i)^{-1}[\delta_x z(x,t) - \delta_{\overline{x}}z(x,t)]$, $(x,t) = (x^i,t)$, $\delta_{\overline{t}}z$, $\delta_x z$, $\delta_{\overline{x}}z$, $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}z$ — первые и вторая разностные производные на неравномерной сетке.

Разностная схема (2.4), (2.3) является монотонной ([1], гл. VII, § 1, с. 401) ε-равномерно при произвольном распределении узлов сетки $\overline{\omega}_1$, порождающей сетку $\overline{G}_{h(2.3)}$. Эта схема сходится при фиксированном значении параметра, однако не сходится ε-равномерно.

Выпишем специальную разностную схему. На множестве $\overline{G}$ строим сетку, сгущающуюся в окрестности пограничного слоя

$$\overline{G}_{h(2.5)} = \overline{\omega}_1^*(\sigma)\times\overline{\omega}_0, \tag{2.5}$$

где $\overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_{0(2.3)}$, $\overline{\omega}_1^* = \overline{\omega}_1^*(\sigma)$ — кусочно-равномерная сетка, σ — параметр, зависящий от ε и N. Шаги сетки $\overline{\omega}_1^*$ на отрезках $[0,\sigma]$ и $[\sigma,d]$ постоянны и равны $h^{(1)} = 2\sigma N^{-1}$ и $h^{(2)} = 2(d-\sigma)N^{-1}$ соответственно, $\sigma \le 2^{-1}d$. Величину σ выбираем из условия $\sigma = \sigma_{(2.5)}(\varepsilon,N,l) = \min[2^{-1}d,\ lm^{-1}\varepsilon\ln N]$, где $m = m_{(2.2)}$, l — произвольная постоянная, удовлетворяющая условию $l\ge 1$. Сетка $\overline{G}_{h(2.5)} = \overline{G}_{h(2.5)}(l)$ построена.

Совокупность сеточных уравнений (2.4) и сетки $\overline{G}_{h(2.5)}$ определяют специальную разностную схему — схему (2.4), (2.5).

2.3. *Оценки решений схемы* (2.4), (2.5) *и их сеточных производных.* Предварительно приведем достаточные условия, накладываемые на данные сеточной задачи (2.4), (2.5), выполнение которых обеспечивает малость решения этой разностной схемы. Пусть функции $f(x,t)$, $\varphi(x,t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&|f(x,t)| \le M\delta(\sigma+N^{-1})^{-1}, \quad M_1h^{(1)} \le x < \sigma, \quad x\ne x^j,\\
&|f(x,t)| \le M\delta, \quad \sigma\le x\le d-M_1h^{(2)}, \quad x\ne x^j,\\
&|f(x,t)| \le M\delta\varepsilon^{-1}\sigma^{-1}(\varepsilon+\sigma N^{-1})N, \quad x < M_1h^{(1)},\\
&|f(x,t)| \le M\delta(\varepsilon+N^{-1})N^2, \quad x > d-M_1h^{(2)},\\
&|f(x,t)| \le M\delta\sigma^{-1}(\varepsilon+\sigma N^{-1})(\sigma+N^{-1})^{-1}N, \quad x = x^j,\ \ x<\sigma,\\
&|f(x,t)| \le M\delta N, \quad x = x^j,\ \ x\ge\sigma, \quad (x,t)\in G_h,\\
&|\varphi(x,t)| \le M\delta, \quad (x,t)\in S_h.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $\overline{G}_h = \overline{G}_{h(2.5)}$, $\sigma = \sigma_{(2.5)}$, δ — произвольное число (в дальнейшем величина δ выбирается достаточно малой), x^j — некоторые произвольные узлы сетки $\overline{\omega}_1$, причем $j\le J$, величина J ограничена (равномерно по ε, N). Тогда для решения задачи (2.4), (2.5) справедлива оценка

$$|z(x,t)| \le M\delta, \ \ (x,t)\in\overline{G}_h. \tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *В случае условий* (2.6) *для решения разностной схемы* (2.4), (2.5) *выполняется оценка* (2.7).

Приведем ряд оценок для решений специальных разностных схем. Решение разностной схемы (2.4), (2.5) ограничено ε-равномерно и при N, $N_0\to\infty$ сходится ε-равномерно к решению краевой задачи (1.1)

$$|z(x,t)|\le M, \ \ |u(x,t)-z(x,t)| \le M[N^{-1}\ln^2 N + N_0^{-1}], \ \ (x,t)\in\overline{G}_h. \tag{2.8}$$

Далее для простоты при выводе оценок предполагаем, что коэффициенты уравнения (1.1) постоянны, а начальные значения равны нулю

$$a(x,t),\ b(x,t),\ c(x,t),\ p(x,t) = \text{const}, \ \ (x,t)\in\overline{G}, \ \ l\varphi(x,0) = 0, \ \ x\in\overline{D}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим $\delta_{\overline{t}}^{k_0}z(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, при $t\ge k_0h_t$, $k_0\ge 1$, где $\delta_{\overline{t}}^{k}z(x,t) = \delta_{\overline{t}}(\delta_{\overline{t}}^{k-1}z(x,t))$, $k\ge 1$. Функция $\delta_{\overline{t}}^{k_0}z(x,t)$ — решение сеточной краевой задачи, получающейся из задачи (2.4), (2.5) применением к ней разностного оператора $\delta_{\overline{t}}^{k_0}$. Начальные условия для функции $\delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t)$ определены при $t = k_0 h_t$; эти условия находятся с использованием решения $z(x,t)$ на слоях $t = i h_t$, $i = 0, 1, \dots, k_0$.

