ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.518

Ю.А. ДОБРОСОЦКАЯ

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СТУПЕНЧАТЫМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Введение

В статье исследуется актуальная в связи с необходимостью сжатия информации проблема поиска для ступенчатой функции с N интервалами постоянства такого обобщенного базиса Хаара, что первыми $k < N$ его функциями она приближается наилучшим образом (в смысле нормы $L_2[0,1]$), или, в иной формулировке (взаимно однозначная связь этих задач показана в разделе "Постановка задачи"), проблема поиска ступенчатой функции, оптимально приближающей данную в классе всех ступенчатых функций с не более чем k интервалами постоянства.

Для решения последней задачи разработан алгоритм, суть которого заключается в последовательном построении на каждом шаге оптимального приближения для функции, полученной за предыдущие шаги, в классе ступенчатых функций с меньшим на единицу числом интервалов постоянства (за оптимально приближающую перед первым шагом принимается сама функция). Точное описание алгоритма изложено в п. 3.1.

В статье подробно исследован класс функций, для которых алгоритм дает требуемое наилучшее приближение; достаточные условия оптимальности сформулированы в теоремах 1 и 2 раздела "Основные результаты", где приводятся также некоторые оценки точности приближения.

2. Постановка задачи

2.1. *Основные обозначения.* Пусть $\pi_N := \{0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_N = 1\}$ — разбиение отрезка $[0,1]$, определяющее интервалы постоянства исходной функции f;

$\{x_i\}_{i=1}^N$ — значения функции f на интервалах постоянства;

$\pi_k := \{0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_k = 1\}$ — разбиение отрезка $[0,1]$, определяющее интервалы постоянства функции f_k;

$\{y_i\}_{i=1}^k$ — значения функции f_k; $\Delta_i := p_i - p_{i-1}$, $i = \overline{1,N}$;

Ψ_k — класс всех ступенчатых функций с не более чем k интервалами постоянства;

$\Phi(\pi)$ — пространство ступенчатых на $[0,1]$ функций, интервалы постоянства которых определяются разбиением π, с нормой и скалярным произведением, индуцированными из $L_2[0,1]$;

$\mathrm{Pr}_\pi f$ — ортогональная (в смысле $L_2[0,1]$) проекция функции f на подпространство $\Phi(\pi)$;

f_k^{opt} — оптимально приближающая функция для f в Ψ_k;

$\varkappa_\Omega(t)$ — характеристическая функция множества Ω;

$\#\Omega$ — число точек множества Ω.

2.2. *Формулировка задачи.* Напомним определение обобщенной системы Хаара на отрезке $[0,1]$.

Пусть $\{I_{jl},\ j = 0,1,\dots,\ l = \overline{0, 2^j - 1}\}$ — система интервалов на $[0,1]$, определяемых рекуррентно следующим образом:

$$I_{00} = [0,1], \quad I_{jl} = I_{j+1,\,2l} \cup I_{j+1,\,2l+1}, \quad I_{jl} \cap I_{jm} = \emptyset \ \text{ при } l \neq m.$$

Тогда система функций $\chi_0(t) = \varkappa_{[0,1]}(t)$, $\chi_{00}(t) = \varkappa_{I_{10}}(t) - \varkappa_{I_{11}}(t), \dots, \chi_{jl}(t) = [\varkappa_{I_{j+1,\,2l}}(t) - \varkappa_{I_{j+1,\,2l+1}}(t)]x_{jl}$, $x_{jl} = \frac{1}{\sqrt{|I_{jl}|}}, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, \dots, 2^j - 1$, называется обобщенной системой Хаара на отрезке $[0,1]$. Группу функций $\{\chi_{jl}(t)\}_{l=0}^{2^j-1}$ принято называть j-й пачкой. Так как носитель функции любой пачки является объединением носителей двух функций следующей пачки, базис Хаара часто называют двоичным ([1], с. 70). Если $|I_{jl}| = |I_{jm}|$ для любых $l, m = \overline{0, 2^j - 1}$, то построенная таким образом система является классической системой Хаара.

Замечание 1. В постановке задачи для простоты использована нумерация функций с помощью одного индекса i, т. к. разделение функций Хаара на пачки здесь не играет важной роли. Связь между одинарным индексом i и двойной индексацией $\{j, l\}$, описанной чуть выше, задается соотношением $i = 2^j + l$.

Пусть f — ступенчатая на $[0,1]$ функция с N интервалами постоянства. Из множества всевозможных обобщенных базисов Хаара $\{B^\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, $B^\gamma = \{\chi_i^\gamma\}$, $i \in N \cup \{0\}$, требуется выбрать тот базис B^α, первыми k функциями которого f приближается наилучшим образом (в смысле нормы $L_2[0,1]$) по сравнению с первыми k функциями любого другого базиса

$$\left\| f - \sum_{i=0}^{k} C_i^\alpha \chi_i^\alpha \right\| = \min_\gamma \left\| f - \sum_{i=0}^{k} C_i^\gamma \chi_i^\gamma \right\|.$$

Поскольку для любого базиса B^γ линейная оболочка первых k его функций совпадает с $\Phi(\pi_k^\gamma)$, определяемым некоторым фиксированным разбиением $\pi_k^\gamma = \{0 = p_0^\gamma < p_1^\gamma < \dots < p_k^\gamma = 1\}$, то задача о поиске базиса сводится к задаче о нахождении функции f_k^{opt}.

