ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 519.6

В.Г. КОРНЕЕВ, С. ЕНСЕН

ЭФФЕКТИВНОЕ ПРЕДОБУСЛАВЛИВАНИЕ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ ДЛЯ p-ВЕРСИИ С ИЕРАРХИЧЕСКИМ БАЗИСОМ. II

Работа является продолжением статьи [1].

5. Предобуславливание методом декомпозиции области

Как только предобуславливатель МДО определен, он может быть использован в некоторой итерационной процедуре для решения конечноэлементной системы (4.5) такой, как предобусловленный метод сопряженных градиентов, метод простой итерации и др. В каждом из этих методов не используется предобуславливатель сам по себе, а только последовательность операций, эквивалентная умножению на оператор, обратный предобуславливателю. Таким образом, требуется определить только обратные к рассматриваемым предобуславливателям. Это будет сделано в § § 5, 6. Используемый в этих параграфах подход основан на том факте, что матрица $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$ почти спектрально эквивалентна матрице $\overline{K}$ (см. лемму 4.2). Следовательно, всякий хороший предобуславливатель для $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$ будет хорошим предобуславливателем и для $\overline{K}$.

Предобуславливатель МДО, обозначаемый Λ_D, определяется через обратный к нему в виде суммы

$$\Lambda_D^{-1} := \widetilde{\Lambda}_I^{+} + \widetilde{\Lambda}_{II}^{+} + \widetilde{\Lambda}_{III}^{+}, \tag{5.1}$$

слагаемые в которой описаны ниже (напомним, что B^+ — матрица псевдообратная к матрице B). Для упрощения доказательств в этом параграфе, как правило, имеется в виду p-версия, так что R фиксировано, не велико, и можно принять, что $A_{(r)} = A = A_1 + A_0$, сохраняя значения постоянных в (4.9). Однако все рассмотрения легко распространяются и на h-p-версию (см. замечание 5.3)

1. *Определение матрицы* $\widetilde{\Lambda}_I^{+}$. Несмотря на то, что для обоих базисных элементов $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_0$ предобуславливатели для внутренних задач определяются сходно, для определенности они описываются здесь в случае базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}$.

Рассмотрим матрицу $A_{1,0}$, фигурирующую в лемме 2.1. Это есть матрица жесткости базисного элемента при граничных условиях Дирихле на его границе. Она имеет вид

$$A_{1,0} = K_{1,0} \otimes K_{0,0} + K_{0,0} \otimes K_{1,0}, \tag{5.2}$$

где в соответствии с (1.12)

$$K_{0,0} = \triangle_0 + \mathcal{D}_0\,. \tag{5.3}$$

Матрица $A_{1,0}$ сама довольно проста, и, как это, в частности, следует из леммы 4.2, может служить хорошим предобуславливателем для внутренней задачи на каждом элементе $\mathcal{E}_r$. Без

Работа поддержана частично грантами International Science Foundation, US National Research Council (программа CAST), грантом Office of Naval Research N00014-90-J-1238.

потери спектральной эквивалентности матрице жесткости элемента ее можно упростить до одной из матриц

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_{1,0} &= K_{1,0} \otimes (\widehat{\triangle} + \mathcal{D}_0) + (\widehat{\triangle} + \mathcal{D}_0) \otimes K_{1,0}, \\
\widehat{A}_{1,0} &= K_{1,0} \otimes (\widehat{\triangle} + \widehat{\mathcal{D}}) + (\widehat{\triangle} + \widehat{\mathcal{D}}) \otimes K_{1,0}, \\
\widehat{A}_{1,0} &= \widehat{\mathcal{D}}^{-1} \otimes (\widehat{\triangle} + \widehat{\mathcal{D}}) + (\widehat{\triangle} + \widehat{\mathcal{D}}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}^{-1} .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Используя явный вид матрицы $K_{1,0}$ и лемму 1.1, легко усмотреть, что

$$\widehat{A}_{1,0} \prec A_{1,0} \prec \widehat{A}_{1,0} . \tag{5.5}$$

Это вместе с леммой 4.2 позволяет выбрать $\widetilde{\Lambda}_I^+$ в виде

$$\widetilde{\Lambda}_I^+ = \begin{pmatrix} (\widetilde{\Lambda}_I^+)_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

где $(\widetilde{\Lambda}_I^+)_I$ — блок, соответствующий внутренним неизвестным конечноэлементного метода,

$$(\widetilde{\Lambda}_I^+)_I = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{1,0}^{-1} & & \dots & 0 \\ & \widehat{A}_{1,0}^{-1} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \widehat{A}_{1,0}^{-1} \end{pmatrix}.$$

В матрице $(\widetilde{\Lambda}_I^+)_I$ каждый блок соответствует одному из элементов $\mathcal{E}_r$, $r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}$.

Замечание 5.1. При вычислениях удобно упорядочить координатные функции на базисном элементе так же, как в множестве $\mathcal{M}_\sqcap = \overline{\mathcal{M}} \times \overline{\mathcal{M}}$. В этом случае матрицы $A_{1,0}$, $\widehat{A}_{1,0}$ состоят из четырех независимых блоков, каждый из которых имеет такой же портрет ненулевых элементов, как у пятиточечного оператора Лапласа.

2. *Определение матрицы* $\widetilde{\Lambda}_{II}^+$. Эта матрица определяется таким образом, что она может иметь ненулевые элементы только на местах, соответствующих внутренним неизвестным и неизвестным сторон, т. е. на местах, занятых блоком $\Lambda^{(I)}$ матрицы $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$, (см. (4.8)). Определение матрицы $\widetilde{\Lambda}_{II}^+$ связано с факторизацией

$$\Lambda^{(I)} = \begin{pmatrix} I_I & 0 \\ \Lambda_{II,I}\Lambda_I^{-1} & I_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_I & 0 \\ 0 & S_\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I & \Lambda_I^{-1}\Lambda_{I,II} \\ 0 & I_{II} \end{pmatrix}.$$