Подобно выводу оценок (2.8) получаются оценки (см., напр., [11])

$$|\delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t)| \le M, \quad \left| \frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}} u(x,t) - \delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t) \right| \le M[N^{-1} \ln^2 N + N_0^{-1}], \tag{2.10а}$$
$$(x,t) \in \overline{G}_h, \;\; t \ge k_0 h_t, \;\; 2k_0 \le K_0 - 2, \;\; K_0 = K_{0(2.2)}.$$

Заметим, что сетки $\overline{G}_{h(2.5)}$ при $r(x, \Gamma^-) \le \sigma$ и при $r(x, \Gamma^-) \ge \sigma$ равномерны. На шаблонах с постоянным шагом будем рассматривать разностные операторы $\delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n$, где $k \ge 0$ — порядок разностного оператора, n принимает значения от нуля до k; $\delta_x^k = \delta_x(\delta_x^{k-1})$. Например, $\delta_x \delta_{\overline{x}} z(x,t) = \delta_{x\overline{x}} z(x,t) = z_{x\overline{x}}(x,t)$ — вторая разностная производная на шаблоне (x^{i-1}, x^i, x^{i+1}), $x = x^i$, $h^{i-1} = h^i$. Операторы $\delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n$ определены на множествах $\omega_1^{k,n+}$ и $\omega_1^{k,n-}$, где

$$\omega_1^{k,n-} = \{x^i : x^{n+1} \le x^i \le x^{j-k+n}, \; x^j = \sigma, \; x^1 = 0\},$$
$$\omega_1^{k,n+} = \{x^i : x^{j+n} \le x^i \le x^{N+1-k+n}, \; x^j = \sigma, \; x^{N+1} = d\}.$$

С учетом уравнений (1.1), (2.4), принимая во внимание оценки (2.10а), находим

$$|\varepsilon^k \delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} \, z(x,t)| \le M, \tag{2.10б}$$
$$\varepsilon^k |\delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} u(x,t) - \delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t)|,$$
$$\varepsilon^k \left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x,t) - \delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t) \right| \le M[N^{-1} \ln^2 N + N_0^{-1}],$$
$$(x,t) \in \overline{G}_h, \;\; t \ge k_0 h_t, \;\; x \in \omega_1^{k,n}, \;\; k + 2k_0 \le K_0 - 4, \;\; n = 0, 1, \dots, k,$$

где $\omega_1^{k,n} = \omega_1^{k,n-} \cup \omega_1^{k,n+}$.

Сеточные функции $\varepsilon^k \delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $x \in \omega_1^{k,n}$, и функции $\varepsilon^k (\partial^{k+k_0} / \partial x^k \partial t^{k_0}) \, u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, назовем нормированными (разностными и дифференциальными) производными.

Таким образом, в случае условия (2.9) решение разностной схемы (2.4), (2.5) сходится на $\overline{G}_h$ ε-равномерно к решению краевой задачи (1.1), а нормированные разностные производные $\varepsilon^k \delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n \, \delta_{\overline{t}}^{k_0} z(x,t)$ сходятся ε-равномерно к нормированным производным $\varepsilon^k (\partial^{k+k_0} / \partial x^k \partial t^{k_0}) u(x,t)$ на сеточных подмножествах, где определены разностные производные $\delta_x^{k-n} \delta_{\overline{x}}^n$ на шаблоне с постоянным шагом.

Теорема 2.2. *Пусть для решения краевой задачи* (1.1) *выполняются оценки теоремы* 2.1 *при* $K_0 \ge 4$. *Тогда решение разностной схемы* (2.4), (2.5) *сходится к решению краевой задачи* ε*-равномерно*; *для решения схемы справедливы оценки* (2.8). *При условии* (2.9) *для разностных производных сеточного решения справедливы оценки* (2.10).

3. Разностные схемы повышенного порядка точности

Построим сеточный метод, использующий коррекцию невязки, решение которого сходится ε-равномерно к решению краевой задачи (1.1), однако с оценкой точности (по числу узлов N) выше, чем в (2.8).

3.1. *Построение разностных схем повышенного порядка точности.* Идея повышения точности приближенного решения такая же, как в [12], и состоит в следующем. Ошибка решения разностной схемы (2.4), (2.5), вызванная аппроксимацией частных производных по x разностными производными, обуславливается погрешностью аппроксимации операторов $(\partial^2 / \partial x^2)$ и $(\partial / \partial x)$ соответственно операторами $\delta_{\overline{x}\widehat{x}}$ и δ_x на решении задачи:

$$\Psi_1(x,t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) - \delta_{\overline{x}\widehat{x}} u(x,t), \quad \Psi_2(x,t) \equiv \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) - \delta_x u(x,t), \quad (x,t) \in G_h.$$

Например, в узлах сетки G_h, для которых $h^{i-1} = h^i = h$, в частности, на равномерной сетке

$$G_h^u, \tag{3.1}$$

имеем

$$\Psi_1(x,t) = -2(4!)^{-1}\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(x,t)h^2 - 2(6!)^{-1}\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(\xi_1,t)h^4,$$
$$\Psi_2(x,t) = -\sum_{s=2}^{4}(s!)^{-1}\frac{\partial^s}{\partial x^s}u(x,t)h^{s-1} - (5!)^{-1}\frac{\partial^5}{\partial x^5}u(\xi_2,t)h^4,$$

где $\xi_1 \in [x^{i-1}, x^{i+1}]$, $\xi_2 \in [x^i, x^{i+1}]$, $x = x^i$. Поэтому было бы естественно для лучшей аппроксимации производных $(\partial/\partial x)u(x,t)$ и $(\partial^2/\partial x^2)u(x,t)$ использовать соотношения

$$\delta_x u(x,t) - 2^{-1}\delta_x\delta_{\overline{x}}u(x,t)h - 6^{-1}\delta_x^2\delta_{\overline{x}}u(x,t)h^2 + 12^{-1}\delta_x^2\delta_{\overline{x}}^2u(x,t)h^3,$$
$$\delta_{x\overline{x}}\, u(x,t) - 12^{-1}\delta_x^2\delta_{\overline{x}}^2\, u(x,t)h^2, \quad (x,t) \in G^u_{h(3.1)}.$$

