Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, № 7, с. 21–34 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0064*

В.И. ФИЛИППОВ

ОБ УСИЛЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ А.Н. КОЛМОГОРОВА О РЯДАХ ФУРЬЕ И СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Аннотация. Рассматриваются ряды Фурье суммируемых функций в более “широких”, чем L_1 классах, приводится усиление результатов А.Н. Колмогорова о сходимости рядов Фурье в более слабых, чем L_1, метриках. Точно описаны классы $\varphi(L)$, которым принадлежат сопряженные функции и там же сходятся их сопряженные ряды Фурье.

Ключевые слова: ряды Фурье, сопряженная функция, обобщенные классы Орлича, классы $\varphi(L)$.

УДК: 517.51 : 517.52

1. Сопряженная функция

В работе рассматривается сходимость рядов Фурье суммируемых функций и их сопряженных рядов в метриках более “слабых”, чем $L_1(-\pi,\pi)$. В работе А.Н. Колмогорова ([1], с. 23–28), а затем в работе Е. Титчмарша ([2]; см. также [3], с. 580) было доказано, что если функция f суммируема, то для любого $0 < p < 1$ функция $|\overline{f}|^p$, где $\overline{f}$ — сопряженная функция, суммируема и ряд Фурье функции f и сопряженный ряд сходятся в метрике $L_p(-\pi,\pi)$, $0 < p < 1$. Заметим, что $\bigcap\limits_{\{0<p<1\}} L_p \neq L_1$, т. е. все классы L_p, $0 < p < 1$, намного “шире”, чем L_1. И, например, для класса $\varphi_1(L), \varphi_1(t) \sim \frac{t}{\ln t}$, $t \to \infty$, теорема А.Н. Колмогорова [1] не дает ответа на вопрос о сходимости ряда Фурье в этом классе и о принадлежности сопряженной функции этому классу.

В данной работе рассматриваются промежуточные классы между $L_1(-\pi,\pi)$ и всеми $L_p(-\pi,\pi)$, $0 < p < 1$, приводится усиление результатов А.Н. Колмогорова о сходимости рядов Фурье в более слабых, чем L_1, метриках. Точно описаны классы $\varphi(L)$, к которым принадлежат сопряженные функции, и там же сходятся их сопряженные ряды Фурье, в тех же классах сходятся ряды Фурье от функций $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$.

Приведем основные понятия и определения.

Определение 1.1 ([3], с. 580)**.** Две функции $\psi(x)$ и $\xi(x)$ называются равноизмеримыми, если для любого y имеем

$$mE[\psi(x) > y] = mE[\xi(x) > y].$$

В дальнейшем будем рассматривать равноизмеримые функции на множестве $[0, 2\pi)$.

Поступила 25.07.2011

Определение 1.2. Если $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ есть ряд Фурье для функции $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -b_n \cos nx + a_n \sin nx$ называется сопряженным рядом.

Принято называть сопряженной с $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ функцию ([3], с. 519)

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt, \qquad (*)$$

где интеграл понимается как предел (если он существует) выражения

$$\lim_{\varepsilon\to+0} -\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt.$$

Как показал И.И. Привалов ([3], с. 519), последний интеграл имеет смысл почти всюду (п. в.) для любой $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$. Таким образом, значение интеграла в правой части выражения $(*)$ там, где он существует, и есть сопряженная функция $\overline{f}(x)$.

Пусть Φ — совокупность четных, конечных, неотрицательных, неубывающих на полупрямой $[0,\infty)$ функций φ таких, что $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$. Заметим, что мы доопределили функцию φ в ∞ значением ∞. Через $\varphi(L)$ ([4]; [5], с. 33) будем обозначать множество всех тех измеримых функций $f(x)$ на R с периодом 2π, для которых $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(f(t))dt < \infty$. Эти классы функций называются классами $\varphi(L)$ или обобщенными классами Орлича.

Будем говорить, что функция $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет Δ_2-условию, если существуют константы $K_1 \geq 1$ и $t_1 > 0$ такие, что $\varphi(2t) \leq K_1\varphi(t)$ для всех $|t| \geq t_1$ ([4]; [5], с. 52).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что для функции φ выполнены условия: $\varphi \in \Phi$, φ непрерывна на $[0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$, φ удовлетворяет Δ_2-условию ([4], [5], с. 33).

Пусть также, в дальнейшем, для φ выполнено условие: $\varphi(t) \leq |t|$ для всех $t \geq t_2 \geq 1$, т. е. $L_1(-\pi,\pi) \subset \varphi(L)$. Пусть $t_0 = 2\max\{t_1, t_2\}$.

Обозначим через Φ_0 класс функций φ, удовлетворяющий условиям, приведенным выше, а также условию $\varphi(t) \leq |t|$ для всех $t \geq t_0$.

Заметим, что если φ удовлетворяет Δ_2-условию, то класс $\varphi(L)$ линеен ([4]; [5], с. 53), а если $\varphi(t) = |t|^p$, $0 < p < \infty$, то $\varphi(L) = L_p$.