А именно, полагаем, что

$$\widetilde{\Lambda}_{II}^+ = P\widehat{S}_\Lambda^{-1}P^T, \tag{5.7}$$

где $\widehat{S}_\Lambda$ — предобуславливатель дополнения Шура S_Λ, а $P : I\!R^{\mathcal{N}_{II}} \to I\!R^{\mathcal{N}_I + \mathcal{N}_{II}}$ — оператор продолжения, обладающий определенными свойствами. В качестве предобуславливателя дополнения Шура предлагается использовать матрицу

$$\widehat{S}_\Lambda = \frac{2}{1 + \log p} \begin{pmatrix} \widehat{S}_0 & & \dots & 0 \\ & \widehat{S}_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & \widehat{S}_0 \end{pmatrix}$$

с одинаковыми блоками $\widehat{S}_0$, описанными в § 3, такими же, как и в предобуславливателе дополнения Шура для матрицы жесткости базисного элемента. Количество этих блоков равно количеству сторон различных элементов на области Ω. Каждый блок отвечает неизвестным, соответствующим одной из этих сторон. Из теоремы 3.1 и из определения матрицы $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$ следует, что если используется базисный элемент $\widehat{\mathcal{E}}$, то

$$\frac{1}{1+\log p}\widehat{S}_\Lambda \prec S_\Lambda \prec (1+\log p)\widehat{S}_\Lambda. \tag{5.8}$$

Это — одно из двух существенных свойств, обеспечивающих эффективность второго сомножителя в матрице (5.7), остальное относится к оператору продолжения и обсуждается ниже.

Сначала определим оператор продолжения. Затем покажем, что он удовлетворяет нужным требованиям эффективности. Оператор продолжения есть отображение $P: V_{II}^0 \to V_{I,II}^0$, где $V_{II}^0 = I\!R^{\mathcal{N}_{II}}$ — пространство векторов коэффициентов, соответствующих сторонам, $V_{I,II}^0 = I\!R^{\mathcal{N}_I+\mathcal{N}_{II}}$ — пространство векторов коэффициентов, соответствующих сторонам и внутренним узлам элементов. Для его описания введем обозначение $H_{II}(\partial\sqcap)$ для пространства следов полиномов из пространства $\mathcal{P}_x^{(p)}$ или $\mathcal{P}_x^{[p]}$, имеющих нулевые значения в вершинах $\partial\sqcap$. Определим далее пространства

$$H_{I,II}(\sqcap) := \text{span}\{\mathcal{M}_I, \mathcal{M}_{II}\}, \quad H_{I,II}^0(\Omega) := \text{span}\{\Phi_I, \Phi_{II}\} \cap H^0(\Omega).$$

Введем также обозначения $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}$ для множеств точек границ между элементами и границ всех элементов, т. е.

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} - \partial\Omega, \quad \mathcal{T} = U_{r=1}^R \partial\sqcap_r,$$

и обозначение $H_{II}^0(\mathcal{T})$ для пространства следов функций из $\widetilde{u} \in H_{I,II}^0(\Omega)$ на $\mathcal{T}$.

Предположим, что $\widehat{P}_\mathcal{E}: H_{II}(\partial\sqcap) \to H_{I,II}(\sqcap)$ — оператор продолжения на базисный элемент, обеспечивающий выполнение для каждого $\widehat{u}_{\partial\sqcap} \in H_{II}(\partial\sqcap)$ неравенства

$$\|\widehat{P}_\mathcal{E}\widehat{u}_{\partial\sqcap}\|_{1,\sqcap} \le c\|\widehat{u}_{\partial\sqcap}\|_{1/2,\partial\sqcap} \tag{5.9}$$

с абсолютной постоянной c. Оператор продолжения $\widehat{P}_\mathcal{E}$ однозначно определяет такой оператор продолжения $\widetilde{P}: H_{II}^0(\mathcal{T}) \to H_{I,II}^0(\Omega)$, что для любой $\widetilde{v}_\mathcal{T} \in H^0(\mathcal{T})$ ее продолжение определяется поэлементно равенствами

$$\widetilde{v}(\overline{x}^{(r)}(y)) = \widehat{P}_\mathcal{E}(\widetilde{v}_\mathcal{T}(\overline{x}^{(r)}(y))|_{\partial\sqcap}), \quad r = 1, 2, \ldots, R.$$

Оператор P — матричное представление $\widetilde{P}$ в конечноэлементном базисе Галёркина (Φ_I, Φ_{II}), дополненном нулями для переменных, соответствующих вершинам. Таким образом, матричное определение оператора продолжения для любого элемента $\mathcal{E}_r$ то же, что и для базисного элемента.

Получим предобуславливатель МДО для матрицы $\Lambda^{(I)}$, порождающей норму

$$\|\overline{u}\|_{I,II} := (\overline{u}^T\Lambda^{(I)}\overline{u})^{1/2}, \quad \widehat{u} \in V_{I,II}^0.$$

По определению $\Lambda^{(I)}\widehat{u}$, она совпадает с нормой

$$\|\widetilde{u}\|_1 := \Big(\sum_r \|\widetilde{u}(\overline{x}^{(r)}(y))\|_{1,\sqcap}^2\Big)^{1/2}, \quad \widetilde{u} \in H_{I,II}^0(\Omega),$$

так, что

$$\|\overline{u}\|_{I,II} = \|\widetilde{u}\|_1, \tag{5.10}$$

где $\overline{u}$ — вектор коэффициентов представления $\widetilde{u}$ в базисе $\{\Phi_I, \Phi_{II}\}$. Введем также норму для функций из $H_{II}^0(\mathcal{T})$

$$\|\widetilde{u}_\mathcal{T}\|_{1/2} := \Big(\sum_r \|\widetilde{u}_\mathcal{T}(\overline{x}^{(r)}(y))\|_{1/2,\sqcap}^2\Big)^{1/2}, \quad \widetilde{u}_\mathcal{T} \in H_{II}^0(\mathcal{T}).$$

Из (5.9) следует, что с той же самой абсолютной постоянной c

$$\|\widetilde{P}\widetilde{u}_\mathcal{T}\|_1 \le c\|\widetilde{u}_\mathcal{T}\|_{1/2} \text{ для любого } \widetilde{u}_\mathcal{T} \in H_{II}^0(\mathcal{T}). \tag{5.11}$$

Кроме того, по теореме о следах, примененной к базисному элементу, имеем

$$\|\widetilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{1/2} \le c\|\widetilde{u}\|_1 \quad \forall \widetilde{u} \in H^0_{I,II}(\Omega). \tag{5.12}$$

Здесь $\widetilde{u}_{\mathcal{T}}$ — сужение $\widetilde{u}$ на $\mathcal{T}$.