В этом случае приходим к "схеме"с коррекцией невязки (по x)

$$\Lambda_{(2.4)}z^c(x,t) = f(x,t) + 12^{-1}\varepsilon h^2 a(x,t)\delta_x^2\delta_{\overline{x}}^2\, u(x,t) + 2^{-1}hb(x,t)[\,\delta_x\delta_{\overline{x}}\, u(x,t) + 3^{-1}h\delta_x^2\delta_{\overline{x}}\, u(x,t)\,],$$

где $z^c(x,t)$ — откорректированное (поправленное) решение. Вместо разностных производных решения краевой задачи можно использовать соответствующие разностные производные функции $z(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_{h(2.5)}$, — решения разностной схемы (2.4), (2.5). Подобным образом строится схема с коррекцией невязки в том случае, когда условие $h^{i-1} = h^i$ нарушается. Можно ожидать, что новое решение $z^c(x,t)$ приближает решение краевой задачи по переменной x с порядком точности выше, чем в оценке (2.8).

Опишем алгоритм построения схем на основе коррекции. При построении схем принимаем во внимание лемму 2.1.

Оператор $\Lambda_{(2.4)} \equiv \Lambda^1$ аппроксимирует оператор $L_{(1.1)}$ с первым порядком точности по переменной x (по шагу пространственной сетки — величинам $h^{(1)}, h^{(2)}$). Через Λ^k обозначим сеточный оператор, аппроксимирующий $L_{(1.1)}$ с k-м порядком точности. Оператор Λ^k строим в таком виде

$$\Lambda^k = \Lambda^1 + \sum_{i=2}^{k}\Lambda^{(i)}.$$

В оператор Λ^k входят разностные производные по x порядка не выше $k+1$. Операторы $\Lambda^{(i)}$, $i \geq 2$, содержат разностные производные порядков i, $i+1$ на шаблонах с постоянным шагом, т.е. шаблоны таких производных принадлежат одному из множеств $\omega_1^{k+1,n-}$ или $\omega_1^{k+1,n+}$.При построении оператора Λ^k, аппроксимирующего оператор $L_{(1.1)}$ в узле x^p, шаблоны разностных операторов $\Lambda^{(i)}$ принадлежат множеству ω_1^- при условии $j > p$ и множеству ω_1^+ в противном случае. Здесь $\omega_1^- = \overline{\omega}_1 \cap \{x \leq \sigma\}$, $\omega_1^+ = \overline{\omega}_1 \cap \{x \geq \sigma\}$, $x^j = \sigma$ — граница раздела подобластей с постоянным шагом сетки по x. Предпочтительнее применять шаблоны, близкие к симметричным. Дополнительных ограничений при построении оператора Λ^k не накладывается.

Функцию $z^R(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $R > 1$, находим из решения задачи

$$\begin{gathered}\Lambda^1 z^1(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in G_h,\\ \Lambda^1 z^j(x,t) = -\sum_{i=2}^{j}\Lambda^{(i)}z^{j+1-i}(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in G_h, \quad j \geq 2,\\ z^j(x,t) = \varphi(x,t), \quad (x,t) \in S_h, \quad j = 1, \ldots, R,\end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\overline{G}_h = \overline{G}_{h(2.5)}$. Функцию $z^R(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, назовем решением разностной схемы (3.2), (2.5), а функции $z^1(x,t), \ldots, z^R(x,t)$ — компонентами решения разностной схемы. Разностная схема на основе коррекции невязки по пространственной переменной построена.

3.2. *Сходимость решений разностных схем* (3.2), (2.5). При исследовании разностных схем предполагаем выполненными оценки теоремы 2.1.

Рассмотрим разностную схему (3.2), (2.5) при $R = 2$. Пусть для решения задачи (3.2), (2.5) при $R = 1$ (т. е. решения задачи (2.4), (2.5)) выполняются оценки теоремы 2.2, а при $k_0 = 0$, $k \le 2$ — оценки (2.10), где $z(x,t)$ есть $z^1(x,t)$.

Пусть величина l, определяющая сетку $\overline{G}_{h(2.5)}(l)$, удовлетворяет условию

$$l \ge 2. \tag{3.3}$$

С учетом оценок (2.10) устанавливается ε-равномерная сходимость функции $z^2(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$,

$$|u(x,t) - z^2(x,t)| \le M[N^{-2}\ln^3 N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{3.4}$$

Лемма 3.1. *Пусть для решения краевой задачи* (1.1) *выполняются оценки теоремы* 2.1 *при* $K_0 \ge 6$, *а для решения разностной схемы* (3.2), (2.5) — *оценки теоремы* 2.2, *где* $z(x,t)$ *есть* $z^1(x,t)$, $k_0 = 0$, $k \le 2$. *Тогда разностная схема* (3.2), (2.5), (3.3) *сходится* ε-*равномерно со скоростью* $O(N^{-2}\ln^3 N + N_0^{-1})$; *для сеточного решения справедлива оценка* (3.4).

Если же данные краевой задачи удовлетворяют условию (2.9), то нормированные разностные производные функций $z^1(x,t)$, $z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, сходятся к соответствующим нормированным разностным производным решения $u(x,t)$. Для компонент решения разностной схемы $z^i(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $i = 1,\dots,R$, в случае схемы (3.2), (2.5), (3.3) при $R = 2$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\varepsilon^k|\delta_x^{k-n}\delta_{\overline{x}}^{n}\,\delta_{\overline{t}}^{k_0}u(x,t) - \delta_x^{k-n}\delta_{\overline{x}}^{n}\,\delta_{\overline{t}}^{k_0}z^i(x,t)| \le M[N^{-i}\ln^{i+1} N + N_0^{-1}], \\ (x,t) \in \overline{G}_h, \quad i = 1,2, \quad t \ge k_0 h_t, \quad x \in \omega_1^{k,n}, \\ 2i + k + 2k_0 \le K_0 - 2, \quad K_0 \ge 6, \quad K_0 = K_{0(2.2)}.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Пусть для решения краевой задачи* (1.1) *выполняются оценки теоремы* 2.1 *при* $K_0 \ge 6$, *а данные краевой задачи удовлетворяют условию* (2.9). *Тогда нормированные разностные производные функций* $z^1(x,t)$, $z^2(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, — *компонент решения разностной схемы* (3.2), (2.5), (3.3) *при* $R = 2$ — *сходятся к нормированным разностным производным решения краевой задачи* ε-*равномерно* (*на множестве* $\overline{G}_h$, $x \in \omega_1^{k,n}$, $t \ge k_0 h_t$); *для сеточных функций* $z^1(x,t)$, $z^2(x,t)$ *справедлива оценка* (3.5).

