ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 512.553.2

Х. ЛОМП, М.Ф. НАСРУТДИНОВ, И.И. САХАЕВ

О ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЯХ С ПОЛУЛОКАЛЬНЫМ КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

1. Введение

Рассматриваются ассоциативные кольца с единицей и унитарные модули над ними. Если не оговорено противное, модули являются левыми модулями. Будем обозначать через $J(M)$ *радикал Джекобсона* R-модуля M, а через $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ кольцо эндоморфизмов R-модуля M. Х. Ломп в ([1], с. 1933) сформулировал следующий вопрос: *будет ли конечно порожденным любой* (*само-*)*проективный* R*-модуль* P*, кольцо эндоморфизмов которого полулокально*? Этот вопрос тесно связан с проблемой Д. Лазара ([2], с. 440): *будет ли конечно порожденным проективный левый* R*-модуль* P*, если конечно порожден фактормодуль* $P/J(P)$?

В [3]–[9] была исследована проблема Лазара. В [10] построено некоммутативное полулокальное кольцо R, над которым существует проективный R-модуль P такой, что фактормодуль $P/J(P)$ конечно порожден, а сам модуль P не является конечно порожденным.

В данной работе доказано (следствие 2.2), что проективный левый R-модуль P, кольцо эндоморфизмов которого полулокально, является конечно порожденным тогда и только тогда, когда дуальные размерности Голди модуля P и фактормодуля $P/J(P)$ модуля P по его радикалу Джекобсона равны. Показано, что для проективного модуля, построенного в [10], это условие не выполнено.

2. Доказательство результатов

Левый R-модуль H называется *локальным* ([11], с. 74), если H содержит наибольший собственный подмодуль. Левый R-модуль M называется *полулокальным*, если фактормодуль $M/J(M)$ является полупростым левым R-модулем, т. е. $M/J(M)$ есть прямая сумма простых левых R-модулей. В случае полупростого R-модуля $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где M_i — простые R-модули, будем обозначать через $\mathrm{length}(M)$ мощность множества I, т. е. $\mathrm{length}(M) = \mathrm{card}(I)$.

Подмодуль N левого R-модуля M называется *малым* в M (запись $N \ll M$), если для любого подмодуля U модуля M из условия $N+U = M$ следует $U = M$. Левый R-модуль M называется *неразложимым в сумму*, если $M \neq 0$ и каждый собственный подмодуль модуля M малый в M. Говорят, что левый R-модуль M имеет *конечную дуальную размерность Голди*, если существует точная последовательность R-модулей

$$M \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n} H_i \longrightarrow 0,$$

где все H_i — неразложимые в сумму левые R-модули и ядро R-гомоморфизма g — малый подмодуль в M. Тогда число n является инвариантом модуля M и называется *конечной дуальной размерностью Голди* модуля M, в этом случае будем писать $\mathrm{hdim}_R(M) = n$ или, если ясно, над каким кольцом рассматривается модуль M, $\mathrm{hdim}(M) = n$.

Исследования И.И. Сахаева и М.Ф. Насрутдинова были поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-01-00469).

Известно (напр., [12], теорема 1.8), что в этом случае модуль M не может отображаться эпиморфно на прямую сумму левых R-модулей, содержащую более чем n слагаемых. Заметим, что для простого R-модуля H выполняется $\mathrm{hdim}(H) = \mathrm{length}(H) = 1$, а для полупростого R-модуля M с конечной дуальной размерностью Голди $\mathrm{hdim}(M) = \mathrm{length}(M)$. Дуальная размерность Голди изучалась в статьях [12]–[18]. Связь между кольцом эндоморфизмов проективного модуля и его дуальной размерностью Голди проясняет следующая теорема Такеучи ([17], следствие 6; см. также [1], теорема 3.10).

Теорема. *Проективный левый R-модуль P имеет конечную дуальную размерность Голди тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов $S = \mathrm{Hom}_R(P, P)$ полулокально. В этом случае* $\mathrm{hdim}\, P = \mathrm{length}(S/J(S))$.

Модули, кольцо эндоморфизмов которых полулокально, были изучены в статьях [19], [15] и [1].

Покажем сначала, как связаны между собой поставленный нами вопрос и проблема Лазара.