Операторы продолжения $\widehat{P}_{\mathcal{E}}$, имеющие указанные выше свойства, известны. Например, их можно найти в [2], как для пространства $H(\widehat{\mathcal{E}})$, так и для пространства $H(\widehat{\mathcal{E}}_0)$, но в последнем случае с постоянной cp вместо c в неравенствах (5.9), (5.11). Следовательно, в случае базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}$ оператор продолжения в (5.7) может быть определен так, что неравенство (5.9) будет выполнено с абсолютной, т. е. не зависящей от p, h, $\alpha^{(1)}$ постоянной.

3. *Определение матрицы* $\widetilde{\Lambda}^{+}_{III}$. Если $\mathcal{N}_{III}$ не слишком велико (p-версия), и решение системы $\Lambda_{III}x = y$ не вызывает затруднений, то мы просто принимаем, что единственный ненулевой блок $\widetilde{\Lambda}_{III}$ есть Λ_{III}, т. е.

$$\widetilde{\Lambda}^{+}_{III} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\widetilde{\Lambda}^{+}_{III})_{III} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

где $(\widetilde{\Lambda}^{+}_{III})_{III} = \Lambda^{-1}_{III}$. Матрица Λ_{III} может быть собрана из стандартных матриц жесткости $A = A_1 + h^2 A_0$ или $A = A_1$ базисного элемента, определенных для $p = 1$. Для больших $\mathcal{N}_{III}$, когда метод конечных элементов приходится рассматривать как h-p-версию, известны итерационные процессы, оптимальные или почти оптимальные по порядку арифметических операций ($\mathcal{O}(\mathcal{N}^2_{III})$ или $\mathcal{O}(\mathcal{N}^2_{III}\log\mathcal{N}_{III})$). Таким образом, можно определить $\widetilde{\Lambda}^{+}_{III}$ неявно при помощи итерационного процесса, как грубое приближение к Λ^{-1}_{III}. При этом имеется в виду, что $\widetilde{\Lambda}_{III}$ удовлетворяет неравенствам

$$c_{1,III}\widetilde{\Lambda}_{III} \le \Lambda_{III} \le c_{2,III}\widetilde{\Lambda}_{III} \tag{5.14}$$

с достаточно хорошими постоянными $c_{k,III} > 0$, не зависящими от h (и p). Например, $c_{1,III} = 0.5$, $c_{2,III} = 1.5$. В дальнейшем, следовательно, можно полагать, что операция $\widetilde{\Lambda}^{+}_{III}y$ определена, и в случае квазиравномерной сетки достаточно не более $\mathcal{O}(h^{-2})$ арифметических операций, чтобы $\widetilde{\Lambda}_{III}$ удовлетворяла (5.14).

Замечание 5.2. Для того чтобы представить себе, как можно вообще решать систему $\Lambda_{III}x = y$, например, многосеточным методом (предполагается, что имеем последовательность сеток, топологически эквивалентных вложенным), достаточно заметить, что матрица Λ_{III} спектрально эквивалентна матрице $\overline{K}_{III}$, которая представляет собой конечноэлементную матрицу жесткости (см. (4.5) при $p = 1$). Причем Λ_{III} много проще. Если конечноэлементная сетка топологически эквивалентна ортогональной сетке, эта матрица — хорошо известная конечноэлементная матрица с девятиточечным шаблоном, порожденная билинейными элементами, с энергией, определенной как $|\cdot|^2_{1,\Omega_h}$ или $\|\cdot\|^2_{1,\Omega_h}$, где Ω_h определяется как объединение таких элементов. Дальнейшее упрощение возможно путем замены Λ_{III} на матрицу, порожденную линейным треугольным базисным элементом.

Лемма 5.1. *Существуют такие абсолютные постоянные c_1, $c_2 > 0$, что выполнены следующие неравенства*

$$c_1(1+\log p)^{-1}\Lambda_D \le \widetilde{\Lambda}_{p,h} \le c_2(1+\log p)\Lambda_D. \tag{5.15}$$

Доказательство. Матрицы Λ_D, $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$ состоят из двух независимых блоков (см. (4.8)). Поэтому, предполагая выполненными неравенства (5.14), получим что неравенства (5.15) эквивалентны неравенствам

$$c_1(1+\log p)^{-1}\Lambda^{(I)}_D \le \Lambda^{(I)} \le c_2(1+\log p)\Lambda^{(I)}_D. \tag{5.16}$$

Здесь использовано обозначение $\Lambda_D^{(I)}$ для первого независимого блока предобуславливателя Λ_D. Второй блок Λ_D есть, очевидно, $\widetilde{\Lambda}_{III}$. Введем представление $V_{I,II}^0 = V_I + V_{II(I)}^0$, где V_I содержит вектор внутренних коэффициентов, а $V_{II(I)}^0 = \widetilde{\Lambda}_{II}^+ V_{II}^0$ — образ матрицы $\widetilde{\Lambda}_{II}^+$. Для каждого $\overline{\phi} \in V_{I,II}^0$ существует такое представление $\overline{\phi} = \overline{\phi}_I + \overline{\phi}_{II(I)}$, что $\overline{\phi}_I \in V_I$, $\overline{\phi}_{II,(I)} \in V_{II(I)}^0$, и выполнены неравенства

$$(\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_I, \overline{\phi}_I) + (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_{II(I)}, \overline{\phi}_{II(I)}) \prec (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}, \overline{\phi}), \tag{5.17}$$

$$((P_I + P_{II(I)})\overline{\phi}, \overline{\phi}) \prec (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}, \overline{\phi}), \tag{5.18}$$