Пусть $R \ge 2$. Для решения краевой задачи используем разностную схему (3.2) на сетке $\overline{G}_{h(2.5)}(l)$ при

$$l \ge R. \tag{3.6}$$

Пусть для функций $z^i(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, $i = 1,2,\dots,R-1$ (компонент решения разностной схемы (3.2), (2.5), (3.6)), выполняются оценки

$$\begin{gathered}\varepsilon^k|\delta_x^{k-n}\,\delta_{\overline{x}}^{n}\delta_{\overline{t}}^{k_0}u(x,t) - \delta_x^{k-n}\delta_{\overline{x}}^{n}\,\delta_{\overline{t}}^{k_0}z^i(x,t)| \le M[N^{-i}\ln^{i+1} N + N_0^{-1}], \\ (x,t) \in \overline{G}_h, \quad i = 1,\dots,R-1, \quad t \ge k_0 h_t, \quad x \in \omega_1^{k,n}, \\ 2i + k + 2k_0 \le 2R, \quad K_0 \ge 2R+2, \quad K_0 = K_{0(2.2)}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

С учетом оценок (3.7) для функции $z^R(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}_h$, получается оценка

$$|u(x,t) - z^R(x,t)| \le M[N^{-R}\ln^{R+1} N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_h. \tag{3.8}$$

Если же для компонент решения разностной схемы (3.2), (2.5), (3.6) при $R \ge 2$ выполняется оценка

$$|u(x,t) - z^i(x,t)| \le M[N^{-i}\ln^{i+1} N + N_0^{-1}], \quad (x,t) \in \overline{G}_h, \quad i = 1,\dots,R, \tag{3.9}$$

то для функций $z^i(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, $i=1,\dots,R$, справедливы оценки

$$\begin{gathered}\varepsilon^k|\delta_x^{k-n}\delta_{\overline{x}}^n\,\delta_{\overline{t}}^{k_0}u(x,t)-\delta_x^{k-n}\delta_{\overline{x}}^n\,\delta_{\overline{t}}^{k_0}z^i(x,t)|\le M[N^{-i}\ln^{i+1}N+N_0^{-1}], \\ (x,t)\in\overline{G}_h,\ \ i=1,\dots,R,\ \ t\ge k_0h_t,\ \ x\in\omega_1^{k,n}, \\ 2i+k+2k_0\le K_0-2,\ \ K_0\ge 2R+2,\ \ K_0=K_{0(2.2)}.\end{gathered}\tag{3.10}$$

Теорема 3.1. *Пусть для решения краевой задачи* (1.1) *выполняются оценки теоремы* 2.1 *при* $K_0\ge 2R+2$, $R>1$, *и пусть для решения задачи используется разностная схема* (3.2), (2.5), (3.6). *Если для компонент решения разностной схемы* $z^i(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, *при* $i=1,\dots,R-1$ *выполняются оценки* (3.7), *то решение разностной схемы* $z^R(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N^{-R}\ln^{R+1}N+N_0^{-1})$ ε*-равномерно; для сеточного решения справедлива оценка* (3.8). *Более того, если для функций* $z^i(x,t)$, $(x,t)\in\overline{G}_h$, *при* $i=1,\dots,R$ *выполняется оценка* (3.9), *то при условии* (2.9) *для разностных производных этих функций справедливы оценки* (3.10).

Нетрудно видеть, что утверждения теоремы 3.1 и леммы 3.2 сохраняются, если условие (2.9) заменить, например, на условие

$$a(x,t)=a(t),\ \ b(x,t)=b(t),\ \ c(x,t)=c(t),\ \ p(x,t)=p(t),\ \ (x,t)\in\overline{G}.$$

В заключение этого раздела выпишем операторы $\Lambda^{(2)}$ для $R=2$ и $\Lambda^{(2)}$, $\Lambda^{(3)}$ для $R=3$. При $R=2$ имеем

$$\begin{aligned}&\Lambda^{(2)}=-2^{-1}h^{(1)}b(x,t)\delta_{x\overline{x}},\quad r(x,\Gamma^-)<\sigma,\\ &\Lambda^{(2)}=-2^{-1}h^{(2)}b(x,t)\delta_{x\overline{x}},\quad r(x,\Gamma^-)>\sigma,\\ &\Lambda^{(2)}=0,\quad x=\sigma,\quad (x,t)\in G_h.\end{aligned}\tag{3.11}$$

При $R=3$ имеем

$$\begin{aligned}&\Lambda^{(2)}=-2^{-1}h^{(1)}b(x,t)\delta_{x\overline{x}},\quad r(x,\Gamma^-)<\sigma,\\ &\Lambda^{(2)}=-2^{-1}h^{(2)}b(x,t)\delta_{x\overline{x}},\quad r(x,\Gamma^-)>\sigma,\\ &\Lambda^{(2)}=-3^{-1}\varepsilon(h^{(2)}-h^{(1)})a(x,t)\delta_x^3-2^{-1}h^{(2)}b(x,t)\delta_x^2,\ \ x=\sigma,\\ &\Lambda^{(3)}=-12^{-1}(h^{(1)})^2[\varepsilon a(x,t)\delta_x^2\delta_{\overline{x}}^2+2b(x,t)\delta_x^2\delta_{\overline{x}}],\ \ r(x,\Gamma^-)<\sigma,\ \ x\ne x^2,\,x^{j-1},\\ &\Lambda^{(3)}=-12^{-1}(h^{(2)})^2[\varepsilon a(x,t)\delta_x^2\delta_{\overline{x}}^2+2b(x,t)\delta_x^2\delta_{\overline{x}}],\ \ r(x,\Gamma^-)>\sigma,\ \ x\ne x^{j+1},\,x^N,\\ &\Lambda^3=0,\quad x=x^2,\ \ x^{j-1},\ \ x^{j+1},\ x^N,\end{aligned}\tag{3.12}$$

где $x^j=\sigma$, $x^1=0$, $x^{N+1}=d$.