Если f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину $\rho_\varphi(f,g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(f-g)dt$ условно назовем φ-расстоянием. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\varphi(L)$ называется сходящейся по φ-расстоянию к функции $f \in \varphi(L)$ или сходящейся в $\varphi(L)$ (см. [4]), если $(f - f_n) \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in N$, и $\lim_{n\to\infty}\rho_\varphi(f - f_n) = 0$.

Лемма 1.1 ([1]; [3], с. 573)**.** *Существует абсолютная константа C такая, что если $\overline{f}(x)$ сопряженная к $f(x)$ и $E_N = [|\overline{f}(x)| > N] = \{x \in (-\pi,\pi] : |\overline{f}(x)| > N\}$, то*

$$mE_N \leq \frac{C}{N}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx.$$

Лемма 1.2 ([3], с. 580)**.** *Для любой $f(x)$ измеримой на некотором $[a,b]$, найдется невозрастающая на $[a,b]$ функция $g(x)$, равноизмеримая с $f(x)$.*

Теорема A ([3], с. 580)**.** *Если $f(x)$ суммируема, то для любого $0 < p < 1$ функция $|\overline{f}(x)|^p$ суммируема и*

$$\int_0^{2\pi} |\overline{f}(x)|^p dx \le A_p\biggl(\int_0^{2\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

где A_p зависит только от p.

Пусть

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ряд Фурье функции $f(x) \in L_1(0, 2\pi)$. Тогда

$$\sigma(\overline{f}) = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \cos kx + a_k \sin kx.$$

Положим

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad \overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} -b_k \cos kx + a_k \sin kx.$$

Теорема B ([3], с. 595–597)**.** *Если $f(x) \in L_1(-\pi, \pi)$ и $0 < p < 1$, то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x)|^p dx \le B_p\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\overline{S}_n(x)|^p dx \le B_p\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\overline{S}^*_n(x) - \overline{f}(x)|^p dx \le 2A_p\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\overline{S}^*_n(x)|^p dx \le 3A_p\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S^*_n(x)|^p dx \le 2A_p\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx\biggr)^p,$$

где A_p, B_p — константы, зависящие только от p,

$$S^*_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt,$$

$$\overline{S}^*_n(x) = \overline{f}(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\cos nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt = \overline{f}(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\cos nt\, dt,$$

где последний интеграл понимается как в выражении $(*)$.

Теорема U ([4])**.** *Если $\psi \in \Phi$ и $\varphi \in \Phi$, то чтобы имело место равенство $\psi(L) = \varphi(L)$, необходимо и достаточно выполнения соотношений*

$$0 < \varliminf_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \le \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} < \infty.$$

Учитывая, что если $f = \mathrm{const}$ п. в., то $\overline{f} = 0$ п. в., будем рассматривать функции не эквивалентные нулю. Пусть $D = C\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx$, где C — абсолютная константа из леммы 1.1.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi \in \Phi_0$, $\int\limits_0^{1/t_0} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx < \infty$. *Пусть* $\psi(t) = \frac{\varphi(t_0)|t|^{\frac{1}{2}}}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}$, *если* $0 \le t \le t_0$ *и* $\psi(t) = \varphi(t)$, *если* $|t| > t_0$. *Тогда для всякой суммируемой* $f(x) \in L(0, 2\pi)$, *функция* $\psi(\overline{f}(x))$ *также суммируема и*

$$\int_0^{2\pi} \psi(\overline{f}(x))dx \le c_1(\varphi)D + c_2(\varphi)D^{\frac{1}{2}} = C_1^1(\varphi)\int_0^{2\pi} |f(x)|dx + C_2^1(\varphi)\left(\int_0^{2\pi} |f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c_1 = \int\limits_0^{1/t_0} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx$, $c_2 = \frac{\varphi(t_0)2(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}$.

Доказательство. В силу леммы 1.2 на $[0, 2\pi)$ существует невозрастающая функция $g(x)$, равноизмеримая с $|\overline{f}(x)|$.