Лемма 2.1. *Пусть P — (само-)проективный левый R-модуль, $S = \mathrm{Hom}_R(P, P)$ — кольцо эндоморфизмов модуля P, $I = \mathrm{Hom}_R(P, J(P))$ — идеал кольца S и $\widetilde{S} = S/I$ является полулокальным кольцом. Тогда фактормодуль $P/J(P)$ конечно порожден.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{P}$ фактормодуль $P/J(P)$, а через $\overline{R}$ — факторкольцо $R/J(R)$. Заметим, что $\overline{P}$ — проективный левый $\overline{R}$-модуль. Для любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(P, P)$ имеем $\varphi(J(P)) \subseteq J(P)$ ([20], теорема 9.1.4, с. 212) и, следовательно, гомоморфизм φ определяет R-гомоморфизм $\overline{\varphi} : P/J(P) \to P/J(P)$, который содержится в $\mathrm{Hom}_R(\overline{P}, \overline{P})$. Рассмотрим гомоморфизм

$$\Phi : S \to \mathrm{Hom}_R(\overline{P}, \overline{P})$$

колец S и $\mathrm{Hom}_R(\overline{P}, \overline{P})$, определенный по правилу $\Phi(\varphi) = \overline{\varphi}$ для любого φ из S. Φ — эпиморфизм ([21], предложение 1.1) и $I = \mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{Hom}_R(P, J(P))$. Тогда

$$\mathrm{Hom}_R(\overline{P}, \overline{P}) \cong S/Ker(\Phi). \tag{1}$$

Так как кольцо S/I полулокально, то в силу изоморфизма колец $\mathrm{Hom}_R(\overline{P}, \overline{P}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{P}, \overline{P})$ и изоморфизма (1) кольцо $\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{P}, \overline{P})$ полулокальное и по теореме Такеучи $\mathrm{hdim}_{\overline{R}}(P/J(P)) = \mathrm{hdim}_{\overline{R}}(\mathrm{Hom}(\overline{P}, \overline{P})) = \mathrm{hdim}(S/\mathrm{Ker}(\Phi)) < \infty$. В силу теоремы 2.7 из [1] $P/J(P)$ — полулокальный $R/J(R)$-модуль и $\mathrm{hdim}_{\overline{R}}\, \overline{P} = \mathrm{length}(\overline{P}) = \mathrm{hdim}_{\overline{S}}(\overline{S}) \leq \infty$.

Значит, $P/J(P)$ является конечной прямой суммой простых левых $\overline{R}$-модулей и поэтому $P/J(P)$ — конечно порожденный левый $R/J(R)$-модуль. Следовательно, $P/J(P)$ — конечно порожденный левый R-модуль. □

Лемма 2.2. *Если H — неразложимый в сумму левый R-модуль, то H — либо локальный R-модуль, либо радикальный R-модуль, т. е. $H = J(H)$.*

Доказательство. Если $H = J(H)$, то лемма доказана. Пусть теперь $H \neq J(H)$, тогда по определению неразложимого в сумму R-модуля каждый собственный подмодуль N модуля H малый в H. Согласно определению радикала Джекобсона $J(H)$ ([20], теорема 9.1.1, с. 211) имеем $N \subseteq J(H)$, значит, $J(H)$ — наибольший подмодуль модуля H и H — локальный модуль. □

Следствие 2.1. Пусть P — проективный левый R-модуль, кольцо эндоморфизмов которого полулокально, тогда левый R-модуль $P/J(P)$ конечно порожденный.

Доказательство. Пусть $S = \mathrm{Hom}_R(P, P)$ и $I = \mathrm{Hom}_R(P, J(P))$. По ([21], предложение 1.1) имеем $J(S) \subseteq \mathrm{Hom}_R(P, J(P)) = I$ и $S/J(S) \cong (S/J(S))/(I/J(S))$. Следовательно, S/I — полулокальное кольцо и по лемме 2.1 левый R-модуль $P/J(P)$ конечно порожденный. □

Теперь рассмотрим подробнее модули с конечной дуальной размерностью Голди.

Теорема 2.1. *Пусть M — левый R-модуль и* $\mathrm{hdim}(M) < \infty$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) *M конечно порожденный*;
(b) *$J(M)$ — малый подмодуль в M*;
(c) $\mathrm{hdim}(M) = \mathrm{hdim}(M/J(M))$, *где $M/J(M)$ — фактормодуль R-модуля M по радикалу Джекобсона $J(M)$.*

Доказательство. 1. (a) $\Rightarrow$ (b). Если M — конечно порожденный левый R-модуль, то по теореме 9.2.1 ([20], с. 216) имеем $J(M) \ll M$.