Задача нелинейной аппроксимации функциями с заданным числом значений и нефиксированными узлами в настоящее время достаточно актуальна. В [2], в частности, упоминается результат, который кратко можно сформулировать так: любая функция $f \in \mathrm{Lip}(1, L_\infty[0,1])$ может быть приближена в норме $L_\infty[0,1]$ ступенчатой с равномерным разбиением шагом $\frac{1}{n}$ с точностью $O(\frac{1}{n})$ (линейная аппроксимация), тогда как в случае приближения f ступенчатой функцией с разбиением, узлы которого не фиксированы заранее, но их количество не превосходит n (нелинейная аппроксимация), тот же порядок точности достигается для гораздо более широкого класса функций $f \in C([0,1]) \bigcap BV[0,1]$, где $BV[0,1]$ — пространство функций ограниченной вариации на $[0,1]$. (Напомним, что функция f принадлежит пространству $\mathrm{Lip}(\alpha, L_p([0,1]))$, $0 < \alpha \le 1$, $0 < p \le \infty$, если существует такая константа $M > 0$, что для любого $h \in (0,1)$ верно неравенство $\|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L_p[0,\,1-h)} \le Mh^\alpha$.) Нелинейная аппроксимация оказывается более эффективной.

Рассматриваемая задача также относится к нелинейной аппроксимации, но здесь приближение выбирается оптимальным в норме пространства $L_2[0,1]$ и в качестве класса исследуемых функций исходно рассматриваются ступенчатые функции на отрезке $[0,1]$. Такое допущение естественно, ведь произвольная функция $f \in L_2[0,1]$ может быть приближена с любой заданной степенью точности ступенчатой функцией с достаточно большим числом интервалов постоянства.

Заметим, что если $f_k = f_k^{\mathrm{opt}}$, то $\pi_k \subset \pi_N$, т. е. все точки разрыва приближающей функции входят в множество точек разрыва f. Это вытекает из следующего факта: если заданы функции $g(t) = c\varkappa_{[a,b]}(t)$ и $h(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \varkappa_{\Delta_i}(t)$, где $\{\Delta_i\}_{i=1}^n$ — интервалы некоторого разбиения $[a,b]$, то $\|g - h\| \ge \|g - \widetilde{h}\|$, где $\widetilde{h}(t) = x_m \varkappa_{[a,b]}(t)$, $\min\limits_{i=\overline{1,n}} |c - x_i| = |x_m - c|$.

Для любого $\pi_k \subset \pi_N$ функция $\Phi(\pi_N) = \Phi(\pi_k) \oplus [\Phi(\pi_k)]^\perp$, и функцией, приближающей f наилучшим образом в подпространстве $\Phi(\pi_k)$, является $\mathrm{Pr}_{\pi_k} f$(подробнее об ортогональном проектировании см. п. 3.2).

Итак, задача поиска f_k сводится к выбору $(k-1)$ точки из $\pi_N \cap (0,1)$, которые вместе с 0 и 1 составят разбиение приближающей ступенчатой функции f_k. Для построения π_k предлагается использовать алгоритм пошагового удаления точек (АПУТ).

3. Алгоритм пошагового удаления точек

Сначала для функции f строится оптимально приближающий ее элемент f_{N-1} в классе Ψ_{N-1}, затем функция f_{N-1} оптимально приближается функцией f_{N-2} в классе Ψ_{N-2} и т. д. За $N-k$ шагов будет построена функция $f_k \in \Psi_k$. Опишем переходы от f к f_{N-1}, от f_{N-1} к f_{N-2} и т. д.

3.1. *Описание алгоритма.* Введем следующие обозначения, используемые в алгоритме:
$\pi_{N-i} := \{0 = p_0^i < p_1^i < \cdots < p_N^i = 1\}$ – разбиение, построенное после i шагов алгоритма;
$\Delta_j^l := p_j^l - p_{j-1}^l$, $j = \overline{1, N-l}$;
$f_{N-l} := \mathrm{Pr}_{\pi_{N-l}} f$ — приближающая функция l-го шага АПУТ (по определению);
$\{x_i^l\}_{i=1}^{N-l}$ — значения функции f_{N-l}; $f_{N-l} = \sum\limits_{i=1}^{N-l} x_i^l \varkappa_{[p_{i-1}^l; p_i^l]}(t)$;
$D_l := \|f - f_{N-l}\|$ — погрешность, приобретенная за l шагов алгоритма. Перед 1-м шагом естественно положить $f_N := f$, $D_0 := 0$.

1. Перед $(l+1)$-м шагом алгоритма ($l = \overline{0, N-k-1}$) рассчитываются характеристики каждой точки p_i^l разбиения π_{N-l}

$$\rho_{i,l}^2 = \frac{(x_i^l - x_{i+1}^l)^2 \Delta_i^l \Delta_{i+1}^l}{\Delta_i^l + \Delta_{i+1}^l} = \|f_{N-l} - \mathrm{Pr}_{\pi_{N-l} \setminus \{p_i{}^l\}} f\|^2. \tag{1}$$

2. Среди всех характеристик $\{\rho_{i,l}^2\}_{i=1}^{N-l-1}$ выбирается наименьшая $\rho_{i_0,l}^2$, затем точка с номером i_0 удаляется из разбиения, т. е. полагаем $\pi_{N-l-1} = \pi_{N-l} \setminus \{p_{i_0}^l\}$, $f_{N-l-1} := \mathrm{Pr}_{\pi_{N-l-1}} f$. При этом $D_{l+1}^2 := D_l^2 + \rho_{i_0,l}^2$, т. к. проектирование ортогональное.