где P_I, $P_{II(I)}$ — операторы ортогонального проектирования в смысле скалярного произведения $(\Lambda^{(I)}\cdot, \cdot)$ на пространства V_I, $V_{II(I)}^0$. В самом деле, для каждого $\overline{\phi} \in V_{I,II}^0$ однозначно определяется его сужение $\overline{\phi}_{II} \in V_{II}^0$, и тогда $\overline{\phi}_{II(I)} = P\overline{\phi}_{II}$, $\overline{\phi}_I = \overline{\phi} - \overline{\phi}_{II(I)}$. Таким образом,

$$(\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_I, \overline{\phi}_I) + (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_{II(I)}, \overline{\phi}_{II(I)}) \leq (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}, \overline{\phi}) + 3(\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_{II(I)}, \overline{\phi}_{II(I)}),$$

откуда по определению $\overline{\phi}_{II(I)}$ и в силу (5.10)–(5.12) имеем

$$(\Lambda^{(I)}\overline{\phi}_{II(I)}, \overline{\phi}_{II(I)}) \prec (\Lambda^{(I)}\overline{\phi}, \overline{\phi}).$$

Это означает, что (5.17) выполнено. Очевидно, (5.18) также справедливо. Как непосредственное следствие (5.8), (5.10)–(5.12) получим, что для каждого $\overline{\phi} \in V_{II}^0$ выполнены следующие неравенства

$$(1 + \log p)^{-1}(\widehat{S}_\Lambda \overline{\phi}, \overline{\phi}) \prec (\Lambda^{(I)}P\overline{\phi}, P\overline{\phi}) \prec (1 + \log p)^{-1}(\widehat{S}_\Lambda \overline{\phi}, \overline{\phi}). \tag{5.19}$$

Из (5.19) вытекает существование матрицы $(P^T P)^{-1}$. Принимая во внимание, что $B_2 := (\widetilde{\Lambda}_{II}^+)^+$ есть $B_2 = P(P^T P)^{-1}\widehat{S}_\Lambda (P^T P)^{-1} P^T$, непосредственно получим другую форму (5.19)

$$(1 + \log p)^{-1}(B_2\overline{\psi}, \overline{\psi}) \prec (\Lambda^{(I)}\overline{\psi}, \overline{\psi}) \prec (1 + \log p)(B_2\overline{\psi}, \overline{\psi}), \quad \overline{\psi} \in V_{II(I)}^0. \tag{5.20}$$

Для завершения доказательства используем формулируемый ниже результат С.В. Непомнящих [3] (см. также [4]).

Пусть

i) $\mathcal{H}$ — пространство Гильберта со скалярным произведением (u, v), представленное в виде расщепления на векторную сумму подпространств

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \cdots + \mathcal{H}_m;$$

ii) $A : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ — линейный самосопряженный непрерывный положительно определенный оператор;

iii) P_i для $i = 1, 2, \ldots, m$ — ортопроекторы $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}_i$ относительно скалярного произведения $(u, v)_A = (u, Av)$;

iv) B_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, — такие самосопряженные операторы, что

$$imB_i = \mathcal{H}_i,$$
$$c_1(B_i u, u) \leq (Au, u) \leq c_2(B_i u, u)$$

для всех $u \in \mathcal{H}_i$ с положительными постоянными c_1, c_2.

Теорема 5.1 ([3]). *Пусть для каждого $u \in \mathcal{H}$ существуют такие $u_i \in \mathcal{H}_i$, что*

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_m$$

и для некоторых постоянных α, $\beta > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha[(u_1, u_1)_A + (u_2, u_2)_A + \cdots + (u_m, u_m)_A] \leq (u, u)_A,$$
$$((P_1 + P_2 + \cdots + P_m)u, u)_A \leq \beta(u, u)_A.$$

Пусть далее $B^{-1} = B_1^+ + B_2^+ + \cdots + B_m^+$. *Тогда*

$$\alpha c_1(A^{-1}u, u) \le (B^{-1}u, u) \le \beta c_2(A^{-1}u, u).$$

Теперь можно заключить (см. (5.17), (5.18), (5.4), (5.20)), что для $H = V^0_{I,II}$, $H_1 = V_I$, $H_2 = V^0_{II(I)}$ и связанных с ними матриц $A = \Lambda^{(I)}$, $B_1 = (\widetilde{\Lambda}_I^+)^+$, $B_2 = (\widetilde{\Lambda}_{II}^+)^+$ выполнены условия данной теоремы, что и приводит к неравенству (5.15). $\square$

Таким образом, доказана (см. (4.9), (5.15)) следующая

Теорема 5.2. *Пусть* $\overline{K}$ *— конечноэлементная матрица, определенная в* (4.6) *для граничной задачи* (4.1), (4.2), Λ_D^{-1} *определена соотношением* (5.7). *Тогда*

$$c_{1,D}\frac{1}{(1+\log p)^2}\Lambda_D \le \overline{K} \le c_{2,D}(1+\log p)\Lambda_D \tag{5.21}$$

с положительными постоянными $c_{k,D}$, *не зависящими от* p, *но зависящими от* μ_1, μ_2, $\alpha^{(1)}$, θ.

Постоянные $c_{1,D}$, $c_{2,D}$ зависят от $\alpha^{(1)}, \theta$ так же, как и постоянные $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_2$ в (4.9).

Замечание 5.3. В случае h-p-версии матрицы $\widetilde{\Lambda}_L^+$, $L = I, III$ могут быть определены, как описано выше, и это не приводит к изменению оценок (5.21). Выбор $A_{(r)} = A$, где $A = A_1 + h^2 A_0$ или $A = A_1$ при определении вспомогательной матрицы $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$ влияет прежде всего на доказательство неравенства (5.19) и базирующихся на нем. Однако имеется способ сохранить в оценке из теоремы 5.2 независимость от h и ту же зависимость от $(1+\log p)$. Это требует изменения предобуславливателя дополнения Шура. Например, если $A = A_1$, то можно в (3.6) положить $\Lambda = \mathrm{diag}[0, 1, 2, \ldots, p]$. После этого доказательство почти не меняется, если заменить в нужных местах нормы полунормами.