2. (b) $\Rightarrow$ (c). Согласно замечанию 1.4 из [1] имеем $\mathrm{hdim}(M/J(M)) < \mathrm{hdim}\, M < \infty$. Тогда из теоремы 2.7 из [1] следует, что M — полулокальный левый R-модуль, и по определению полулокального модуля фактормодуль $M/J(M)$ есть прямая сумма простых левых R-модулей H_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку простой левый R-модуль H_i неразложим в сумму и $M/J(M) = \bigoplus_{i=1}^n H_i$, то $\mathrm{hdim}(M/J(M)) = n$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $M \to M/J(M) \to 0$. Согласно условию (b) $J(M) \ll M$ и поэтому имеем $\mathrm{hdim}(M) = \mathrm{hdim}(M/J(M)) = n$.

3. (c) $\Rightarrow$ (a). Согласно условию теоремы $\mathrm{hdim}(M) < \infty$. Можно считать, что $\mathrm{hdim}(M) > 0$, поскольку при $\mathrm{hdim}(M) = 0$ по определению ([19], с. 3593) $M = 0$ и доказывать нечего. Положим $\mathrm{hdim}(M) = n > 0$. Тогда в силу определения дуальной размерности Голди существует точная последовательность левых R-модулей

$$M \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=1}^{n} H_i \longrightarrow 0, \tag{2}$$

где все H_i — неразложимые в сумму левые R-модули и $\mathrm{Ker}(g)$ — малый подмодуль в M, причем согласно лемме 2.2 H_i — либо локальный, либо радикальный левый R-модуль.

Докажем, что $H_i \neq J(H_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Допустим, что $H_i = J(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и $k > 0$. Поскольку в точной последовательности (2) гомоморфизм g является эпиморфизмом, фактормодуль $M/\mathrm{Ker}(g)$ изоморфен R-модулю $\bigoplus_{i=1}^n H_i$.

Так как $\mathrm{Ker}(g)$ — малый подмодуль в M, то $\mathrm{Ker}(g) \subseteq J(M)$, и в силу следствия 9.1.5 из ([20], с. 213) получим изоморфизмы R-модулей $M/J(M) \cong (M/\mathrm{Ker}(g))/(J(M)/\mathrm{Ker}(g)) \cong (\bigoplus_{i=1}^n H_i)/(\bigoplus_{i=1}^n J(H_i)) \cong \bigoplus_{i=1}^n (H_i/J(H_i) = \bigoplus_{i=k+1}^n (H_i/J(H_i))$.

Итак, $M/J(M) = \bigoplus\limits_{i=k+1}^{n} H_i/J(H_i)$, $k > 0$, причем в силу локальности модулей H_i фактормодули $H_i/J(H_i)$, $i = k+1, \ldots, n$, являются простыми R-модулями. Поэтому фактормодуль $M/J(M)$ — полупростой левый R-модуль и $\mathrm{hdim}(M) = \mathrm{length}(M/J(M)) = n - k < n$. Пришли к противоречию с условием (c).

Следовательно, $k = 0$ и H_i для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ — локальные левые R-модули. Поэтому существуют ненулевые элементы $h_i \in H_i$, для которых $H_i = Rh_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Так как последовательность (2) точна, то $M = \sum_{i=1}^n Ru_i + \mathrm{Ker}(g)$, где $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — прообразы элементов h_i, т. е. $h_i = g(u_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку $\mathrm{Ker}(g) \ll M$, то $M = \sum_{i=1}^n Ru_i$ и левый R-модуль M конечно порожден. □

Следствие 2.2. Проективный левый R-модуль P, кольцо эндоморфизмов которого полулокально, является конечно порожденным тогда и только тогда, когда $\mathrm{hdim}(P) = \mathrm{hdim}(P/J(P))$.

Доказательство. Согласно теореме Такеучи имеем $\mathrm{hdim}\, P < \infty$ и следствие вытекает из предыдущей теоремы 2.1. □

Представляют большой интерес такие R-модули M, для которых $\mathrm{hdim}_R(M) = \infty$ и $\mathrm{Hom}_R(M, M)$ — полулокальное кольцо, а также проективные R-модули P, для которых $\mathrm{hdim}_R(P) \neq \mathrm{hdim}_R(P/J(P))$ и $\mathrm{hdim}_R(P/J(P)) = 1$. Далее приведены примеры таких модулей.