Таким образом, для функции f_{N-l} на $(l+1)$-м шаге строится оптимально приближающая ее функция из $\Psi_{N-(l+1)}$. Точки $\pi_{N-l} \setminus \{p_{i_0}^l\}$ после перенумерации образуют π_{N-l-1}, величины $\rho_{i,l+1}^2$ пересчитываются. Точнее, нужно перед следующим шагом пересчитать только характеристики соседних с удаленной точек, характеристики остальных точек остаются неизменными. Так, за $N-k$ шагов получаем функцию f_k.

Замечание 2. АПУТ может быть применен и к функции, заданной на объединении промежутков. Тогда π_N состоит из объединения разбиений этих промежутков и в процессе работы алгоритма сравниваются характеристики точек разбиений, внутренних для соответствующих промежутков. Граничные точки фиксированы и не могут быть удалены.

Последующие рассуждения посвящены исследованию свойств, которыми должна обладать исходная функция f, чтобы полученная в результате применения алгоритма функция f_k совпадала с f_k^{opt}, т. к. оптимальность на каждом шаге не гарантирует оптимальности за $N-k$ шагов алгоритма. Это показывает

Пример 1. Пусть $f(t) = \varkappa_{[\frac{1}{5},\frac{2}{5}]}(t) + 2\varkappa_{[\frac{2}{5},\frac{3}{5}]}(t) + 5{,}3\varkappa_{[\frac{3}{5},\frac{4}{5}]}(t) + 2\varkappa_{[\frac{4}{5},1]}(t)$. Тогда $f_3(t) = \varkappa_{[0,\frac{3}{5}]}(t) + 5{,}3\varkappa_{[\frac{3}{5},\frac{4}{5}]}(t) + 2\varkappa_{[\frac{4}{5},1]}(t)$ и $D_3^2 = 0{,}4$, но при этом $f_3^{\mathrm{opt}} = \varkappa_{[\frac{1}{5},\frac{2}{5}]}(t) + 3{,}1\varkappa_{[\frac{2}{5},1]}(t)$, а $\|f - f_3^{\mathrm{opt}}\|^2 = 0{,}134(4) < D_3^2$.

3.2. *Вспомогательные утверждения.*

Лемма 1. *Пусть на 1-м и 2-м шагах алгоритма из разбиения π_N были удалены соседние точки p_i^0 и p_{i+1}^0 соответственно. Тогда*

$$D_2^2 = \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_i^0, p_{i+1}^0\}}\|^2 = \alpha_{i,i+1}[\rho_{i,0}^2 + \rho_{i+1,0}^2 \pm 2\rho_{i,0}\rho_{i+1,0}\gamma_{i,i+1}]\,, \tag{2}$$

где знак плюс соответствует случаю, когда функция f монотонна, а минус — когда f немонотонна на $[p^0_{i-1}; p^0_{i+2}]$, и

$$\alpha_{i,i+1} = \frac{(\Delta^0_i + \Delta^0_{i+1})(\Delta^0_{i+1} + \Delta^0_3)}{\Delta^0_{i+1}(\Delta^0_i + \Delta^0_{i+1} + \Delta^0_{i+2})}, \quad \gamma_{i,\,i+1} = \sqrt{\frac{\Delta^0_i \Delta^0_{i+2}}{(\Delta^0_i + \Delta^0_{i+1})(\Delta^0_{i+1} + \Delta^0_{i+2})}}.$$

Доказательство. Указанные выше формулы получаются применением к выражению $D^2_2 = (x^{(2)}_i - x_i)^2\Delta_i + (x^{(2)}_i - x_{i+1})^2\Delta_{i+1} + (x^{(2)}_i - x_{i+2})\Delta_{i+2}$ (погрешности после двух шагов) определения (1) и равенства $(x_i - x_{i+2})^2 = (x_i - x_{i+1})^2 + (x_{i+1} - x_{i+2})^2 \pm 2|x_i - x_{i+1}|\,|x_{i+1} - x_{i+2}| = \Big(\rho_{i,\,0}\sqrt{\frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{\Delta_i\Delta_{i+1}}} \pm \rho_{i+1,0}\sqrt{\frac{\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2}}{\Delta_{i+1}\Delta_{i+2}}}\Big)^2$, где знак плюс соответствует случаю $x_i \le x_{i+1} \le x_{i+2}$ или $x_i \ge x_{i+1} \ge x_{i+2}$ и минус соответствует случаю, когда это неверно. $\square$

Замечание 3. Из (2) для монотонной функции вытекает

$$D^2_2 = \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p^0_i, p^0_{i+1}\}}\|^2 \ge \rho^2_{i,0} + \rho^2_{i+1,0}. \tag{3}$$

Группой соседних точек будем называть подмножество G множества точек π_N, если $G = \pi_N \cap [p_i; p_{i+m}]$, $i = \overline{1, N-1}$, $m = \overline{0, N-i}$.

Хорошо известно, что $\mathrm{Pr}_{\pi_k} f$ фактически является результатом действия на f оператора усреднения по интервалам разбиения π_k, таким образом, $\mathrm{Pr}_{\pi_k} f(t) = \frac{1}{q_i - q_{i-1}} \int\limits_{q_{i-1}}^{q_i} f(s)ds$ при $t \in [q_{i-1}; q_i]$.

Лемма 2 (о свойствах оператора усреднения). *Пусть функция $f \in \Phi(\pi_N)$, $P \subset \pi_N \cap (0,1)$, $Q \subset (\pi_N \setminus P) \cap (0,1)$ и $I = (a,b) \cup (c,d)$, где $\{a \le b \le c \le d\} \subset \pi_N$. Тогда справедливы следующие свойства.*

(Pr-I) *Если $P \subset I$ и не имеет с $([0,1] \setminus I) \cap \pi_N$ соседних точек, то $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f(t) = f(t)$ при $t \notin I$.*

(Pr-II) $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f\| \le \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (P \cup Q)} f\|$.