6. Предобуславливание дополнения Шура в случае других базисных элементов

Множители $(1+\log p)^{-2}$ и $(1+\log p)$ в оценках теоремы 5.2 присутствуют вследствие двух факторов. Во-первых, это отделение переменных, соответствующих вершинам, от остальных, что отражается, например, в (3.1), (3.2) и (4.7)–(4.9). Во-вторых, это способ предобуславливания дополнения Шура для расщепленной матрицы, который базируется на теореме 3.1 для базисного элемента и оценках (5.8) для дополнения Шура и его предобуславливателя в МДО. Можно, однако, построить предобуславливатель МДО таким образом, чтобы удалить оба указанных множителя. Хотя этот предобуславливатель может быть непосредственно определен и для изученной p-версии, сначала делаем это для другого варианта p-версии, а затем возвращаемся к варианту, рассмотренному в предыдущих параграфах. В рассматриваемом ниже варианте p-версии используем новые базисные элементы $\widehat{\mathcal{E}}_m$, $\widehat{\mathcal{E}}_{m,0}$ вместо $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_0$. Внутренние координатные функции для этих элементов те же, что и для $\widehat{\mathcal{E}}$, $\widehat{\mathcal{E}}_0$, а координатные функции сторон и вершин являются узловыми. Узловые точки вводятся при этом специальным образом, а именно так, чтобы норма $\|\cdot\|_{1/2,\partial\sqcap}$ для следов полиномов, выраженная через узловые значения, была эквивалентна такой же норме кусочно-линейных функций, определенных на $\partial\sqcap$ при равномерной сетке. Это позволяет эффективно использовать простой предобуславливатель Шура, применяемый в h-версии МДО с линейными треугольными элементами.

Введем базисные элементы

$$\widehat{\mathcal{E}}_m = \widehat{\mathcal{E}}_m\{\sqcap, p_{ij}(x),\ 0 \le i, j \le p\},$$
$$\widehat{\mathcal{E}}_{m,0} = \widehat{\mathcal{E}}_{m,0}\{\sqcap, p_{ij}(x) \text{ для } 2 \le i, j \le p,\ \text{для } i = 0, 1,$$
$$j = 2, 3, \ldots, p,\ \text{для } i = 2, 3, \ldots, p,\ j = 0, 1 \text{ и } 0 \le i, j \le 1\},$$

для которых внутренними координатными функциями являются

$$p_{i,j}(x) = \widehat{L}_{i,j}(x) = \widehat{L}_i(x_1)\widehat{L}_j(x_2), \quad 2 \le i, j \le p. \tag{6.1}$$

Для того чтобы определить координатные функции сторон и вершин, рассмотрим неравномерную прямоугольную сетку на $\sqcap$

$$x = \zeta^{(\alpha)} := (\widehat{\zeta}^{(\alpha_1)}, \widehat{\zeta}^{(\alpha_2)}), \quad \widehat{\zeta}^{(l)} := \cos\frac{p-l}{p}\pi, \quad 0 \le \alpha_k, l \le p, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2). \tag{6.2}$$

Множеству $\{\widehat{\zeta}^{(l)}\}$ соответствует одномерный базис Лагранжа

$$p^{(l)}(x) = \prod_{k \ne l} \frac{(x - \widehat{\zeta}^{(k)})}{(\widehat{\zeta}^{(l)} - \widehat{\zeta}^{(k)})}, \quad 0 \le k, l \le p. \tag{6.3}$$

Сопоставим сторонам $x_k = -1$ индексы $i, j = 0$, а сторонам $x_k = 1$ — индексы $i, j = 1$ и определим координатные функции сторон выражениями

$$\begin{aligned} p_{i,j}(x) &= \frac{1}{2}p^{(i)}(x_1)(1 \mp x_2), \quad j = 0, 1, \ \ i = 1, 2, \ldots, p-1, \\ p_{i,j}(x) &= \frac{1}{2}(1 \mp x_1)p^{(j)}(x_2), \quad i = 0, 1, \ \ j = 1, 2, \ldots, p-1. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Координатные функции вершин для базисного элемента $\widehat{\mathcal{E}}_m$ могут быть заданы соотношениями

$$p_{i,j}(x) = p^{(i)}(x_1)p^{(j)}(x_2), \quad i, j = 0, 1. \tag{6.5}$$

Поскольку мы не заботимся о значениях полиномов $p_{i,j}(x)$ во внутренних узлах, можно использовать в качестве координатных функций вершин полиномы, которые являются узловыми только в граничных узлах $\zeta^{(\alpha)} \in \partial\sqcap$. Таким образом, они могут быть определены как полиномы более низкой степени. Достаточно выписать только один из них, например,

$$p_{0,0}(x) = \widehat{L}_{0,0}(x) - \sum_{\ell=1}^{p-1} [\widehat{L}_{0,0}(\widehat{\zeta}^{(\ell)}, -1)p_{\ell,0}(x_2) + \widehat{L}_{0,0}(-1, \widehat{\zeta}^{(\ell)})p_{0,\ell}(x_1)]. \tag{6.6}$$

Пространство следов полиномов из $\mathcal{P}_x^{(p)} = H(\widehat{\mathcal{E}}_m)$ на $\partial\sqcap$ обозначим через $H(\partial\sqcap)$. Очевидно, оно то же, что и для пространства $\mathcal{P}_x^{[p]} = H(\widehat{\mathcal{E}}_{m,0})$. Определим также пространство $\overline{\overline{H}}(\partial\sqcap)$ кусочно-линейных функций, непрерывных на $\partial\sqcap$ и линейных между узлами $\eta^{(\alpha)} \in \partial\sqcap$, определенными ниже. Можно установить взаимно однозначное соответствие $\widehat{v} \Leftrightarrow \overline{\overline{v}}$ между $\widehat{v} \in H(\partial\sqcap)$ и $\overline{\overline{v}} \in \overline{\overline{H}}(\partial\sqcap)$ при помощи равенств

$$\widehat{v}(\zeta^{(\alpha)}) = \overline{\overline{v}}(\eta^{(\alpha)}) \ \ \forall \zeta^{(\alpha)} \in \partial\sqcap, \tag{6.7}$$

где $\eta^{(\alpha)} = (-1 + 2p^{-1}\alpha_1, -1 + 2p^{-1}\alpha_2)$ — узлы равномерной ортогональной сетки на $\sqcap$.