Заметим, что оператор $\Lambda^{(2)}\,(R=2)$ более простой по сравнению с $\Lambda^{(2)}\,(R=3)$; такое упрощение достигнуто с использованием леммы 2.1.

4. Краевая задача для эллиптических уравнений

Приведем постановку задачи Дирихле для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения и построим разностные схемы повышенного порядка точности. При построении используем коррекцию невязки.

4.1. *Постановка задачи.* На полосе $D=\{x:0<x_1<d,\ x_2\in R\}$ с границей $\Gamma=\overline{D}\setminus D$ рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного уравнения эллиптического типа

$$L_{(4.1)}u(x)\equiv\Big\{\varepsilon\sum_{s=1,2}a_s(x)\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}+\sum_{s=1,2}b_s(x)\frac{\partial}{\partial x_s}-c(x)\Big\}u(x)=f(x),\quad x\in D,\tag{4.1а}$$

$$u(x)=\varphi(x),\ \ x\in\Gamma.\tag{4.1б}$$

Здесь $a_s(x)$, $b_s(x)$, $c(x)$, $f(x)$, $x \in \overline{D}$, и $\varphi(x)$, $x \in \Gamma$, — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условию

$$0 < a_0 \leq a_s(x) \leq a^0, \quad b_1(x) \geq b_0 > 0, \quad c(x) \geq 0, \quad x \in \overline{D};$$

параметр ε принимает произвольные значения из полуинтервала $(0, 1]$.

При стремлении параметра к нулю в окрестности множества Γ^-, $\Gamma^- = \{x : x_1 = 0, \ x_2 \in R\}$, появляется пограничный слой.

Для задачи (4.1) в качестве базовой схемы используем схему, построенную в ([7], с. 129; [15]). Решение этой схемы сходится ε-равномерно со скоростью $O(N^{-1} \ln^2 N)$ (ср. с (4.9)).

Построим разностную схему, порядок скорости сходимости которой выше второго. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных результатов. Построение и исследование схем для задачи (4.1) проводится подобно построению и исследованию схем в случае задачи (1.1).

4.2. *Априорные оценки решения и производных.* Решение задачи (4.1) удобно представить в виде суммы функций

$$u(x) = U(x) + W(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{4.2}$$

где $U(x)$, $W(x)$ — регулярная и сингулярная части решения. С использованием техники из работ [7], [15] для функций $u(x)$, $U(x)$, $W(x)$ устанавливаются оценки

$$\begin{gathered} \left| \frac{\partial k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} u(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k}, \quad \left| \frac{\partial k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} U(x) \right| \leq M, \\ \left| \frac{\partial k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} W(x) \right| \leq M \varepsilon^{-k_1} \exp(-m_{(4.3)} \varepsilon^{-1} r(x, \Gamma^-)), \\ x \in \overline{D}, \quad k = k_1 + k_2, \quad k \leq K_0, \end{gathered} \tag{4.3}$$

где $m_{(4.3)}$ — произвольная постоянная из интервала $(0, m^0)$, $m^0 = (a^0)^{-1} b_0$, величина K_0 определяется гладкостью данных задачи.

Теорема 4.1. *Для решения краевой задачи* (4.1) *и ее компонент из представления* (4.2) *справедливы оценки* (4.3).

4.3. *Специальная разностная схема.* На множестве $\overline{D}$ введем прямоугольную сетку

$$\overline{D}_h = \overline{\omega}_1 \times \omega_2. \tag{4.4}$$

Здесь $\overline{\omega}_1$ — сетка на отрезке $[0, d]$, вообще говоря, неравномерная, ω_2 — равномерная сетка на оси x_2. Полагаем $h_1^i = x_1^{i+1} - x_1^i$, x_1^i, $x_1^{i+1} \in \overline{\omega}_1$, $h_1 = \max\limits_i h_1^i$, h_2 — шаг сетки ω_2, $h = \max\limits_s h_s$, $s = 1, 2$. Через $N_1 + 1$ и $N_2 + 1$ обозначим число узлов сетки $\overline{\omega}_1$ и сетки ω_2 на отрезке единичной длины соответственно. Пусть $h \leq M N^{-1}$, где $N = \min\limits_s N_s$, $s = 1, 2$. На сетке $\overline{D}_h$ задаче (4.1) сопоставим разностную схему

$$\Lambda_{(4.5)} z(x) = f(x), \quad x \in D_h, \quad z(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_h. \tag{4.5}$$

Здесь $D_h = D \cap \overline{D}_h$, $\Gamma_h = \Gamma \cap \overline{D}_h$,

$$\begin{gathered} \Lambda_{(4.5)} z(x) \equiv \left\{ \varepsilon \sum_{s=1,2} a_s(x) \delta_{\overline{xs}\,\widehat{xs}} + \sum_{s=1,2} [b_s^+(x) \delta_{xs} + b_s^-(x) \delta_{\overline{xs}}] - c(x) \right\} z(x), \\ v^+(x) = 2^{-1}(v(x) + |v(x)|), \quad v^-(x) = 2^{-1}(v(x) - |v(x)|). \end{gathered}$$

Разностная схема (4.5), (4.4) является монотонной [1] при произвольном распределении узлов сетки $\overline{D}_h$. Эта схема сходится при фиксированном значении параметра, однако она не сходится ε-равномерно.