(Pr-III) *Если $\{a,b,c,d\} \cap Q \ne \emptyset$, а $S \in \pi_N \setminus (I \cup \{a,b,c,d\})$, то $\int\limits_I (f(t) - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (P \cup S)} f(t))^2 dt \le \int\limits_I (f(t) - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (P \cup Q)} f(t))^2 dt$.*

(Pr-IV) (*свойство произвольности порядка проектирования.*) *Если $T \subset \pi_N \cap (0,1)$, то $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P}(\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus T} f) = \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus T}(\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f)$.*

(Pr-V) *Если f монотонна, P — группа соседних точек, $P = \bigcup\limits_{j=1}^m P_j$, P_j — группы соседних точек, расположенные слева направо на $[0,1]$ с возрастанием индекса, то $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f\|^2 \ge \sum\limits_{j=1}^m \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P_j} f\|^2$.*

Доказательство. 1. (Pr-I) получается обобщением следующего факта: если $p_j \in \pi_N$, то $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f(t) = f(t)$ при $t \notin [p_{j-1}, p_{j+1}]$.

2. Поскольку $\Phi(\pi_N \setminus (P \cup Q))$ — подпространство в $\Phi(\pi_N \setminus P)$, то (Pr-II) следует из теоремы Пифагора для ортогональных элементов гильбертова пространства.

3. Функция $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f(t)$ оптимально приближает f в $\Phi(\pi_N \setminus P)$, поэтому она оптимально аппроксимирует f и на любом $I \subset [0,1]$, откуда с учетом (Pr-I) следует (Pr-III).

4. (Pr-IV) вытекает из свойств интеграла Лебега.

5. Учитывая (Pr-IV), последовательным применением (3) получаем $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f\|^2 \ge \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (P_1 \cup \dots \cup P_{m-1})} f\|^2 + \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P_m} f\|^2 \ge \dots \ge \sum\limits_{j=1}^m \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P_j} f\|^2$. $\square$

Различие знаков в формуле (2) объясняет неоптимальность приближения ($f_k \ne f^{\mathrm{opt}}_k$) в некоторых случаях (см. пример 1). Но монотонность, тем не менее, не является необходимым условием для $f_k = f^{\mathrm{opt}}_k$, как показывает

Пример 2. Пусть $N = 4$, $k = 2$, f немонотонна: $f(t) = \varkappa_{[0,\frac{1}{4}]}(t) + 2\varkappa_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(t) + 4\varkappa_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(t) + 3\varkappa_{[\frac{3}{4},1]}(t)$. В этом случае $f_2(t) = f_2^{\text{opt}}(t) = \frac{3}{2}\varkappa_{[0,\frac{1}{2}]}(t) + \frac{7}{2}\varkappa_{[\frac{1}{2},1]}(t)$.

То, что не для любой монотонной функции $f_k = f_k^{\text{opt}}$, подтверждает

Пример 3. Пусть $N = 4$, $k = 2$, $f(t) = 2\varkappa_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}(t) + 3\varkappa_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]}(t) + 5\varkappa_{[\frac{3}{4},1]}(t)$. Тогда $f_2(t) = \frac{5}{3}\varkappa_{[0,\frac{3}{4}]}(t) + 5\varkappa_{[\frac{3}{4},1]}(t)$, и $\|f - f_2\|^2 = \frac{7}{6}$, но при этом $f_2^{\text{opt}}(t) = \varkappa_{[0,\frac{1}{2}]}(t) + 4\varkappa_{[\frac{1}{2},1]}(t)$, а $\|f - f_2^{\text{opt}}\| = 1$.

В связи с леммой 1 дальнейший поиск множества функций, для которых АПУТ позволяет построить оптимальное приближение, будет проводиться в классе монотонных функций.

3.3. *Дополнительные определения и обозначения.* Используем понятие группы соседних точек для описания множества, удаленного по АПУТ из π_N. Если на l-м шаге алгоритма выброшена точка p_i, не являющаяся соседней ни с одной из уже удаленных, будем говорить, что образовалась еще одна *группа выброшенных точек* $G = \{p_i\}$; если же из разбиения выброшена точка p_i, соседняя с уже удаленной p_{i_0}, то p_i присоединяем к той группе, в которую входит p_{i_0}.

В итоге все удаленные из разбиения за $N-k$ шагов АПУТ точки оказываются разделенными на s групп $G_1, \dots, G_s$ по признаку соседства.

Будем говорить, что группа G_r *формировалась без слияний*, если в процессе работы алгоритма не были удалены точки, соседние одновременно с точкой из G_r и с точкой из другой группы G_{r_0}.

Краевыми характеристиками группы $G_r = [p_j; p_{j+m_r^l-1}] \cap \pi_N$ (состоящей из m_r точек) назовем числа $e_1(G_r)^2 := \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{j-1},p_j\} \cap (0,1))} f\|^2$, $e_2(G_r)^2 := \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{j+m_r},p_{j+m_r-1}\} \cap (0,1))} f\|^2$, если $m_r \geq 2$, и $e_1(G_r)^2 := \rho_{j-1,0}^2$, $e_2(G_r)^2 := \rho_{j+1,0}^2$ при $m_r = 1$.

Внутренней характеристикой группы G_r назовем величину $e_3^2(G_r) := \sum\limits_{j=1}^{m_r-3} \rho_0^2(g_j^r)$, если $m_r > 3$ и $e_3^2(G_r) := 0$ при $m_r \leq 3$.

Точки в G_r будем нумеровать в порядке их присоединения к группе и обозначать $g_1^r, g_2^r, \dots, g_{m_r^l}^r$, где m_r^l — число точек в группе после l шагов.