Пример 1 ([19], пример 10(2)). *Существуют циклические модули с бесконечной дуальной размерностью Голди, кольцо эндоморфизмов которых полулокально.*

Отметим, что этот пример в [19] приведен лишь с незначительными комментариями, поэтому дадим его подробное обоснование.

Рассмотрим коммутативную полулокальную область целостности R и коммутативное кольцо многочленов $S = R[X]$ с коэффицентами из R. Кольцо S, рассматриваемое как левый R-модуль, будем обозначать через ${}_RS$. Очевидно, кольцо R — подмодуль R-модуля S, и можно рассмотреть фактормодуль ${}_RS/R$. Если $s \in S$ и $s = r_0 + r_1x + \cdots + r_nx^n$, то $\overline{s} \in {}_RS/R$ и $\overline{s} = r_1\overline{x} + \cdots + r_n\overline{x}^n$, где $\overline{x}^n = x^n + R$, $n = 1, 2, \ldots$, S — свободный левый R-модуль с базисом $\{x^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, и $\overline{S} = {}_RS/R$ — свободный левый R-модуль с базисом $\{\overline{x}^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Так как множество $\{\overline{x}^n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, — R-базис модуля $\overline{S}$, то отображение $\varphi_{x^m} : \overline{S} \to \overline{S}$, определенное по правилу $\varphi_{x^m}(\overline{x}^n) = \overline{x}^{(n+m)}$, $n = 1, 2, \ldots$, дает R-гомоморфизм модуля $\overline{S}$ в себя. Тогда отображение $\sum\limits_{m=0}^{t} r_m^*\varphi_{x^m} : \overline{S} \to \overline{S}$, определенное по правилу $\Big(\sum\limits_{m=0}^{t} r_m^*\varphi_{x^m}\Big)(\overline{x}^n) = \sum\limits_{m=0}^{t} r_m^*\overline{x}^{(n+m)}$, есть R-гомоморфизм. Положим $\overline{s}s^* = \Big(\sum\limits_{m=0}^{t} r_m^*\varphi_{x^m}\Big)(\overline{s})$ для любого $\overline{s} \in \overline{S}$, где $s^* = \sum\limits_{m=0}^{t} r_m^*x^m$, $s^* \in S$.

Таким образом, R-модуль $\overline{S}$ можно рассматривать как S-модуль и отображение $\varphi_{s^*} : \overline{S} \to \overline{S}$, $\varphi_{s^*}(\overline{s}) = \overline{s}s^*$ для любого $\overline{s} \in \overline{S}$, есть R-гомоморфизм.

Обозначим через M абелеву группу всех R-гомоморфизмов $f : {}_RS \to {}_RS/R$, т.е. $M = \mathrm{Hom}_R({}_RS, ({}_RS/R)) = \{f : {}_RS \to {}_RS/R\}$.

Так как для любых $s^*, s \in S$ и $f \in M$ имеем $f(s^* \cdot s) \in {}_RS/R$, то можно определить отображение $s^* \cdot f : S \to {}_RS/R$ по правилу $(s^* \cdot f)(s) = f(s^* \cdot s)$. Очевидно, $s^* \cdot f \in M$, а также $(s_1^* + s_2^*)f = s_1^*f + s_2^*f$ и $s^*(f_1 + f_2) = s^*f_1 + s^*f_2$ для любых $s_1^*, s_2^* \in S$ и $f_1, f_2 \in M$. Поэтому M можно рассматривать как левый S-модуль. Более того, M является (S, R)-модулем (напр., [22], гл. 2, § 3).

Рассмотрим (S, R)-подмодуль $N = \{f \in M \mid f(R) = 0\}$ (S, R)-модуля M.