На множестве $\overline{D}$ строим сетку, сгущающуюся в окрестности пограничного слоя

$$\overline{D}_h = \overline{D}_h(l) = \overline{\omega}_1^*(\sigma) \times \omega_2, \tag{4.6}$$

где $\overline{\omega}_1^* = \overline{\omega}^*_{1(2.5)}(\sigma)$, $\omega_2 = \omega_{2(4.4)}$. Здесь $\sigma = \sigma_{(4.6)}(\varepsilon,\, N_1,\, l) = \min[2^{-1}d,\, lm^{-1}\varepsilon \ln N_1]$, $m = m_{(4.3)}$, $l > 0$ — произвольное число. Совокупность сетки $\overline{D}_h(l)$ и сеточных уравнений (4.5) определяют специальную разностную схему (4.5), (4.6).

В том случае, когда функции $f(x)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&|f(x)| \le M\delta(\sigma + N^{-1})^{-1}, \quad M_1 h_1^{(1)} \le x_1 < \sigma, \ \ x_1 \ne x_1^j, \\
&|f(x)| \le M\delta, \quad \sigma \le x_1 \le d - M_1 h_1^{(2)}, \ \ x_1 \ne x_1^j, \\
&|f(x)| \le M\delta\varepsilon^{-1}\sigma^{-1}(\varepsilon + \sigma N^{-1})N, \quad x_1 < M_1 h_1^{(1)}, \\
&|f(x)| \le M\delta(\varepsilon + N^{-1})N^2, \ \ x_1 > d - M_1 h_1^{(2)}, \\
&|f(x)| \le M\delta\sigma^{-1}(\varepsilon + \sigma N^{-1})(\varepsilon + N^{-1})^{-1}N, \quad x_1 = x_1^j, \ \ x_1 < \sigma, \\
&|f(x)| \le M\delta N, \quad x_1 = x_1^j, \ \ x_1 \ge \sigma, \quad x \in D_h, \\
&|\varphi(x)| \le M\delta, \quad x \in \mathit{\Gamma}_h,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

для решения задачи (4.5), (4.6) справедлива оценка

$$|z(x)| \le M\delta, \ \ x \in \overline{D}_h, \tag{4.8}$$

где $\overline{D}_h = \overline{D}_{h(4.6)}(l)$ при $l \ge 1$. В соотношениях (4.7) $h_1^{(i)}$ есть шаг сетки $\overline{\omega}_1$ на отрезках $[0, \sigma]$ при $i = 1$ и $[\sigma, d]$ при $i = 2$, число “исключительных” узлов x_1^j сетки $\overline{\omega}_1$ ограничено постоянной, не зависящей от ε и N.

Лемма 4.1. *В случае условий* (4.7) *для решения разностной схемы* (4.5), (4.6) *при* $l \ge 1$ *справедлива оценка* (4.8).

Решение разностной схемы (4.5), (4.6) сходится ε-равномерно к решению краевой задачи. Справедлива следующая оценка:

$$|u(x) - z(x)| \le M[N_1^{-1} \ln^2 N_1 + N_2^{-1}], \ \ x \in \overline{D}_h(l), \ \ l \ge 1. \tag{4.9}$$

При выводе оценок погрешности для простоты будем предполагать, что коэффициенты уравнения (4.1а) постоянны

$$a_s(x),\, b_s(x),\, c(x) = \text{const}, \ \ x \in \overline{D}, \ \ s = 1, 2. \tag{4.10}$$

Функция $\delta_{x_2}^{k_2} z(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $k_2 \ge 1$, является решением сеточной краевой задачи, получающейся из задачи (4.5), (4.6) применением к ней оператора $\delta_{x_2}^{k_2}$. Для функций $\delta_{x_2}^{k_2} z(x)$ получаются оценки

$$\begin{gathered}
\left| \frac{\partial^{k_2}}{\partial x_2^2} u(x) - \delta_{x_2}^{k_2} z(x) \right| \le M[N_1^{-1} \ln^2 N_1 + N_2^{-1}], \\
\varepsilon^{k_1} |\delta_{x_1}^{k_1 - n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, u(x) - \delta_{x_1}^{k_1 - n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, z(x)|, \\
\varepsilon^{k_1} \left| \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} u(x) - \delta_{x_1}^{k_1 - n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, z(x) \right| \le M[N_1^{-1} \ln^2 N_1 + N_2^{-1}], \\
x \in \overline{D}_h, \ \ x_1 \in \omega_1^{k_1, n}, \ \ k \le K_0 - 3, \ \ n = 0, 1, \ldots, k_1, \ \ k = k_1 + k_2,
\end{gathered} \tag{4.11}$$

где $\omega_1^{k_1, n} = \omega^{k_1, n}_{1(2.10б)}$, $\overline{D}_h = \overline{D}_h(l)$, $l \ge 1$.

Теорема 4.2. *Пусть для решения краевой задачи* (4.1) *выполняются оценки теоремы* 4.1 *при* $K_0 \geq 3$. *Тогда решение разностной схемы* (4.5), (4.6) *сходится к решению краевой задачи* ε*-равномерно; для погрешности схемы справедлива оценка* (4.9). *При условии* (4.10) *для разностных производных сеточного решения справедливы оценки* (4.11).

4.4. *Построение разностных схем повышенного порядка точности.* Идея построения таких схем подобна идее, описанной в разделе 3. Пусть оператор Λ^1 есть оператор $\Lambda_{(4.5)}$. Оператор Λ^k аппроксимирует оператор $L_{(4.1)}$ с порядком k относительно величин h_2, $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$. Операторы Λ^k строим последовательно $\Lambda^k = \Lambda^1 + \sum\limits_{i=2}^{k} \Lambda^{(i)}$. Операторы $\Lambda_1^{(i)}$, $i \geq 2$, аппроксимирующие оператор

$$L_1 \equiv \varepsilon a_1(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + b_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} - c(x),$$

строятся подобно операторам $\Lambda_{(3.2)}^{(i)}$.