Из доказательства леммы 1.2 следует $g(x) \le \frac{D}{x}$. Но тогда $\psi(g(x)) \le \psi(\frac{D}{x})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{2\pi} \psi(\overline{f}(x))dx = \int\limits_0^{2\pi} \psi\left(g(x)\right)dx \le \int_0^{2\pi} \psi\left(\frac{D}{x}\right)dx \le \\
\le \int\limits_{\{x:|\frac{D}{x}|\le t_0\}\cap(0,2\pi)} \psi\left(\frac{D}{x}\right)dx + \int\limits_{\{x:|\frac{D}{x}|> t_0\}\cap(0,2\pi)} \psi\left(\frac{D}{x}\right)dx \le \\
\le \frac{\varphi(t_0)}{(t_0)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_{\{x:|\frac{D}{x}|\le t_0\}\cap(0,2\pi)} \left|\frac{D}{x}\right|^{\frac{1}{2}} dx + \int\limits_{\{x:|\frac{D}{x}|> t_0\}\cap(0,2\pi)} \varphi\left(\frac{D}{x}\right)dx \le \\
\le \frac{\varphi(t_0)}{(t_0)^{\frac{1}{2}}} \int\limits_0^{2\pi} \left|\frac{D}{x}\right|^{\frac{1}{2}} dx + \int\limits_0^{D/t_0} \varphi\left(\frac{D}{x}\right)dx \le \frac{\varphi(t_0)}{(t_0)^{\frac{1}{2}}}(2\pi D)^{\frac{1}{2}}\,2 + D\int\limits_0^{1/t_0} \varphi\left(\frac{1}{z}\right)dz = \\
= c_1(\varphi)D + c_2(\varphi)D^{\frac{1}{2}} = C_1^1(\varphi)\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx + C_2^1(\varphi)\left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi \in \Phi_0$, $\int\limits_0^{1/t_0} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)dx < \infty$. *Тогда для всякой суммируемой* $f(x)$ *функция* $\varphi(\overline{f}(x))$ *также суммируема.*

Доказательство. Так как функции $\psi(t)$ (функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1) и $\varphi(t)$ эквивалентны при $t \to \infty$, то по теореме U классы $\psi(L)$ и $\varphi(L)$ совпадают. А тогда из теоремы 1.1 вытекает суммируемость функции $\varphi(\overline{f}(x))$. $\square$

2. Сходимость рядов Фурье и сопряженных рядов

Покажем, что если $f \in L_1(0, 2\pi)$, то ряды $\sigma(f)$ и $\sigma(\overline{f})$ сходятся в $\varphi(L)$.

Лемма 2.1. *Существует такая константа* $K < \infty$, *зависящая только от* $\varphi \in \Phi_0$, *что для любых* $u(x), v(x) \in \psi(L)$, *где* $\psi(t)$ *определена в теореме* 1.1, *справедлива оценка*

$$\psi(u + v) \le K\big(\psi(u) + \psi(v) + |u|^{\frac{1}{2}} + |v|^{\frac{1}{2}}\big).$$

Доказательство. Учитывая, что φ удовлетворяет Δ_2-условию и определение функции $\psi(t)$, при $\max\{|u|,|v|\} > t_0$ получим

$$\psi(u+v) \leq \psi(2\max\{|u|,|v|\}) \leq \varphi(2\max\{|u|,|v|\}) \leq K_1\varphi(\max\{|u|,|v|\}) \leq$$
$$\leq K_1\psi(\max\{|u|,|v|\}) \leq K_1(\psi(u)+\psi(v)).$$

Если же $\max\{|u|,|v|\} \leq t_0$, то либо 1) $\max\{|u|,|v|\} \leq \frac{t_0}{2}$, 2) либо $\frac{t_0}{2} < \max\{|u|,|v|\} \leq t_0$. В первом случае имеем $2\max\{|u|,|v|\} \leq t_0$. Используя определение функции ψ, получаем

$$\psi(u+v) \leq \psi\left(2\max\{|u|,|v|\}\right) \leq \frac{\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}\left(2\max\{|u|,|v|\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}\left(|u|^{\frac{1}{2}}+|v|^{\frac{1}{2}}\right).$$

Во втором случае имеем $2\max\{|u|,|v|\} > t_0$ и снова используя определение функции ψ, получаем

$$\psi(u+v) \leq \psi(2\max\{|u|,|v|\}) \leq \varphi(2\max\{|u|,|v|\}) \leq K_1\varphi(\max\{|u|,|v|\}) \leq$$
$$\leq K_1\varphi(t_0)\frac{(\max\{|u|,|v|\})^{\frac{1}{2}}}{(\max\{|u|,|v|\})^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{K_1\varphi(t_0)}{\sqrt{t_0/2}}\left(\max\{|u|,|v|\}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{2}K_1\varphi(t_0)}{\sqrt{t_0}}\big(|u|^{\frac{1}{2}}+|v|^{\frac{1}{2}}\big).$$

Следовательно, учитывая оценку и при $\max\{|u|,|v|\} > t_0$, имеем

$$\psi(u+v) \leq \frac{\sqrt{2}K_1\varphi(t_0)}{\sqrt{t_0}}\big(|u|^{\frac{1}{2}}+|v|^{\frac{1}{2}}\big) + K_1\left(\psi(u)+\psi(v)\right).$$

Таким образом,

$$\psi(u+v) \leq K\big(\psi(u)+\psi(v)+|u|^{\frac{1}{2}}+|v|^{\frac{1}{2}}\big),$$

где $K = \max\big\{K_1, \frac{\sqrt{2}K_1\varphi(t_0)}{\sqrt{t_0}}\big\}$, для любых $u(x), v(x) \in \psi(L)$. □

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in \Phi_0$, $\int\limits_0^{1/t_0} \varphi\big(\frac{1}{x}\big)dx < \infty$. *Пусть* $\psi(t) = \frac{\varphi(t_0)|t|^{\frac{1}{2}}}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}$, *если* $0 \leq t \leq t_0$ *и* $\psi(t) = \varphi(t)$, *если* $|t| > t_0$. *Тогда для всякой суммируемой функции* $f(x) \in L(-\pi,\pi)$ *выполняются соотношения*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(S_n(x))dx \leq L_3\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} + L_4\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt + L_5\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{S}_n(x)\big)dx \leq E_1\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} + E_2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dx,$$

где величины L_3, L_4, L_5, E_1, E_2 *не зависят от* f *и* n.