Обозначим через $\left(\begin{smallmatrix} s & f \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)$ $(2,2)$-матрицу, где $s \in S$, $f \in M$, $r \in R$, и пусть $T = \left(\begin{smallmatrix} S & M \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right) = \big\{\left(\begin{smallmatrix} s & f \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \mid s \in S,\ r \in R,\ f \in M\big\}$. T может рассматриваться как аддитивная группа с естественным сложением матриц. Определим произведение

$$\begin{pmatrix} s_1 & f_1 \\ 0 & r_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_2 & f_2 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1s_2 & s_1f_2 + f_1r_2 \\ 0 & r_1r_2 \end{pmatrix},$$

где $s_1f_2 : S \to {}_RS/R$, $(s_1f_2)(s) = f_2(s_1s)$, $f_1r_2 : S \to {}_RS/R$, $(f_1r_2)(s) = f_1(r_2s)$ для всех $s \in S$, $s_1f_2 \in M$, $f_1r_2 \in M$, а s_1s_2, r_1r_2 и sr_2 — произведения элементов кольца S. Легко видеть, что T является кольцом относительно введенных операций сложения и умножения. Рассмотрим $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ — правый идеал в T. Обозначим через I' идеализатор правого идеала I в кольце T ([23], гл. 0, § 0.4). Если $\left(\begin{smallmatrix} s & f \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in I'$, то $\left(\begin{smallmatrix} s & f \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right) \subseteq \left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, имеем

$$\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{f} \\ 0 & \widetilde{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s\widetilde{f} + f\widetilde{r} \\ 0 & r\widetilde{r} \end{pmatrix} \tag{3}$$

для любого $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \widetilde{f} \\ 0 & \widetilde{r} \end{smallmatrix}\right) \in I$ и $s\widetilde{f} + f\widetilde{r} \in N$, где $s \in S$, $f \in M$, а $r, \widetilde{r} \in R$.

Если в равенстве (3) $\widetilde{f} = 0$, $\widetilde{r} = 1$; $f\widetilde{r} \in N$, то $f(r^*) = 0$ для любого $r^* \in R$ и поэтому $f \in N$. Далее, если в (3) $\widetilde{r} = 0$, то $s\widetilde{f} \in N$ для любого $\widetilde{f} \in N$.

Учитывая, что S — свободный левый R-модуль с базисом $\{1, x, \ldots, x^i, \ldots\}$, построим R-гомоморфизм $\widetilde{f}_0 : S \to {}_RS/R$, полагая $\widetilde{f}_0(1) = 0$, $\widetilde{f}_0(x^i) = \overline{x}^i$, $i = 1, 2, \ldots$ Так как $\widetilde{f}_0$ является R-гомоморфизмом и $\widetilde{f}_0(R) = 0$, то $\widetilde{f}_0 \in N$. Если элемент $s \in S$ и $s \notin R$, то, очевидно, $\widetilde{f}_0(s) \neq 0$.

Пусть $\left(\begin{smallmatrix} s & f \\ 0 & r \end{smallmatrix}\right) \in I'$ и $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \tilde{f}_0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, тогда

$$\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{f}_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & s\widetilde{f}_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 & N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и $(s\widetilde{f}_0)(r) = 0$ для всех $r \in R$. По определению произведения $s\widetilde{f}_0$ имеем $(s\widetilde{f}_0)(r) = (\widetilde{f}_0)(sr) = 0$ и в случае $r = 1$ получим $\widetilde{f}_0(s) = 0$. По построению R-гомоморфизма $\widetilde{f}_0$ это возможно только в том случае, когда $s \in R$.

Имеем $I' = \left(\begin{smallmatrix} R & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ и по предложению 4.1 из ([23], гл. 0, § 0.4) $\mathrm{Hom}_T(T/I, T/I) \simeq I'/I \simeq R$. Следовательно, T/I — цикличный T-модуль, кольцо эндоморфизмов которого изоморфно полулокальному кольцу R. Так как S не является полулокальным кольцом, то ([1], следствие 3.2) S имеет бесконечную дуальную размерность Голди как правый S-модуль, т. е. $\mathrm{hdim}_S(S) = \infty$.