Функцию $z^R(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $R > 1$, находим из решения задачи

$$\begin{gathered} \Lambda^1 z^1(x) = f(x), \quad x \in D_h, \\ \Lambda^1 z^j(x) = -\sum_{i=2}^{j} \Lambda^{(i)} z^{j+1-i}(x) + f(x), \quad x \in D_h, \quad j \geq 2, \\ z^j(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathit{\Gamma}_h, \quad j = 1, \ldots, R, \end{gathered} \tag{4.12}$$

где $\overline{D}_h = \overline{D}_h(l)$. Функцию $z^R(x)$, $x \in \overline{D}_h$, назовем решением разностной схемы (4.12), (4.6), а функции $z^i(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $i = 1, \ldots, R$, — компонентами решения разностной схемы. Схема (4.12), (4.6) — разностная схема на основе коррекции невязки.

Функцию $u(x)$, $x \in \overline{D}$, — решение краевой задачи, аппроксимируем функцией $z^R(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $R > 1$, $\overline{D}_h = \overline{D}_h(l)$, где

$$l \geq R. \tag{4.13}$$

4.5. *Сходимость решений разностных схем* (4.12), (4.6). При выводе оценок погрешности схем предполагаем, что для решения краевой задачи справедливы оценки теоремы 4.1. Пусть $R = 2$ и для функции $z^1(x)$, $x \in \overline{D}_h$, выполняются оценки (оценки (4.11) при $k = 2$, где $z(x)$ есть $z^1(x)$)

$$\begin{gathered} \varepsilon^{k_1} |\delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n} \, \delta_{x_2}^{k_2} \, u(x) - \delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n} \, \delta_{x_2}^{k_2} \, z^1(x)| \leq M[N_1^{-1} \ln^2 N_1 + N_2^{-1}], \\ x \in \overline{D}_h(l), \quad x_1 \in \omega_1^{k_1,n}, \quad k_1 + k_2 \leq 2, \quad l \geq 2. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Тогда для функции $z^2(x)$, $x \in \overline{D}_h$, получается оценка

$$|u(x) - z^2(x)| \leq M[N_1^{-2} \ln^3 N_1 + N_2^{-2}], \quad x \in \overline{D}_h(l), \quad l \geq 2. \tag{4.15}$$

В том случае, когда при $R = 2$ для компонент $z^1(x)$, $z^2(x)$, $x \in \overline{D}_h$, выполняются оценки

$$|u(x) - z^i(x)| \leq M[N_1^{-i} \ln^{i+1} N_1 + N_2^{-i}], \quad x \in \overline{D}_h, \quad i = 1, 2; \tag{4.16}$$

для разностных производных этих функций справедливы оценки

$$\varepsilon^{k_1} |\delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n} \, \delta_{x_2}^{k_2} \, u(x) - \delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n} \, \delta_{x_2}^{k_2} \, z^i(x)| \leq M[N_1^{-i} \ln^{i+1} N_1 + N_2^{-i}], \tag{4.17}$$

$x \in \overline{D}_h$, $i = 1, 2$, $x_1 \in \omega_1^{k_1,n}$, $2i + k \leq K_0 - 1$, $K_0 \geq 5$, $K_0 = K_{0(4.3)}$, $k = k_1 + k_2$.

Лемма 4.2. *Пусть для решения краевой задачи* (4.1) *выполняются оценки теоремы* 4.1 *при* $K_0 \geq 5$ *и для решения задачи используется разностная схема* (4.12), (4.6), (4.13) *при* $R = 2$. *Если для компоненты решения разностной схемы* $z^1(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *выполняются оценки* (4.14), *то функция* $z^2(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N_1^{-2} \ln^3 N_1 + N_2^{-2})$ ε-*равномерно*; *для сеточного решения справедлива оценка* (4.15). *Более того, если для* $z^1(x)$, $z^2(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *выполняются оценки* (4.16), *то при условии* (4.10) *для разностных производных этих функций справедливы оценки* (4.17).

Замечание. Из теоремы 4.2 и леммы 4.2 вытекает, что при $K_0 \geq 5$ и условии (4.10) для компонент решения разностной схемы (4.12), (4.6), (4.13) при $R = 2$ и их разностных производных справедливы оценки (4.16), (4.17).

Пусть $R \geq 2$ и для компонент $z^j(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $j = 1, \ldots, R-1$, решения разностной схемы (4.12), (4.6) выполняются оценки

$$\varepsilon^{k_1} |\delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, u(x) - \delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, z^i(x)| \leq M[N_1^{-i} \ln^{i+1} N_1 + N_2^{-i}], \tag{4.18}$$
$$x \in \overline{D}_h, \;\; 1 \leq i \leq R-1, \;\; x_1 \in \omega_1^{k_1,n},$$
$$2i + k \leq 2R, \;\; K_0 \geq 2R+1, \;\; K_0 = K_{0(4.3)}, \;\; k = k_1 + k_2.$$

С учетом оценок (4.18) для решения $z^R(x)$, $x \in \overline{D}_h(l)$, $l \geq R$, задачи (4.12), (4.6), (4.13) получается оценка

$$|u(x) - z^R(x)| \leq M[N_1^{-R} \ln^{R+1} N_1 + N_2^{-R}], \quad x \in \overline{D}_h\,. \tag{4.19}$$

В том случае, когда для функций $z^i(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $i = 1, \ldots, R$, выполняются оценки

$$|u(x) - z^i(x)| \leq M[N_1^{-i} \ln^{i+1} N_1 + N_2^{-i}], \;\; x \in \overline{D}_h, \;\; i = 1, \ldots, R, \tag{4.20}$$