1-*окрестностью* группы $G_r = [p_j; p_{j+m_r-1}] \cap \pi_N$ будем называть $[p_{j-1}; p_{j+m_r}]$ при $p_j \neq 0$ и $p_{j+m_r-1} \neq 1$, $[0; p_{j+m_r}]$ при $p_j = 0$ и $[p_{j-1}; 1]$ при $p_{j+m_r-1} = 1$. (Случай, когда $p_j = 0$ и $p_{j+m_r-1} = 1$, т. е. все точки π_N удалены, не имеет смысла.) 1-окрестность G_r обозначим $U_1(G_r)$.

Если для группы G_r, сформированной без слияний, выполнено неравенство

$$\rho_0^2(g_{m_r^l}^r) + e_\alpha^2(G_r) + e_3^2(G_r) \geq D_l^2(G_r), \tag{4}$$

где e_α^2 — краевая характеристика противоположного присоединяемой на l-м шаге точки $g_{m_r^l}^r$ края группы, $\rho_0^2(g_{m_r^l}^r)$ — характеристика точки $g_{m_r^l}^r$ перед началом работы алгоритма, $D_l^2(G_r) := \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus G_r} f\|^2$, то будем говорить, что она удовлетворяет условию (4).

Замечание 4. Если $G_r = [p_j; p_{j+m_r^l-1}] \cap \pi_N$, то (4) является достаточным условием для выполнения неравенства $\|f - \mathrm{Pr}_{U_1(G_r) \setminus \{p_{j_0}, p_{j+m_r^l}\}} f\| \geq \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus G_r} f\|$, $j < j_0 < j + m_r^l - 1$. В теореме 1 будет показано, что условие (4) гарантирует невозможность при удалении из разбиения π_N любых m_r^l точек множества $U_1(G_r)$ получить более точное приближение, чем при удалении точек группы G_r.

Если для любых четырех соседних интервалов J_1, J_2, J_3, J_4 с концами в некоторых точках из π_N верна импликация

$$\begin{cases} \mathrm{Var}_f^2(J_1 \cup J_2) \geq \mathrm{Var}_f^2(J_2 \cup J_3); \\ \mathrm{Var}_f^2(J_3 \cup J_4) \geq \mathrm{Var}_f^2(J_2 \cup J_3) \end{cases} \Rightarrow \min\{\mathrm{Var}_f^2(J_1 \bigcup J_2 \bigcup J_3), \mathrm{Var}_f^2(J_2 \bigcup J_3 \bigcup J_4)\} \leq$$

$$\leq \mathrm{Var}_f^2(J_1 \bigcup J_2) + \mathrm{Var}_f^2(J_3 \bigcup J_4), \tag{5}$$

где $\mathrm{Var}_f(\Omega) := [\int\limits_{\Omega}(f(t) - |\Omega|^{-1}\int\limits_{\Omega} f(s)ds)^2dt]^{1/2}$, то будем говорить, что функция $f \in \Phi(\pi_N)$ удовлетворяет условию (5) для разбиения π_N.

Замечание 5. Если $\{p_s, p_{s+1}\} \subset P$, то при выполнении условия (5) $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f\| \leq \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus((P\setminus\{p_s,p_{s+1}\})\cup\{p_{s+r},p_{s+r+2}\})} f\|$, где $r \in \{-1, 1\}$ и $0 < s + r < N - 2$. При этом любая $\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus\{p_i\}} f$ удовлетворяет условию (5) для разбиения $\pi_N \setminus \{p_i\}$.

Будем в дальнейшем обозначать через $P := \{p_{i_j}\}_{j=0}^{l}$ множество, каждая точка p_{i_j} которого выбрасывалась из разбиения π_N на $(j+1)$-м шаге АПУТ, $0 < l \leq N - k$, $Q := \{p_{m_j}\}_{j=0}^{l}$ — произвольное фиксированное подмножество π_N, такое, что $\#P = \#Q$.

3.4. *Основные результаты.*

Теорема 1. *Если функция $f \in \Psi_N$ монотонна, группы выброшенных точек формируются без слияний и удовлетворяют условию (4) на каждом шаге, то $f_k = f_k^{\mathrm{opt}}$ $(k < N)$.*

В доказательстве теоремы существенным образом используется

Лемма 3. *Пусть*

1) *для любой функции f, удовлетворяющей условию теоремы 1, и фиксированного $1 \leq l \leq N-2$ верно $f_{N-l} = f_{N-l}^{\mathrm{opt}}$;*
2) *$f \in \Psi_N$, и для $P = \{p_{i_j}\}_{j=0}^{l}$ и $Q = \{p_{m_j}\}_{j=0}^{l}$ найдется множество $I = [0, a) \cup (b, 1]$, $0 \leq a < 1$, $0 < b \leq 1$, такое, что*
   (a) *для $\lambda := \#(Q \cap I)$ справедливо $0 < \lambda < l+1$, т. е. множества $Q_\lambda := Q \cap I$, $Q_c := Q \setminus I$ не пусты,*
   (b) *$P_\lambda := \{p_{i_j}\}_{j=0}^{\lambda-1}$ не имеет соседних точек с Q_c, при этом $P_\lambda \subset I$,*
   (c) *f удовлетворяет условию теоремы 1 на I;*
3) *выполнено одно из требований:*
   (a) *$\lambda = l$,*
   (b) *$\#(P \cap I) = \lambda$ и $a, b \notin P$.*

Тогда $f_{N-(l+1)} = f_{N-(l+1)}^{\mathrm{opt}}$.