T/I имеет бесконечную дуальную размерность Голди как правый T-модуль. Действительно, рассмотрим в кольце T идеал $U_T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $S \cong \left(\begin{smallmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cong T/U_T$, и, таким образом, кольцо S изоморфно факторкольцу T/U_T. Обозначим этот изоморфизм через θ, т. е. $S \overset{\theta}{\cong} T/U_T$ и $s = \theta(\bar{t})$ для $\bar{t} \in T/U_T$. Можем рассматривать S как правый T-модуль, полагая $st = ss^*$, где $s^* = \theta(\bar{t})$ для $\bar{t} \in T/U_T$. Действительно, имеем $s(t_1+t_2) = s\theta(\overline{t_1+t_2}) = s\theta(\bar{t}_1+\bar{t}_2) = s(\theta(\bar{t}_1)+\theta(\bar{t}_2)) = s(s_1^*+s_2^*) = ss_1^* + ss_2^* = st_1 + st_2$ и $s(t_1t_2) = s\theta(\overline{t_1t_2}) = s\theta(\bar{t}_1\bar{t}_2) = s(\theta(\bar{t}_1)\theta(\bar{t}_2)) = s(s_1^*s_2^*) = (ss_1^*)s_2^* = (st_1)t_2$ для любого $s \in S$ и для любых t_1, t_2, содержащихся в T.

Очевидно, $ST = S$ и $KT = K$, если K — правый S-подмодуль S. Заметим, что если K' и K'' — S-подмодули S, то $K'T = K''T$ тогда и только тогда, когда $K' = K''$.

Будем говорить, что семейство $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ собственных подмодулей K_λ левого R-модуля M образует конезависимое семейство, если для всякого $\lambda \in \Lambda$ и любого конечного подмножества $J \subseteq \Lambda \setminus \{\lambda\}$ (т. е. $\lambda \notin J$) выполнено соотношение

$$K_\lambda + \bigcap_{j\in J} K_j = M.$$

Модуль M имеет конечную дуальную размерность Голди тогда и только тогда, когда каждое конезависимое семейство подмодулей модуля M конечно [19]. В этом случае существует максимальное конезависимое семейство и его мощность совпадает с дуальной размерностью Голди.

Поскольку $S = R[x]$ и ${}_SS$ не является полулокальным кольцом, то согласно следствию 3.2 из [1] имеем $\mathrm{hdim}_S(S) = \infty$. Поэтому существует конезависимое семейство $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $|\Lambda| = \infty$, собственных подмодулей ${}_SS$ такое, что для всякого $\lambda \in \Lambda$ и любого конечного подмножества $J \subseteq \Lambda \setminus \{\lambda\}$ выполняется

$$K_\lambda + \bigcap_{j\in J} K_j = {}_SS.$$

Тогда $K_\lambda T + \bigcap_{j\in J} K_jT = {}_SST$ для любого конечного подмножества $J \subseteq \Lambda \setminus \{\lambda\}$ и, следовательно, семейство $\{K_\lambda T\}_{\lambda\in\Lambda}$ собственных подмодулей правого T-модуля ST конезависимо и $\mathrm{hdim}_T(S_T) = \infty$, поскольку $ST = S$, а $K_\lambda T = K_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. В силу того, что $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & N \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$, $U_T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & M \\ 0 & R \end{smallmatrix}\right)$ и $I \subseteq U_T$, имеем $S_T \cong T/U_T \cong (T/I)/(U_T/I)$. По замечанию 1.4 из [1] это влечет $\mathrm{hdim}_T S_T = \mathrm{hdim}_T(T/U_T) \leq \mathrm{hdim}_T T/I$ и $\mathrm{hdim}_T(T/U_T) = \infty$. Итак, T-модуль T/I имеет полулокальное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{End}_T(T/I) = \mathrm{Hom}_T(T/I, T/I) \cong R$, но $\mathrm{hdim}_T(T/I) = \infty$.

Пример 2. *Существует проективный R-модуль P такой, что* $\mathrm{hdim}_R(P/J(P)) = 1$ *и* $\mathrm{hdim}_R(P) \neq 1$.

Рассмотрим кольцо R, построенное в [10]. Для полноты изложения приведем конструкцию этого кольца.

Пусть k — поле и $K = k\langle x, y \mid yx = 0\rangle$ — k-алгебра с двумя порождающими элементами x и y и одним определяющим соотношением $yx = 0$. Обозначим через $h\colon K \to k \times k$ гомоморфизм k-алгебр, определенный по правилу $h(x) = (1, 0)$ и $h(y) = (0, 1)$, где $k \times k$ — прямое произведение двух экземпляров поля k. Пусть $\mathrm{Mat}(K)$ и $\mathrm{Mat}(k\times k)$ обозначают множества всех квадратных матриц с элементами из K и $k\times k$ соответственно. Гомоморфизм h индуцирует отображение $\mathrm{Mat}(K)\to\mathrm{Mat}(k\times k)$, которое также будем обозначать через h. Пусть Σ — множество всех матриц $A\in\mathrm{Mat}(K)$, образ $h(A)$ которых обратим. Пусть $R=K\Sigma^{-1}$ — универсальное Σ-обращающее K-кольцо, т. е. если $\varphi\colon K\to S$ — гомоморфизм k-алгебр и для любого $A\in\Sigma$ $\varphi(A)$ — обратимая матрица над k-алгеброй S, то существует единственный гомоморфизм k-алгебр $\overline{\varphi}:K\Sigma^{-1}\to S$ такой, что диаграмма k-гомоморфизмов k-алгебр