Лемма 6.1. *Для каждого $\widehat{v} \Leftrightarrow \overline{\overline{v}}$, где $\widehat{v} \in H(\partial\sqcap)$ и $\overline{\overline{v}} \in \overline{\overline{H}}(\partial\sqcap)$, справедливы неравенства*

$$\overline{c}_1 |\overline{\overline{v}}|_{1/2,\partial\sqcap} \le |\widehat{v}|_{1/2,\partial\sqcap} \le \overline{c}_2 |\overline{\overline{v}}|_{1/2,\partial\sqcap}, \tag{6.8$_1$}$$

$$c_1 \|\overline{\overline{v}}\|_{1/2,\partial\sqcap} \le \|\widehat{v}\|_{1/2,\partial\sqcap} \le c_1 \|\overline{\overline{v}}\|_{1/2,\partial\sqcap} \tag{6.8$_2$}$$

с абсолютными постоянными $c_k, \overline{c}_k > 0$ (т. е. не зависящими от $\widehat{v}$ и p).

Доказательство. Отображение $x = \widehat{x}(z) : \overline{\sqcap} \to \overline{\sqcap}$, определенное выражениями

$$x_k = \widehat{X}_k(z_k) := -\cos\frac{\pi}{2}(z_k + 1), \tag{6.9}$$

сохраняет норму $\|\widehat{v}\|_{1/2,\partial\sqcap}$, $\widehat{v} \in H(\partial\sqcap)$, т. е. если $\widehat{v} \in H(\partial\sqcap)$ и $v_{\cos}(z) = \widehat{v}(\widehat{X}(z))$, то

$$\underline{c}\, \|v_{\cos}\|_{1/2,\partial\sqcap} \le \|\widehat{v}\|_{1/2,\partial\sqcap} \le \overline{c}\, \|v_{\cos}\|_{1/2,\partial\sqcap} \tag{6.10}$$

с абсолютными постоянными $\underline{c}$, $\overline{c} > 0$. Действительно, для каждой стороны γ_i квадрата $\partial\sqcap$ неравенства

$$\|v_{\cos}\|_{1/2,\gamma_i} \asymp \|\widehat{v}\|_{1/2,\gamma_i} \tag{6.11}$$

эквивалентны (3.9). Теперь остается рассмотреть слагаемые, входящие в $\|\cdot\|_{1/2,\partial\sqcap}$, соответствующие угловым точкам. Достаточно рассмотреть одну вершину, поскольку отображение (6.9) антисимметрично относительно обеих осей z_1, z_2. Выберем вершину $(-1,-1)$ и для простоты обозначений будем записывать $\widehat{v}$, $v_{\cos}$ как функции двух переменных $\widehat{v} = \widehat{v}(x)$, $v_{\cos} = v_{\cos}(z)$. Расстояние $t = 1 + x_k$ вдоль стороны $x_{3-k} = -1$ (для $k = 1, 2$) между точками x_k и -1 для $x_k \in [-1, 0]$ в новых переменных выражается равенством

$$t = 1 + x = 1 - \cos\frac{\pi}{2}(z_k + 1) = 1 - \cos\frac{\pi}{2}t_z = 2\sin^2\frac{\pi}{4}t_z,$$

где, очевидно, $t_z = z_k + 1$ — расстояние вдоль стороны $z_{3-k} = -1$ между точками z_k и -1. Таким образом,

$$\int_0^1 \frac{(\widehat{v}(-1,t) - \widehat{v}(t,-1))^2}{t}dt = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{(v_{\cos}(-1,t_z) - v_{\cos}(t_z,-1))^2}{\sin\frac{\pi}{4}t_z}\cos\frac{\pi}{4}t_z dt_z.$$

Принимая во внимание неравенства

$$\frac{t_z}{2} \le \sin\frac{\pi t_z}{4} \le \frac{\pi}{4}t_z, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \le \cos\frac{\pi}{4}t_z \le 1, \quad t_z \in [0,1],$$

получим

$$2\sqrt{2}\int_0^1 \frac{(v_{\cos}(-1,t) - v_{\cos}(t,-1))^2}{t}dt \le \int_0^1 \frac{(\widehat{v}(-1,t) - \widehat{v}(t,-1))^2}{t}dt \le$$
$$\le \pi\int_0^1 \frac{(v_{\cos}(-1,t) - v_{\cos}(t,-1))^2}{t}dt.$$

Следовательно, неравенства (6.10) выполнены. Соотношение $v_{\cos} \leftrightarrow \overline{\overline{v}}$ означает совпадение в узлах $\eta^{(\alpha)}$ равномерной ортогональной сетки

$$v_{\cos}(\eta^{(\alpha)}) = \overline{\overline{v}}(\eta^{(\alpha)}).$$

Для каждой пары $v_{\cos} \leftrightarrow \overline{\overline{v}}$, определенной на $\partial\sqcap$, выполнены неравенства

$$\|\overline{\overline{v}}\|_{1/2,\partial\sqcap} \prec \|v_{\cos}\|_{1/2,\partial\sqcap} \prec \|\overline{\overline{v}}\|_{1/2,\partial\sqcap}. \tag{6.12}$$

В самом деле, легко получить неравенства

$$\|\overline{\overline{v}}\|_{k,\partial\sqcap} \prec \|v_{\cos}\|_{k,\partial\sqcap} \prec \|\overline{\overline{v}}\|_{k,\partial\sqcap}, \quad k = 0, 1. \tag{6.13}$$

Для одномерного случая, т. е. для каждой стороны, их можно найти, например, в [5] (см. также [6]). Неравенства (6.12) — следствия (6.13) и могут быть получены интерполированием между пространствами $W_2^k(\partial\sqcap)$, $k = 0, 1$. Неравенства (6.10) и (6.12) приводят теперь к (6.8_2). Доказательство (6.8_1) проводится так же, если принять во внимание, что вместе с (6.11) выполнено и соотношение

$$|v_{\cos}|_{1/2,\gamma_i} \asymp |\widehat{v}|_{1/2,\gamma_i}. \qquad \square \tag{6.14}$$

Эта лемма имеет важное следствие. Для его формулировки мы должны описать факторизацию МДО на элементном уровне. В силу условий (4.2), (4.3) эта факторизация определяется факторизацией матрицы жесткости A базисного элемента, порожденной, например, интегралом