Доказательство. Сначала сделаем оценку для функции

$$S_n^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt, \tag{2.1}$$

а затем перейдем к $S_n(x)$, пользуясь тем, что

$$\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\sin nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\cos nt. \tag{2.2}$$

Так как $\sin nt = \sin n(t+x)\cos nx - \cos n(t+x)\sin nx$, то, подставляя это выражение в (2.1), получим

$$S_n^* = \cos nx \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin n(t+x)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt - \sin nx \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\cos n(t+x)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt.$$

Полагая $f_1(x) = f(x)\sin nx$, $f_2(x) = f(x)\cos nx$, из формулы, определяющей сопряженную функцию, видим, что $S_n^*(x) = -\cos nx\overline{f}_1(x) + \sin nx\overline{f}_2(x)$, и, следовательно,

$$\left|S_n^*(x)\right| \le \left|\overline{f}_1(x)\right| + \left|\overline{f}_2(x)\right|. \tag{2.3}$$

Применяя лемму 2.1 к сумме $|\overline{f}_1| + |\overline{f}_2|$, получим

$$\psi\big(|\overline{f}_1| + |\overline{f}_2|\big) \le K\big(\psi(\overline{f}_1) + \psi(\overline{f}_2) + |\overline{f}_1|^{\frac{1}{2}} + |\overline{f}_2|^{\frac{1}{2}}\big). \tag{2.4}$$

Тогда для (2.3) выполнено неравенство

$$\psi\left(S_n^*(x)\right) \le K\big(\psi(\overline{f}_1) + \psi(\overline{f}_2) + |\overline{f}_1|^{\frac{1}{2}} + |\overline{f}_2|^{\frac{1}{2}}\big).$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(S_n^*(x)\right)dx \le K\bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\overline{f}_1)dx + \int_{-\pi}^{\pi}\psi(\overline{f}_2)dx + \int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_1|^{\frac{1}{2}}dx + \int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_2|^{\frac{1}{2}}dx\bigg). \tag{2.5}$$

Так как по теореме A

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_i|^{\frac{1}{2}}dx \le A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_i|dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1,2), \tag{2.6}$$

то из определения f_1, f_2 и (2.6) вытекает оценка

$$\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_i|^{\frac{1}{2}}dx \le A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1,2), \tag{2.7}$$

где $A_{\frac{1}{2}}$ — абсолютная константа.

Используя теорему 1.1, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\overline{f}_i)dx \le C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f_i(x)|dx + C_2^1(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f_i|dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx + C_2^1(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad (i=1,2). \tag{2.8}$$

Таким образом, из (2.5) и (2.7) в силу (2.8) получим

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(S_n^*(x))dx \le K\Bigg(2C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx + 2C_2^1(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ 2A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg) \le L_1\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx + L_2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

где L_1, L_2 не зависят от f и n. Так как $S_n(x) = S_n^*(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos nt\,dt$ согласно (2.2), то

$$|S_n(x)| \le |S_n^*(x)| + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

Из теоремы 1.1 и оценки (2.3) следует $S_n^*(x) \in \psi(L)$. Поэтому, используя лемму 2.1, имеем

$$\psi(S_n(x)) \le K\biggl(\psi(S_n^*(x)) + \psi\biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr) + |S_n^*(x)|^{\frac{1}{2}} + \biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}}\biggr).$$

И, следовательно, из (2.9) и теоремы В вытекает

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(S_n(t))dt \le K\biggl(L_2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}} + L_1\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt + 2\pi\psi\biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr) +$$

$$+ 2A_{\frac{1}{2}}\biggl(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}} + 2\pi\biggl(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}}\biggr) \le$$

$$\le L_3\biggl(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}} + L_4\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt + L_5\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right), \quad (2.10)$$

где L_3, L_4, L_5 не зависят от f и n, и это справедливо для любой $f \in L_1(-\pi,\pi)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы.