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\lambda_\Sigma"'] & & S \\ & K\Sigma^{-1} \arrow[ur, "\varphi_\Sigma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, где кольцевой гомоморфизм $\lambda_\Sigma:K\to K\Sigma^{-1}$ такой, что образ каждой матрицы из Σ — обратимая матрица над $K\Sigma^{-1}$, универсален и определяется этим свойством ([23], теорема 7.2.1 или [10]).

Имеет место коммутативая диаграмма k-гомоморфизмов k-алгебр

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\lambda_\Sigma"'] & & k\times k \\ & R \arrow[ur, "h_\Sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Ядро гомоморфизма $h_\Sigma\colon R\to k\times k$ равно $J(R)$ ([24], следствие теоремы 3.1 или [25], теорема 4.1), следовательно, R — полулокальное кольцо. Пусть x_1 и y_1 обозначают образы элементов x и y соответственно в кольце R. Тогда $y_1x_1=0$. Заметим, что 1×1- матрица $x+y$ содержится в Σ, т. к. $h(x+y)=h(x)+h(y)=(1,1)$ — обратимый элемент в $k\times k$. Поэтому x_1+y_1 — обратимый элемент в кольце R. Положим $z=x_1+y_1$, тогда $zx_1=(x_1+y_1)x_1=zx_1^2$, $x_1=z^{-1}x_1^2$. Обозначим $a_m=z^{-m-1}x_1z^m$ для любого $m\geq 1$. Тогда $a_{m+1}a_m=z^{-m-2}x_1^2z^m=z^{-m-2}(x_1+y_1)x_1z^m=a_m$. По лемме 1 из [26] правый идеал $I=\sum_{m=1}^{\infty}a_mR$ кольца R проективен и $F=R/I$ — плоский правый R-модуль. В частности, $I/IJ(R)=I/I\cap J(R)$ ([27], лемма 19.18), поэтому $I/IJ(R)\cong I+J(R)/J(R)$. Так как $h(x)=(1,0)$, то $h_\Sigma(x_1)=(1,0)$ и $h_\Sigma(a_mR)=k\times 0$ для всех $m\geq 1$. Получаем $h_\Sigma(I)=k\times 0$. Гомоморфизм $h_\Sigma\colon R\to k\times k$ индуцирует изоморфизм k-алгебр $R/J(R)\cong k\times k$. Имеем $I/IJ(R)\cong I+J(R)/J(R)\cong h_\Sigma(I)=k\times 0$.

Так как фактормодуль $I/IJ(R)$ — простой R-модуль, и каждый простой модуль является неразложимым в сумму, то $\mathrm{hdim}_R(I/IJ(R))=1$.

Далее, если $\mathrm{hdim}_R(I)=1$, то существует точная последовательность

$$I\xrightarrow{g}H\longrightarrow 0,$$

где H — правый неразложимый в сумму R-модуль и $\mathrm{Ker}(g)\ll I$. По следствию 9.1.5 из ([20], с. 213) $g(I)=H$ и $g(J(I))=J(H)$. Заметим, что $H\neq J(H)$, т. к. иначе равенство $H=J(H)$ влечет $H=g(I)=g(J(I))=J(H)$ и $\mathrm{Ker}(g)+J(I)=I$. В силу того, что $\mathrm{Ker}(g)\ll I$, имеем $I=J(I)$, и по предложению 9.6.4 из ([20], с. 232) $I=0$. Приходим к противоречию. Итак, $H\neq J(H)$ и H— локальный R-модуль, поэтому $H=hR$ для некоторого $h\in H$ и $I=aR+\mathrm{Ker}(g)$, где $g(a)=h$. Поскольку $\mathrm{Ker}(g)\ll I$, то $I=aR$ цикличен, и приходим к противоречию, т. к. по [10] I не является конечно порожденным. Следовательно, $\mathrm{hdim}_R(I)\neq 1$ и $\mathrm{hdim}_R(I)\neq\mathrm{hdim}_R(I/J(I))$.