Дирихле на пространствах $\mathcal{P}_x^{(p)}$, $\mathcal{P}_x^{[p]}$. При этом подразумевается, что базисы в указанных пространствах соответствуют базисным элементам $\widehat{\mathcal{E}}_m$, $\widehat{\mathcal{E}}_{m,0}$. Матрица A может быть представлена в виде

$$A = \begin{pmatrix} A_I & A_I^{(2)} \\ (A_I^{(2)})^T & A^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

где

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} A_{II} & A_{II,III} \\ A_{III,II} & A_{III} \end{pmatrix}, \quad A_I^{(2)} = (A_{I,II}, A_{I,II}).$$

Это представление допускает факторизацию

$$A = \begin{pmatrix} I_I & 0 \\ (A_I^{(2)})^T A_I^{-1} & I^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_I & 0 \\ 0 & \widehat{S}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_I & A_I^{-1} A_I^{(2)} \\ 0 & I^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{6.16}$$

где I_I, $I^{(2)}$ — единичные матрицы, $\widehat{S}^{(2)} = A^{(2)} - (A_I^{(2)})^T A_I^{-1} A_I^{(2)}$. Предобуславливание матрицы $\widehat{S}^{(2)}$ может быть эффективно выполнено посредством матрицы

$$\widehat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & -1 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ -1 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}^{1/2}, \tag{6.17}$$

записанной в виде, соответствующем нумерации узлов $\zeta^{(\alpha)} \in \partial\sqcap$, например, против часовой стрелки, начиная с $\zeta_{(0,0)} = (-1, -1)$.

Следствие 6.1. Матрицы $\widehat{S}^{(2)}$ и $\widehat{\mathcal{D}}$ спектрально эквивалентны равномерно относительно p, т. е.

$$\widehat{\mathcal{D}} \prec \widehat{S}^{(2)} \prec \widehat{\mathcal{D}}. \tag{6.18}$$

Доказательство следует из (6.8) и неравенств

$$\overline{v}^T \widehat{S}^{(2)} \overline{v} \prec |\widehat{v}|_{1/2,\partial\sqcap} \prec \overline{v}^T \widehat{S}^{(2)} \overline{v}, \tag{6.19}$$

$$\overline{v}^T \widehat{\mathcal{D}} \overline{v} \prec |\overline{\overline{v}}|_{1/2,\partial\sqcap} \prec \overline{v}^T \widehat{\mathcal{D}} \overline{v}. \tag{6.20}$$

Первое отражает эквивалентность двух определений полунормы $|\cdot|_{1/2,\partial\sqcap}$ (см. введение), второе доказано в [7]. $\square$

Для построения предобуславливателя МДО для конечноэлементной системы уравнений, которую вновь запишем в виде $\overline{K}\overline{u} = \overline{f}$, разделим матрицу $\overline{K}$ на блоки аналогично (6.15)

$$\overline{K} = \begin{pmatrix} \overline{K}_I & \overline{K}_I^{(2)} \\ (\overline{K}_I^{(2)})^T & \overline{K}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Блок $\overline{K}_I$ соответствует галёркинским координатным функциям, называемым внутренними. Эти координатные функции — те же, что и в ранее рассмотренной p-версии и соответствуют координатным функциям (6.1) базисного элемента. Предобуславливатель МДО для $\overline{K}$, обозначаемый Λ_D, определяется через обратный к нему как сумма двух матриц

$$\Lambda_D^{-1} := \widetilde{\Lambda}_I^{+} + (\widetilde{\Lambda}^{(2)})^{+}, \tag{6.21}$$

где $\widetilde{\Lambda}_I^+$ такая же, как в (5.1), (5.6). Матрица $(\widetilde{\Lambda}^{(2)})^+$ будет определена ниже на основе предобуславливателя дополнения Шура и оператора продолжения, аналогичного использованному в (5.9).

Дополнение Шура, обозначаемое $S^{(2)}$, есть

$$S^{(2)} = \overline{K}^{(2)} - (\overline{K}_I^{(2)})^T \overline{K}_I^{-1} \overline{K}_I^{(2)}. \tag{6.22}$$

Отметим, что узлы $\zeta^{(\alpha)} \in \partial\sqcap$ базисного элемента определяют граничные узлы элементов $\mathcal{E}_r$ при помощи отображений $x = \overline{x}^{(2)}(y) : \overline{\sqcap} \to \overline{\sqcap}_r$. Эти граничные узлы $\mathcal{E}_r$ обозначаются через $x^{(i)}$, где i — глобальный номер неизвестного и, следовательно, узла. Таким образом, дополнение Шура определено на векторах $\overline{v}_{\mathcal{T}} = \{v^{(i)}\}$ с компонентами $v^{(i)}$, соответствующими узлам $x^{(i)}$, где $i \in W_{\mathcal{T}}^0$, $W_{\mathcal{T}}^0 := \{i : x^{(i)} \in \mathcal{T}\}$. Пусть $\overline{v}_{\mathcal{T},r}$ — сужение вектора $\overline{v}_T$ на узлы $x^{(i)} \in \partial\sqcap_r \backslash \partial\Omega$. Для каждого $r = 1, 2, \ldots, R$ можно определить матрицу $\mathcal{D}_r$ размерности $4p \times 4p$, которая при локальном упорядочении узлов $x^{(i)} \in \partial\sqcap_r$ таком же, какое использовано в (6.17) для граничных узлов базисного элемента, совпадает с $\widehat{\mathcal{D}}$. Матрица $\mathcal{D}$ получается из матриц $\mathcal{D}_r$ при помощи процедуры сборки. Матрица $\mathcal{D}$ определена на векторах размерности, равной количеству узлов $x^{(i)} \in \mathcal{T}$. Вычеркивая строки и столбцы $\mathcal{D}$, соответствующие узлам $x^{(i)} \in \partial\Omega$, получим матрицу $\mathcal{D}^{(2)}$. Эта матрица — эффективный предобуславливатель дополнения Шура $S^{(2)}$, что непосредственно следует из (6.18) и леммы 4.2. Формально матрица $\mathcal{D}^{(2)}$ определяется соотношением

$$\overline{v}_{\mathcal{T}}^T \mathcal{D}^{(2)} \overline{v}_{\mathcal{T}} = \sum_{r=1}^{\mathcal{R}} \overline{v}_{\mathcal{T},r}^T \mathcal{D}_{r,0} \overline{v}_{\mathcal{T},r},$$

где $\mathcal{D}_{r,0}$ — матрица, получаемая из матрицы $\mathcal{D}_r$ вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих узлам $x^{(i)} \in \partial\sqcap_r \cap \partial\Omega$.