Оценим теперь $\psi(\overline{S}_n(x))$. Запишем

$$\overline{S}_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{(1-\cos nt)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nt\,dt =$$

$$= \overline{S}_n^*(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sin nt\,dt. \quad (2.11)$$

Из определения $\overline{S}_n^*(x)$, как первого члена правой части формулы (2.11), следует

$$\overline{S}_n^*(x) - \overline{f}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\cos nt}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt.$$

Так как $\cos nt = \cos n(t+x)\cos nx + \sin n(t+x)\sin nx$, используя прежние обозначения, запишем

$$\overline{S}_n^*(x) - \overline{f}(x) = \cos nx\overline{f}_2(x) + \sin nx\overline{f}_1(x).$$

Следовательно, $|\overline{S}_n^*(x) - \overline{f}(x)| \le |\overline{f}_1(x)| + |\overline{f}_2(x)|$. Используя лемму 2.1, получим

$$\psi\bigl(\overline{S}_n^*(x) - \overline{f}(x)\bigr) \le K\bigl(\psi(\overline{f}_1(x)) + \psi(\overline{f}_2(x)) + |\overline{f}_1(x)|^{\frac{1}{2}} + |\overline{f}_2(x)|^{\frac{1}{2}}\bigr).$$

И, следовательно, из теоремы 1.1, оценок (2.6) и (2.8) вытекает

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\bigl(\overline{S}_n^*(x) - \overline{f}(x)\bigr)dx \le K\biggl(\int_{-\pi}^{\pi}\psi(\overline{f}_1(x))dx + \int_{-\pi}^{\pi}\psi(\overline{f}_2(x))dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_1(x)|^{\frac{1}{2}}dx + \int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}_2(x)|^{\frac{1}{2}}dx\biggr) \le K\biggl(2C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt +$$

$$+ 2C_2^1(\varphi)\biggl(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}} + 2A_{\frac{1}{2}}\biggl(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\biggr)^{\frac{1}{2}}\biggr) \le$$

$$\le P_1\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt + P_2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.12)$$

где P_1, P_2 не зависят от f и n. С другой стороны,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{f}(t)\big)dt \le C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt + C_2^1(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.13}$$

Следовательно, из леммы 2.1, теорем A, B, определения функции $\psi(t)$ и оценок (2.12) и (2.13) имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{S}_n^*(x)\big)dx \le \int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{S}_n^*(x)-\overline{f}(x)+\overline{f}(x)\big)dx \le K\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(\overline{S}_n^*(x)-\overline{f}(x)\right)dx+$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{f}(x)\big)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\overline{S}_n^*(x)-\overline{f}(x)\right|^{\frac{1}{2}}dx+\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{f}(x)|^{\frac{1}{2}}dx\Bigg)\le$$
$$\le K\Bigg(2A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+C_1^1(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt+C_2^1(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+P_2\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+P_1\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\Bigg)=B_1\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+B_2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt.$$

И, следовательно, используя (2.11), предыдущую оценку, теорему B, определение функции ψ и условие $\varphi(t)\le|t|$ при $|t|>t_0$, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{S}_n(x)\big)dx \le K\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{S}_n^*(x)\big)dx+\int_{-\pi}^{\pi}|\overline{S}_n^*(x)|^{\frac{1}{2}}dx+$$
$$+\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\sin ntdt\right)dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x+t)\sin ntdt\right|^{\frac{1}{2}}dx\Bigg)\le$$
$$\le K\Bigg(B_1\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+B_2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt+3A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+2\pi\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)+$$
$$+(2\pi)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\le\big(KB_1+K3A_{\frac{1}{2}}+K(2\pi)^{\frac{1}{2}}\big)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+KB_2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt+$$
$$+2\pi K\Bigg(\frac{\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\Bigg)\le E_1\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt\right)^{\frac{1}{2}}+E_2\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt,$$

где E_1, E_2 не зависят от f и n. □

Рассмотрим теперь сходимость двух сопряженных рядов в классе $\varphi(L)$.

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi\in\Phi_0$, $\int\limits_0^{1/t_0}\varphi\big(\frac{1}{x}\big)dx<\infty$. *Пусть* $\psi(t)=\frac{\varphi(t_0)|t|^{\frac{1}{2}}}{|t_0|^{\frac{1}{2}}}$, *если* $0\le t\le t_0$ *и* $\psi(t)=\varphi(t)$, *если* $t>t_0$. *Тогда для всякой суммируемой функции* $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ *выполняются соотношения*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\left(f(x)-S_n(x)\right)dx=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi\big(\overline{f}(x)-\overline{S}_n(x)\big)dx=0.$$

Доказательство. Если $f \in L_1(-\pi,\pi)$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi\left(f(x)\right)dx \le \int\limits_{\{x:|f(x)|\le t_0\}\cap(-\pi,\pi)} \psi(f(x))dx + \int\limits_{\{x:|f(x)|>t_0\}\cap(-\pi,\pi)} \varphi(f(x))dx \le$$
$$\le \frac{\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac12}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^{\frac12} dt + \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем такой тригонометрический полином $T(x)$, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - T(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Положим $f(x) = T(x) + R(x)$. Следовательно, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx < \varepsilon$.