Литература

1. Lomp C. *On semilocal modules and rings* // Comm. Algebra. – 1999. – V. 27. – № 4. – P. 1921–1935.
2. Lazard D. *Liberte des gros modules projectifs* // J. Algebra. – 1974. – V. 31. – P. 437–451.
3. Zöschinger H. *Projektive Moduln mit endlich erzeugten Radikalfaktormodul* // Math. Ann. – 1981. – V. 255. – P. 199–206.

4. Сахаев И.И. *О конечной порожденности проективных модулей* // Изв. вузов. Математика. – 1977. – № 9. – С. 69–79.
5. Сахаев И.И. *О проективности конечно порожденных плоских модулей над полулокальными кольцами* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 2. – С. 152–162.
6. Сахаев И.И. *О группе* $K_0(AP^0)$ *для полулокальных колец* // Math. Nachrichten. – 1987. – Bd. 130. – S. 157–175.
7. Сахаев И.И. *О SBI-кольцах и гипотезе Лазара* // Math. Nachrichten. – 1989. – Bd. 144. – S. 87–98.
8. Сахаев И.И. *О поднятии конечной порожденности проективного модуля по модулю его радикала* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – С. 293–301.
9. Sakhaev I.I. *The finite generation of projective modules* // Algebra. Proc. Int. Conf. Krasnoyarsk, 1993. – de Gruyter, Berlin, 1996. – P. 209–216.
10. Герасимов В.Н., Сахаев И.И. *Контрпример к двум гипотезам о проективных модулях* // Сиб. матем. журн. – 1984. – Т. 25. – № 6. – С. 855–859.
11. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории.* Т. 2. – М.: Мир, 1979. – ??? с.
12. Sarath B., Varadarajan K. *Dual Goldie dimension.* II // Comm. Algebra. – 1979. – V. 7. – P. 1885–1899.
13. Grezeszcuk P., Puczyłowski E.R. *On Goldie and dual Goldie dimension* // J. Pure and Appl. Algebra. – 1984. – V. 31. – P. 47–54.
14. Hanna A., Shamsuddin A. *Dual Goldie dimension* // Rendiconti dell' Istitutio di Mathematica dell' Universita di Trieste. – 1992. – V. 24. – № 1–2. – P. 25–38.
15. Lomp C. *On dual Goldie dimension.* – Diplomarbeit, Heinrich Heine Universität, Düsseldorf, 1996.
16. Takeuchi T. *On cofinite-dimensional modules* // Hokkaido Math. J. – 1976. – V. 5. – P. 1–43.
17. Takeuchi T. *Coranks of a quasi-projective module and its endomorphism ring* // Glasgow Math. J. – 1994. – V. 36. – P. 381–383.
18. Varadarajan K. *Dual Goldie dimension* // Comm. Algebra. – 1979. – V. 7. – P. 565–610.
19. Herbera D., Shamsuddin A. *Modules with semi-local endomorphism ring* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 123. – P. 3593–3600.
20. Каш Ф. *Модули и кольца.* – М.: Мир, 1981. – 368 с.
21. Ware R. *Endomorphism rings of projective modules* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971.– V. 155. – P. 233-256.
22. Cartan H., Eilenberg S. *Homological algebra.* – Princeton, New York: Princeton Univ. Press, 1956.
23. Cohn P. *Free rings and their relations.* – 2-nd edition. – London.: Academic Press, 1985. – 588 p.
24. Cohn P.M. *Inversive localization in Noetherian rings* // Comm. Pure Appl. Math. – 1973. – V. 26. – P. 679–691.
25. Facchini A., Herbera D. K_0 *of a semilocal ring* // J. Algebra. – 2000. – V. 225. – P. 47–69.
26. Сахаев И.И. *Конечная порожденность проективных модулей над некоторыми кольцами* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 10. – С. 63–75.
27. Anderson F.W., Fuller K.R. *Rings and categories of modules.* – 2-nd edition. – New York.: Springer-Verlag, 1992.

Казанский государственный университет
Университет г. Порто (Португалия)

Поступила
27.03.2001