для разностных производных этих функций справедливы оценки

$$\varepsilon^{k_1} |\delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, u(x) - \delta_{x_1}^{k_1-n} \delta_{\overline{x}_1}^{n}\, \delta_{x_2}^{k_2}\, z(x)| \leq M[N_1^{-i} \ln^{i+1} N_1 + N_2^{-i}], \tag{4.21}$$
$$x \in \overline{D}_h, \;\; i = 1, \ldots, R, \;\; x_1 \in \omega_1^{k_1,n}, \;\; 2i + k \leq K_0 - 1,$$
$$K_0 \geq 2R+1, \;\; K_0 = K_{0(4.3)}, \;\; k = k_1 + k_2.$$

Теорема 4.3. *Пусть для решений краевой задачи* (4.1) *выполняются оценки теоремы* 4.1 *при* $K_0 \geq 2R+1$, $R > 1$. *Если для компонент* $z^i(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *при* $i = 1, \ldots, R-1$, *решения разностной схемы* (4.12), (4.6), (4.13) *выполняются оценки* (4.18), *то решение разностной схемы* $z^R(x)$, $x \in \overline{D}_h$, *сходится к решению краевой задачи со скоростью* $O(N_1^{-R} \ln^{R+1} N_1 + N_2^{-R})$ ε-*равномерно*; *для сеточного решения справедлива оценка* (4.19). *Если же для функций* $z^i(x)$, $x \in \overline{D}_h$, $i = 1, \ldots, R$, *выполняется оценка* (4.20), *то при условии* (4.10) *для разностных производных этих функций справедливы оценки* (4.21).

Замечание 1. Из теорем 4.2, 4.3 вытекает, что при $K_0 \geq 2R+1$ и условии (4.10) для компонент решения разностной схемы (4.12), (4.6), (4.13) при $R \geq 2$ и их разностных производных справедливы оценки (4.19)–(4.21).

Замечание 2. Утверждения теорем 4.2 и 4.3 сохраняются, если, например, условие (4.10) заменить на условие

$$a_s(x) = a_s(x_2), \;\; b_s(x) = b_s(x_2), \;\; c(x) = c(x_2), \;\; x \in \overline{D}, \;\; s = 1, 2.$$

Приведем операторы $\Lambda^{(2)}$ при $R = 2$ и $\Lambda^{(2)}$, $\Lambda^{(3)}$ при $R = 3$

$$\Lambda^{(2)} = \Lambda_1^{(2)} + \Lambda_2^{(2)}, \quad \Lambda_2^{(2)} = -2^{-1} h_2 b_2(x) \delta_{x_2\, \overline{x}_2}\,, \quad R = 2, 3;$$
$$\Lambda^{(3)} = \Lambda_1^{(3)} + \Lambda_2^{(3)}, \quad \Lambda_2^{(3)} = -12^{-1} (h_2)^2 [\varepsilon a_2(x) \delta_{x_2}^2\, \delta_{\overline{x}_2}^2 + 2 b_2(x) \delta_{x_2}^2\, \delta_{\overline{x}_2}];$$

здесь операторы $\Lambda_1^{(2)}$ при $R = 2$ и $\Lambda_1^{(2)}$, $\Lambda_1^{(3)}$ при $R = 3$ определяются соответственно соотношениями (3.11) и (3.12), где величины $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ и операторы $\delta_x^p\,\delta_{\overline{x}}^q$ заменены на $a_1(x)$, $b_1(x)$, $h_1^{(1)}$, $h_1^{(2)}$ и $\delta_{x_1}^p\,\delta_{\overline{x}_1}^q$.

Приведенная техника построения и обоснования разностных схем позволяет строить схемы высокого порядка точности по пространственным переменным для параболических уравнений на полосе.

Автор признателен В.Б. Андрееву и П.Н. Вабищевичу за плодотворные обсуждения краевых задач с ограниченной гладкостью решений.

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 590 с.
3. Бахвалов Н.С. *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. – Т. 9. – № 4. – С. 841–859.
4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем.* – М.: Мир, 1983. – 199 с.
5. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6. – № 2. – С. 237–248.
6. Лисейкин В.Д., Петренко В.Е. *Адаптивно-инвариантный метод численного решения задач с пограничными и внутренними слоями.* – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1989. – 259 с.
7. Шишкин Г.И. *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.* – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
8. Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I. *Fitted numerical methods for singular perturbation problems.* – Singapore: World Scientific, 1996. – 166 p.
9. Roos H.-G., Stynes M., Tobiska L. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations.* – Berlin: Springer, 1996. – 348 p.
10. 10. Böhmer K., Hemker P.W., Stetter H.J. *The defect correction approach* // Computing. – 1984. – № 5. – P. 1-32.
11. Hemker P.W., Shishkin G.I., Shishkina L.P. *The use of defect correction for the solution of parabolic singular perturbation problems* // ZAMM – Z. anqew. Math. Mech. – 1997. – V. 77. – № 1. – P. 59–74.
12. Shishkin G.I. *Method of improving the accuracy of the approximate solutions to singularly perturbed equations by defect correction* // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1996. – V. 11. – № 6. – P. 539–557.
13. Axelsson O., Nikolova M. *Adaptive refinement for convection-diffusion problems based on a defect-correction technique and finite difference method* // Computing. – 1997. – V. 58 – № 1. – P. 1–30.
14. Shishkin G.I. *Grid approximation of singularly perturbed boundary value problem for quasi-linear parabolic equation degenerating into the first-order equation* // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1991. – V. 6. – № 1. – P. 61–81.
15. Шишкин Г.И. *Аппроксимация сингулярно возмущенной краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, вырождающихся в уравнения первого порядка* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 31. – № 4. – С. 550–566.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии Наук

Поступили
первый вариант 19.01.1998
окончательный вариант 12.03.1999