Доказательство. Требуется доказать

$$\|f - f_{N-(l+1)}\| = \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f\| \leq \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f\|. \tag{6}$$

В силу предположений 2) (a), 2) (b) $\#Q_\lambda = \#P_\lambda \leq l$, при этом $Q_\lambda \subset I$, $P_\lambda \subset I$. Тогда по 1) и 2) (c) имеем

$$\int_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P_\lambda} f)^2 dt \leq \int_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q_\lambda} f)^2 dt. \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно случаи 3) (a) и 3) (b). Докажем (6), если справедливо 3) (a). В силу 2) (b) по свойству (Pr-I) (из леммы 2) $\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P_\lambda} f(t) = \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(P_\lambda\cup Q_C)} f(t)$ при $t \in I$. Поэтому из (7) и свойства (Pr-II) $\int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(P_\lambda\cup Q_C)} f)^2 dt \leq \int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q_\lambda} f)^2 dt \leq \int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q})^2 dt$. Но по свойству (Pr-III) $\int\limits_{[0,1]\setminus I} (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(P_\lambda\cup Q_C)} f)^2 dt \leq \int\limits_{[0,1]\setminus I} (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f)^2 dt$, и из последних неравенств вытекает $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(P_\lambda\cup Q_C)} f\|^2 \leq \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f\|^2$. На $(l+1)$-м шаге АПУТ проверено (т. к. $\#Q_c = \#(P \setminus P_\lambda) = 1$), что $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f\|^2 \leq \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(P_\lambda\cup Q_C)} f\|^2$, откуда следует (6).

Пусть теперь выполняется условие 3) (b). По свойству (Pr-III) $\int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q_\lambda} f)^2 dt \leq \int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f)^2 dt$. Поскольку в данных условиях P_λ и $P \setminus P_\lambda$ не имеют соседних точек, то по (Pr-I) $\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P_\lambda} f(t) = \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f(t)$ при $t \in I$. Тогда, используя последнее неравенство и (7), имеем $\int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f)^2 dt \leq \int\limits_I (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f)^2 dt$. По аналогии доказывается $\int\limits_{[0,1]\setminus I} (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus P} f)^2 dt \leq \int\limits_{[0,1]\setminus I} (f - \mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q} f)^2 dt$. Из полученных неравенств следует (6). □

Доказательство теоремы 1. Проведем доказательство индукцией по числу удаляемых точек $N-k$.

1. При $k=N-1$ очевидно $f_{N-1}=f_{N-1}^{\text{opt}}$.

2. Пусть в условиях теоремы $f_{N-l}=f_{N-l}^{\text{opt}}$. Сохранив обозначения леммы 3, докажем (6), т. е. что $f_k=f_k^{\text{opt}}$ при $k=N-(l+1)$. Рассмотрим возможные случаи разделения выброшенных точек на группы соседних и их взаимного расположения с точками множества Q.

2.1. В результате работы алгоритма сформирована только одна группа выброшенных точек G_1. Если найдется точка $p_{m_s}\in\{p_{m_j}\}_{j=0}^{l}\setminus G_1$, не принадлежащая $U_1(G_1)$ или соседняя с g_{l+1}^1 (поскольку группа формировалась без слияний, точка g_{l+1}^1 крайняя), то обозначим $I=(0;p_{m_s})$ при $G_1\subset(0;p_{m_s})$ или $I=(p_{m_s};1)$ при $G_1\subset(p_{m_s};1)$. Тогда (6) следует из леммы 3, поскольку здесь выполнены требования 1), 2) и 3) (a).

В оставшемся случае $\{p_{m_j}\}_{j=0}^{l}\setminus G_1=\{p_{m_s}\}$ — точка, не соседняя с g_{l+1}^1, тогда $G_1\setminus\{p_{m_j}\}_{j=0}^{l}=\{g_{i_0}^1\}$. Пусть $g_{i_1}^1\neq g_{l+1}^1$ — крайняя точка G_1. При $i_0\in\{i_1,l+1\}$ неравенство (6) очевидно. Если $i_0\notin\{i_1,l+1\}$, то, применяя лемму 3 (где I — тот из полуинтервалов $[0,g_{i_1})$, $(g_{i_1},1]$, который содержит точки G_1) к функции $\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus\{g_{i_1}\}}f$ и пользуясь предположением индукции, получим $\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(G_1\setminus\{p_{l+1},p_{i_1},p_{i_0}\})}f\|^2\geq e_3^2(G_1)$. По (Pr-V) $\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q}f\|^2\geq\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus(G_1\setminus\{p_{l+1},p_{i_1},p_{i_0}\})}f\|^2+\rho_0^2(g_{l+1}^1)+e_\alpha^2(G_1)$, и (6) вытекает из условия (4).

2.2. В ходе АПУТ сформированы несколько групп $G_1,\ldots,G_n$.

a) Если найдется точка $p_{m_s}\in Q\setminus(\bigcup\limits_{r=1}^{n}U_1(G_r))$, то требуемое утверждение следует из леммы 3, поскольку для $I=[0;p_{m_s-1})\cup(p_{m_s+1};1]$ выполнены требования 1), 2) и 3) (a).

b) Рассмотрим случай, когда $Q\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_1(G_i)$. Если найдется группа $G_r=[p_j;p_{j+m_r^l-1}]\cap\pi_N\subset Q$, положим $I:=[0;p_j)\cup(p_{m_r-1};1]$. Если же $G_r\not\subseteq Q$, $r=\overline{1,n}$, то $\#(U_1(G_r)\cap Q)\leq m_r+1$, $r=\overline{1,n}$, и существует такая точка $p_j\in\pi_N\setminus(\bigcup\limits_{r=1}^{n}G_r)$, что $0<\#([0;p_j]\cup P)=\#([0;p_j]\cup Q)\leq l$, то будем считать $I:=[0;p_{j+1})$. Для I в обоих случаях выполнены условия 1), 2) и 3) (b) леммы 3, из которой и вытекает (6). $\square$

Лемма 4. *Если какое-либо условие теоремы* 1 *нарушено на l-м шаге* АПУТ $(0<l<N-k)$, *то* $\|f-f_k\|-\|f-f_k^{\text{opt}}\|\leq\frac{\|f_{N-l+1}-f_k\|^2}{2\|f-f_{N-l+1}\|}$.