Исходя из того, что при n превосходящем порядок полинома $T(x)$ имеем $S_n(x, f - T) = S_n(x, f) - T(x)$, при n достаточно большом получаем

$$|f - S_n(x,f)| = |f - T + T - S_n(x,f)| \le |f - T| + |S_n(T - f)| = |R| + |S_n(x,R)|. \qquad (2.14)$$

Следовательно, из леммы 2.1, (2.10), свойства функции $\psi(t)$, теоремы B и неравенства Гёльдера для функции $|R(x)|^{\frac12}$ вытекает

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(f - S_n(x,f)\right)dx \le K\Bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \psi(R)dx + \int_{-\pi}^{\pi} |R|^{\frac12}dx +$$
$$+ \int_{-\pi}^{\pi} \psi(S_n(x,R))dx + \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x,R)|^{\frac12}dx\Bigg) \le$$
$$\le K\Bigg(\frac{\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac12}} \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^{\frac12}dx + \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx + \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|^{\frac12}dx + L_3\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx\right)^{\frac12} +$$
$$+ L_4 \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx + L_5\psi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx\right) + B_{\frac12}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|dx\right)^{\frac12}\Bigg) \le$$
$$\le K\left(\left(\frac{\varphi(t_0)}{|t_0|^{\frac12}} + 1\right)(2\pi\varepsilon)^{\frac12} + \varepsilon(1 + L_4) + L_3(\varepsilon)^{\frac12} + B_{\frac12}\varepsilon^{\frac12} + L_5\psi\left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)\right),$$

где $B_{\frac12}$ — константа из теоремы B. Так как ε произвольно, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(f(x) - S_n(x,f)\right)dx = 0.$$

Докажем вторую часть теоремы. Заметим, что для того же тригонометрического полинома $T(x)$ и при таком же n аналогично (2.14) можно записать

$$|\overline{f}(x) - \overline{S}_n(x,f)| \le |\overline{f} - \overline{T}| + |\overline{S}_n(T - f)| = |\overline{R}| + |\overline{S}_n(x,R)|.$$

Отсюда, используя оценки из предыдущих теорем, имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(\overline{f}(x) - \overline{S}_n(x,f)\right) dx \le K\biggl(\int_{-\pi}^{\pi} \psi\left(\overline{R}(x)\right) dx +$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi} \psi\bigl(\overline{S}_n(R)\bigr) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left|\overline{R}(x)\right|^{\frac{1}{2}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left|\overline{S}_n(x,R)\right|^{\frac{1}{2}} dx\biggr) \le$$

$$\le K\biggl(C_1^1(\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|\, dx + C_1^2(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}} + E_1\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ E_2 \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|\, dx + A_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}} + B_{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}}\biggr) \le$$

$$\le U_1\left(\int_{-\pi}^{\pi} |R(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}} + U_2 \int_{-\pi}^{\pi} |R(x)|\, dx \le U_1 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + U_2 \varepsilon,$$

где U_1, U_2 не зависят от f и n. Получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \psi\bigl(\overline{f} - \overline{S}_n(x)\bigr) dx = 0$. □

Теорема 2.3. *Пусть $\varphi \in \Phi_0$, $\int\limits_0^{1/t_0} \varphi\bigl(\frac{1}{x}\bigr) dx < \infty$. Тогда для всякой суммируемой функции $f(x) \in L_1(-\pi,\pi)$ выполняются соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(f(x) - S_n(x)\right) dx = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\bigl(\overline{f}(x) - \overline{S}_n(x)\bigr) dx = 0.$$

Доказательство. Так как функции $\psi(t)$ (функция $\psi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2) и $\varphi(t)$ эквивалентны (см. теорему U), то и классы $\psi(L)$ и $\varphi(t)$ эквивалентны и сходимости в классах $\psi(L)$ и $\varphi(L)$ эквивалентны (см. [4]; [5], с. 54–55). □

3. Контрпримеры

Приведем теоремы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема C ([3], с. 95)**.** *Если $a_n \downarrow 0$, то ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$$

сходится всюду, кроме, быть может, точек $x = 0 \pmod{2\pi}$; при любом $\delta > 0$ на $\delta \le x \le 2\pi - \delta$ он сходится равномерно.

Если $b_n \downarrow 0$, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum b_n \sin nx$$

сходится всюду; при любом $\delta > 0$ на $\delta \le x \le 2\pi - \delta$ он сходится равномерно.

Теорема D ([3], с. 100)**.** *Если $a_n \downarrow 0$ и последовательность $\{a_n\}$ выпукла, то ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos jx$$

сходится всюду, кроме, быть может, $x = 0 \pmod{2\pi}$, *к неотрицательной суммируемой функции* $f(x)$ *и является рядом Фурье от этой функции.*

Теорема E ([6]; [3], с. 668). *Если* $a(x)$ *— выпуклая функция,* $a(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$, $xa(x) \uparrow$, $a_n = a(n)$, *то*

$$\overline{f}(x) \sim \frac{1}{x} a\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{при} \quad x \to 0,$$

где $\overline{f}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$.

Из теоремы D следует, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ сходится к суммируемой функции $f(x)$ и является ее рядом Фурье. В то же время ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ есть сопряженный ряд и сходится к несуммируемой функции ([3], с. 123).