Доказательство вытекает из теоремы Пифагора для ортогональных элементов в гильбертовом пространстве и того факта, что $f_{N-l+1}=f_{N-l+1}^{\text{opt}}$ в силу теоремы 1.

Теорема 2. *Если монотонная функция $f\in\Phi(\pi_N)$ удовлетворяет условию* (5) *для разбиения π_N, то $f_k=f_k^{\text{opt}}$.*

Доказательство. Применим индукцию.

1. Покажем, что $f_{N-2}=f_{N-2}^{\text{opt}}$. Здесь $\#P=\#Q=2$. Пусть $P\neq Q$, докажем неравенство (6). Рассмотрим следующие случаи:

a) p_{i_0}, p_{i_1} — не соседние точки, p_{m_0}, p_{m_1} также не соседние. Тогда $D_2^2=\rho_{i_0,0}^2+\rho_{i_1,0}^2\leq\rho_{m_0,0}^2+\rho_{m_1,0}^2=\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus\{p_{m_0},p_{m_1}\}}f\|^2$.

b) p_{i_0},p_{i_1} — не соседние точки, а $m_1=m_0+1$. Используя (Pr-V), имеем $\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus\{p_{m_0},p_{m_1}\}}f\|^2\geq\rho_{m_0,0}^2+\rho_{m_1,0}^2\geq\rho_{i_0,0}^2+\rho_{i_1,0}^2=D_2^2$.

c) p_{i_0}, p_{i_1} — соседние, p_{m_0}, p_{m_1} — не соседние точки. Если хотя бы одна из точек p_{m_0}, p_{m_1} не является соседней с p_{i_0}, пусть это p_{m_0}, то в силу сравнений АПУТ $D_2^2=\rho_{i_0,0}^2+\rho_{i_0,1}^2\leq\rho_{m_0,0}^2+\rho_{m_1,0}^2=\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q}f\|^2$. Если $m_0=i_0-1$, $m_1=i_0+1$, то (6) гарантируется условием (5) (см. пояснение к (5)).

d) p_{i_0}, p_{i_1} — соседние точки, p_{m_0}, p_{m_1} также соседние. Если хотя бы одна из точек p_{m_0}, p_{m_1}, пусть это точка p_{m_0}, не является соседней с p_{i_0} и не совпадает с ней, то $D_2^2\leq\rho_{m_0,0}^2+\rho_{m_1,0}^2<\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus Q}f\|^2$. Если же $p_{i_0}=p_{m_0}$, то три точки p_{i_0}, p_{m_1}, p_{i_1} соседние, и $D_2^2\leq\|f-\mathrm{Pr}_{\pi_N\setminus\{p_{m_0},p_{m_1}\}}f\|^2$ в силу сравнений перед вторым шагом.

2. Пусть $f_{N-l} = f_{N-l}^{\mathrm{opt}}$ для любой f, удовлетворяющей условиям теоремы. Докажем, что $f_k = f_k^{\mathrm{opt}}$ при $k = N-(l+1)$, т. е. что выполнено (6). Рассмотрим следующие случаи.

a) $p_{i_0} \in Q$. Тогда (6) эквивалентно неравенству $\|f_{N-1} - f_{N-(l+1)}\| \le \|f_{N-1} - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (Q \setminus p_{i_0})} f\|$, которое верно по предположению индукции, т. к. f_{N-1} монотонна и удовлетворяет условию (4) для разбиения $\pi_N \setminus \{p_{i_0}\}$.

b) $p_{i_0} \notin Q$. Если $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus Q} f = f_{N-(l+1)}^{\mathrm{opt}}$, то $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus Q} f = (\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}} f)_{N-(l+1)}^{\mathrm{opt}}$, а т. к. $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}} f$ монотонна и удовлетворяет условию (4) для разбиения $\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}$, то

$$\|\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}} f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus Q} f\| \ge \|\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}} f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{m_0}\} \cup S)} f\|, \tag{8}$$

где S — множество l точек, удаляемых из $\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}$ за l шагов АПУТ, применяемого к $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}} f$. Будем считать, что p_{m_0} не соседняя с p_{i_0} (иначе можно поменять порядок проектирования в $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus Q} f$; если же все точки из Q соседние с p_{i_0}, то $l+1 \le 2$, и (6) уже доказано). Тогда характеристика $\rho^2(p_{i_0})$ минимальна для $\pi_N \setminus \{p_{m_0}\}$, значит, $p_{i_0} \in S$. Теперь из (8) $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus Q} f\| \ge \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{m_0}\} \cup S)} f\|$, а к $\mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{m_0}\} \cup S)} f$ можно применить 2) (a), поэтому $\|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus (\{p_{m_0}\} \cup S)} f\| \ge \|f - \mathrm{Pr}_{\pi_N \setminus P} f\|$, откуда следует (6). □

Лемма 5. *Если для ступенчатой функции f существуют такие числа $r > 1$ и $c > 0$, что для всех $m = \overline{N-1, N-k}$ выполнено неравенство $\|f - f_m^{\mathrm{opt}}\| \le \frac{c}{m^r}$, то справедлива оценка погрешности*

$$\|f - f_k\| < \frac{c}{r-1}\left[\frac{1}{(k-1)^{r-1}} - \frac{1}{(N-1)^{r-1}}\right].$$

Доказательство. $\mathrm{Pr}_{\pi_{N-i}} f_{N-i-1}^{\mathrm{opt}} \in \Psi_{N-i-1}$ и $\|f_{N-i} - \mathrm{Pr}_{\pi_{N-i}} f_{N-i-1}^{\mathrm{opt}}\| \le \|f - f_{N-i-1}^{\mathrm{opt}}\|$, поэтому $\|f_{N-i} - f_{N-i-1}\| \le \frac{c}{(N-i-1)^r}$. По неравенству треугольника получим $\|f - f_k\| \le \sum\limits_{i=k}^{N-1} \frac{c}{i^r} < \int\limits_{k-1}^{N-1} \frac{c}{x^r} dx$. Отсюда вытекает требуемая оценка. □

3.5. *Связь задачи о приближении k-значной ступенчатой функцией с задачей о построении оптимального базиса Хаара.*

3.5.1. *Построение по разбиению π_k первых k функций обобщенного базиса Хаара, линейная оболочка которых совпадает с $\Phi(\pi_k)$.* В соответствии с определением обобщенной системы Хаара из раздела 2 для решения исходной задачи достаточно по полученному применением АПУТ разбиению $\pi_k = \{0 = q_0 < q_1 < \cdots < q_k = 1\}$ задать систему интервалов $\{I_{jl}\}$, точнее, ее конечное подмножество, однозначно определяющее первые k функций базиса Хаара.

Чтобы первые k функций системы Хаара были базисом в $\Phi(\pi_k)$, интервалы $\{I_{jl}\}$, определяющие с 0-й по $(s-1)$-ю пачки и $(m-1)$ функцию из пачки s (где $k = 2^s + m$, $0 \le m < 2^{s+1} - 2^s$), нужно задать так: $I_{00} := [0,1] = [q_0, q_{k+1}]$, $I_{10} := [0, q_{\mu_{00}}]$, $\mu_{00} := E(\frac{k+1}{2})$, где $E(y)$ обозначает целую часть числа y, $I_{11} := I_{00} \setminus I_{10} = [q_{\mu_{00}}, 1]$; далее, если $I_{j,l} = [q_{i_1}, q_{i_2}]$, то полагаем $I_{j+1,2l} := [q_{i_1}, q_{\mu_{jl}}]$, $\mu_{jl} := E(\frac{i_1+i_2}{2})$, и $I_{j+1,2l+1} := I_{j,l} \setminus I_{j+1,2l} = [q_{\mu_{j\,l}}, q_{i_2}], \ldots$ и т. д., пока не построим $I_{s+1,2m-1}$.

3.5.2. *Пояснение действий алгоритма и вычисляемых в нем характеристик в терминах обобщенных базисов Хаара.* По разбиению π_k однозначно задается группа базисов, у которых одинаковы первые k функций $\{\chi_i\}_{i=0}^{k-1}$ (их линейная оболочка совпадает с $\Phi(\pi_k)$). Обозначим такую группу $B(\pi_k)$. Искомой в задаче является оптимальная группа базисов $B(\pi_k^{\mathrm{opt}})$, в которой $\{\chi_i^{\mathrm{opt}}\}_{i=0}^{k-1}$ — первые k функций.

Пусть Θ — множество функций $\chi_{j\,s}$ всевозможных обобщенных базисов Хаара, для которых точки из π_N являются точками разрыва, но $\sup \chi_{j\,s} \not\subseteq [p_i, p_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$ (коэффициенты $c_{j,s}$ только при таких функциях могут быть отличны от 0). Заметим, что $\{\chi_i^{\mathrm{opt}}\}_{i=0}^{k-1} \subset \Theta$.

Рассмотрим обобщенный базис Хаара, содержащий функцию

$$\chi_{js}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i^l \Delta_{i+1}^l (\Delta_i^l + \Delta_{i+1}^l)}} (\Delta_{i+1}^l \varkappa_{[p_{i-1}^l, p_i^l]}(t) - \Delta_i^l \varkappa_{[p_i^l, p_{i+1}^l]}(t)). \tag{9}$$

Используя (1), получим $c_{j,s}^2 = \langle \chi_{js}, f \rangle^2 = \rho_{i,l}^2$. Обозначим Θ_l — множество функций вида (9), соответствующих π_{N-l}. Тогда поиск минимальной характеристики перед $(l+1)$-м шагом АПУТ означает, что из Θ_l выбирается такая $\psi_l(t)$, что коэффициент $\langle \psi_l, f \rangle^2$ минимален. Удаление соответствующей точки из разбиения можно рассматривать как обеспечение того, что данная "невыгодная" функция $\psi_l(t)$ не войдет в Θ_{l+1} и в $\{\chi_i\}_{i=0}^{k-1}$. Но тогда там не окажется ни одной функции с разрывом в удаляемой точке, а таковыми могут быть функции из $\{\chi_i^{\mathrm{opt}}\}_{i=0}^{k-1}$. Здесь и возможно нарушение требования оптимальности выбора.

Литература

1. Кашин Б.С., Саакян А.А. *Ортогональные ряды.* – М., 1999. – 560 с.
2. DeVore R.A. *Nonlinear approximation* // Acta Numer. – 1998. – V. 7. – P. 51–150.

Воронежский государственный университет

Поступила 27.11.2001