Обозначим $\underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{k} x = \ln_k x$ $(\ln_1 x = \ln x)$ и учтем, что

$$(\ln_k x)' = [\ln_{k-1} x \cdot \ln_{k-2} x \cdots \ln x \cdot x]^{-1},$$

$$(\ln_k x)'' = [\ln(\ln_k x)']' \cdot (\ln_k x)' = -[(\ln_k x)' + (\ln_{k-1} x)' + \cdots + (\ln_2 x)' + (\ln x)'](\ln_k x)' < 0$$

при больших значениях x. Тогда вторая производная функции $a(x) = (\ln_k x)^{-1/2}$ будет положительной при $x > x_0$ с большим значением x_0, так как $2a'(x) = -a^3(x)(\ln_k x)'$ и $4a''(x) = 3a^5(x)[(\ln_k x)']^2 - 2a^3(x)(\ln_k x)'' > 0$.

Таким образом, функция $a(x)$ выпукла при $x > x_0$, а, значит, при $n > n_0 > x_0$ выпукла и последовательность

$$a_n = \frac{1}{\left(\ln_k n\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Воспользуемся обозначениями $\left|\ln_k |t|\right| = \big|\underbrace{\ln|\ln|\ldots\ln}_{k}|t|\big|\ldots\big|$ и $\exp_k = \underbrace{\exp\ldots\exp}_{k}$, $\exp = e$, $\exp\exp = e^e$ и т. д.

Теорема 3.1. *Пусть* $\varphi \in \Phi_0$, $p > 0$ *и при* $t \to \infty$

$$\varphi_{p,k}(t) \sim \frac{|t|}{\left|\ln_1 |t|\right| \cdot \left|\ln_2 |t|\right| \cdot \ldots \cdot \left(\left|\ln_k |t|\right|\right)^p}.$$

Тогда функция

$$\overline{f}(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sin nx}{\left(\ln_k n\right)^{\frac{1}{2}}},$$

где $n_0 \geq \exp_k$, *удовлетворяет следующим соотношениям: при* $p > \frac{1}{2}$ *функция* $\overline{f}(x) \in \varphi_{p,k}(L)$, *а при* $p \leq \frac{1}{2}$ *имеем* $\overline{f}(x) \notin \varphi_{p,k}(L)$.

Доказательство. По теореме D функция

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\cos nx}{\left(\ln_k n\right)^{\frac{1}{2}}}$$

суммируема, из теоремы E следует, что при $x \to 2\pi l$

$$\overline{f}(x) \sim \frac{1}{|x-2\pi l|\big(\big|\ln_k|x-2\pi l|\big|\big)^{\frac{1}{2}}}, \quad l \in Z,$$

а в остальных точках по теореме C функция $\overline{f}(x)$ непрерывна. Поэтому принадлежность функции $\overline{f}(x)$ к классу $\varphi(L)$ зависит от ее поведения, в частности, в окрестности точки $x=0$.

Пусть $\delta = (\exp_{3k})^{-1}$ и $I = \int\limits_0^\delta \frac{dx}{M_1(x)}$, где

$$M_1(x) = x\big(|\ln_k x|\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \left|\ln \frac{1}{\big|x\big(|\ln_k x|\big)^{\frac{1}{2}}\big|}\right| \left|\ln\left|\ln \frac{1}{\big|x\big(|\ln_k x|\big)^{\frac{1}{2}}\big|}\right|\right| \cdots$$
$$\cdots \left(\left|\ln_k \big(x(|\ln_k x|)^{-1/2}\big)\right| \ldots \right|\Big)^p.$$

Сделаем замену $u = \ln|x|$, получим $I = \int\limits_{-\infty}^{\ln\delta} \frac{du}{M_2(u)}$, где

$$M_2(u) = \big(\big|\ln_{k-1}|u|\big|\big)^{\frac{1}{2}} \cdot \big(|u| - \tfrac{1}{2}\big|\ln_k|u|\big|\big) \times$$
$$\times \big(\big|\ln\big(|u| - \tfrac{1}{2}\big||\ln_k|u|\big|\big)\big) \cdots \big(\ln_{k-1}\big(|u| - \tfrac{1}{2}\big|\ln_k|u|\big|\big)\big)^p.$$

Так как подинтегральная функция $M_2(u)$ четная, положительная и все кратные логарифмы с коэффициентом $1/2$ в ее представлении положительны на рассматриваемом множестве, то учитывая, что при $|u| > -\ln\delta$ все указанные логарифмы меньше $\frac{1}{2}|u|$, имеем $I = \int\limits_{-\ln\delta}^{+\infty} \frac{du}{M_2(u)}$ и

$$I \le \int\limits_{-\ln\delta}^{+\infty} \frac{du}{\frac{u}{2} \cdot \ln\frac{u}{2} \cdot \ln_2\frac{u}{2} \cdots \big(\ln_{k-2}\frac{u}{2}\big) \cdot \big(\ln_{k-1}\frac{u}{2}\big)^{p+\frac{1}{2}}} \le 2\int_1^{+\infty} \frac{dz}{z^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{2z^{-p+\frac{1}{2}}}{-p+\frac{1}{2}}\bigg|_1^\infty.$$

С другой стороны,

$$I \ge \int_{-\ln\delta}^{+\infty} \frac{du}{2u \cdot \ln 2u \cdot \ln_2 u \cdots \big(\ln_{k-2}2u\big)(\ln_{k-1}2u)^{p+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\frac{z^{-p+\frac{1}{2}}}{-p+\frac{1}{2}}\bigg|_{\delta'}^\infty,$$

где $\delta' = \ln_{k_1}(-2\ln\delta)$.

Таким образом, интеграл I сходится при $p > \frac{1}{2}$ и расходится при $p \le \frac{1}{2}$. □

В качестве иллюстрации применения теорем 1.2 и 3.1 приводим

Следствие. Пусть при $t \to \infty$

$$\varphi_2(t) \sim \frac{|t|}{|\ln t|^2},$$

тогда класс $\varphi_2(L)$ содержит все сопряженные функции. Если

$$\varphi_3(t) \sim \frac{|t|}{\big|\ln|t|\big|^{0.3}}, \quad t \to \infty,$$

то класс $\varphi_3(L)$ содержит не все сопряженные функции. Если

$$\varphi_4(t) \sim \frac{|t|}{\big|\ln|t|\big|\,\big|\ln_2|t|\big|^2}, \quad t \to \infty,$$

то класс $\varphi_4(L)$ содержит все сопряженные функции. Если

$$\varphi_5(t) \sim \frac{|t|}{\big|\ln|t|\big|\big|\ln_2|t|\big|^{0.3}}, \quad t \to \infty,$$

то класс $\varphi_5(L)$ содержит не все сопряженные функции. Если

$$\varphi_6(t) \sim \frac{|t|}{\big|\ln|t|\big|\big|\ln_2|t|\big|\,\big|\ln_3|t|\big|^2}, \quad t \to \infty,$$

то класс $\varphi_6(L)$ содержит все сопряженные функции. Если

$$\varphi_7(t) \sim \frac{|t|}{\big|\ln|t|\big|\big|\ln_2|t|\big|\,\big|\ln_3|t|\big|^{0.3}}, \quad t \to \infty,$$

то класс $\varphi_7(L)$ содержит не все сопряженные функции и т. д.

Замечание 3.1. Теорема 3.1 показывает, что условия в теореме 1.2 окончательны.

Замечание 3.2. Теоремы 1.1 и 2.3 для промежуточного случая анонсировались в работе [7]. А формулировки теорем 1.1, 1.2 и 2.3 опубликованы в [8].

Литература

[1] Kolmogoroff A. *Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier*, Fundam. Math. **7**, 24–29 (1925).

[2] Titchmarsh E.C. *On conjugate functions*, Proc. London Math Soc. **29**, 49–80 (1929).

[3] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (ГИФМЛ, М., 1961).

[4] Ульянов П.Л. *Представление функций рядами и классы* $\Phi(L)$, УМН **27** (2), 3–52 (1972).

[5] Musielak J. *Orlicz spaces and modular spaces*, Lecture Notes in Math. **1034** (Springer, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983).

[6] Salem R. *Essaissur les séries trigonométriques*, Actual. Sci. et Industr., № 862 (Paris, 1940).

[7] Филиппов В.И. *Сопряженные функции и сходимость рядов Фурье в классах* $\varphi(L)$, Сб. тр. 21 Международн. научн. конф. ММТТ-21 (Саратов, СГТУ, 2008), т. 1, секция 1, с. 88–89 (2008).

[8] Филиппов В.И. *Сопряженная функция и ряды Фурье в обобщенных классах Орлича*, Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского, Материалы Десятой международн. Казанск. летней научн. шк.-конф. (Казань, 2011), т. 43, с. 353–355.

В.И. Филиппов

профессор, кафедра прикладной математики и информатики,
Саратовский государственный социально-экономический университет,
ул. Радищева, д. 89, г. Саратов, 410003, Россия,

`e-mail:` 888vadim@mail.ru

V.I. Filippov

On the Kolmogorov theorems on Fourier series and conjugate functions

Abstract. We consider Fourier series of summable functions from spaces “wider” than L_1. We describe classes $\varphi(L)$ which contain conjugate functions, where their conjugate Fourier series converge. The obtained results are more general than the A.N. Kolmogorov theorems on the convergence of Fourier series in metrics weaker than L_1.

Keywords: Fourier series, conjugate functions, generalized Orlicz spaces, classes $\varphi(L)$.

V.I. Filippov

Professor, Chair of Applied Mathematics and Information Science,
Saratov State Social-Economic University,
89 Radishchev str., Saratov, 410003 Russia,

`e-mail:` 888vadim@mail.ru