Матрица $\mathcal{D}^{(2)}$ — хороший предобуславливатель для матрицы $S^{(2)}$ (см. также ниже (6.23), (6.26)), но она имеет сложную структуру, особенно в случае общих неструктурированных конечноэлементных сеток, и не может быть просто обращена. Известны способы, используя которые на основе $\mathcal{D}^{(2)}$ можно получать эффективные и экономичные предобуславливатели матрицы $S^{(2)}$, не требующие обращения $\mathcal{D}^{(2)}$. Следуя [6], [3], рассмотрим ниже только один такой способ, не самый экономичный, но наиболее простой. Он получается при помощи итерационного метода и оказывается таким, что по крайней мере в p-версии умножение на $(\widetilde{\Lambda}^{(2)})^+$ требует меньше, чем $\mathcal{O}(p^2)$ операций. Вместо решения системы уравнений

$$\mathcal{D}^{(2)} \overline{u}_{\mathcal{T}} = \overline{f}_{\mathcal{T}}$$

прямым методом будем решать ее приближенно методом простых итераций с чебышевскими параметрами

$$\overline{v}_{\mathcal{T}}^{k+1} = \overline{v}_{\mathcal{T}}^k - \tau_k(\mathcal{D}^{(2)} \overline{v}_{\mathcal{T}}^k - f_{\mathcal{T}}).$$

Это приводит к равенствам

$$v_{\mathcal{T}}^{n(\varepsilon)} = \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} \overline{f}_{\mathcal{T}}, \quad \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} = [I - \sqcap_{k=1}^{n(\varepsilon)}(I - \tau_k \mathcal{D}^{(2)})](\mathcal{D}^{(2)})^{-1}.$$

Если $n(\varepsilon)$ выбрано так, что относительная погрешность в норме, порождаемой матрицей $\mathcal{D}^{(2)}$, не превосходит $\varepsilon \le 0.5$, то, очевидно,

$$0.5\widetilde{\mathcal{D}} \le \mathcal{D}^{(2)} \le 1.5\widetilde{\mathcal{D}}, \tag{6.23}$$

и, следовательно, матрица $\widetilde{\mathcal{D}}$ — почти такой же хороший предобуславливатель дополнения Шура, как и $\mathcal{D}^{(2)}$.

Замечание 6.1. Нетрудно установить, что число обусловленности матрицы $\mathcal{D}^{(2)}$ — величина $\mathcal{O}(p/h)$. Таким образом, для обеспечения точности $\varepsilon \le 0.5$ достаточно выполнить $\mathcal{O}(\sqrt{p/h})$ итераций. Каждое умножение на $\mathcal{D}^{(2)}$ можно выполнить параллельно, поэлементно при помощи матриц $\mathcal{D}_r$. Умножение на матрицу $\mathcal{D}_r$, которая для любого r равна $\widehat{\mathcal{D}}$ или сужению $\widehat{\mathcal{D}}$, получаемому вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих узлам, лежащим на $\partial \sqcap_r \cap \partial\Omega$, может быть выполнено за $\mathcal{O}(p \log p)$ операций. Таким образом, объем вычислений для умножения на $\mathcal{D}^{(2)}$ и $\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}$ есть $\mathcal{O}(Rp \log p) = \mathcal{O}(h^{-2} p \log p)$ и $\mathcal{O}(\sqrt{p/h} Rp \log p) = \mathcal{O}(h^{-2.5} p^{1.5} \log p)$ соответственно. Легко видеть также, что если конечноэлементная сетка топологически эквивалентна прямоугольной, то умножение на $\mathcal{D}^{(2)}$ с использованием быстрого дискретного преобразования Фурье может быть организовано в такой форме, что потребует $\mathcal{O}(ph^{-1} \log ph^{-1})$ операций. Умножение при этом можно выполнить параллельно на каждой линии сетки.

Введем некоторые обозначения

$H^0(\mathcal{T})$ для пространства следов функций из $H^0(\Omega)$ на множестве $\mathcal{T}$ границ конечных элементов;

$V^0_{\mathcal{T}} = I\!R^{\mathcal{N}_{II}+\mathcal{N}_{III}}$ для пространства векторов с компонентами, являющимися значениями функций $\widetilde{v} \in H^0(\Omega)$ в узлах $x^{(i)} \in \mathcal{T}_0$;

$V^0 = I\!R^{\mathcal{N}}$ для пространства векторов, имеющих компонентами все коэффициенты в представлении $\widetilde{v} \in H^0(\Omega)$ в галёркинском базисе, т. е. $\mathcal{N} = \mathcal{N}_I + \mathcal{N}_{II} + \mathcal{N}_{III}$.

Необходимый далее оператор продолжения $P : V^0_{\mathcal{T}} \to V^0$ определяется тем же способом, что и аналогичный оператор в § 5. Положим, что $\widehat{P}_{\mathcal{E}} : H(\partial\sqcap) \to H(\mathcal{E})$ — такой оператор продолжения для базисного элемента, что для каждого $\widehat{u}_{\partial\sqcap} \in H(\partial\sqcap)$

$$|\widehat{P}_{\mathcal{E}} u_{\partial\sqcap}|_{1,\sqcap} \le c |\widehat{u}_{\partial\sqcap}|_{1/2,\partial\sqcap},$$

где $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{E}}_m$ или $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{E}}_{m,0}$, а $H(\mathcal{E}) = P^{(p)}_x$ или $H(\mathcal{E}) = P^{[p]}_x$ соответственно, c — абсолютная постоянная. Оператор $\widehat{P}_\epsilon$ однозначно определяет такой оператор продолжения $\widetilde{P} : H^0(\mathcal{T}) \to H^0(\Omega)$, что для любой $\widetilde{v}_{\mathcal{T}} \in H^0(\mathcal{T})$ ее продолжение $\widetilde{v} = \widetilde{P}\widetilde{v}_{\mathcal{T}}$ определено поэлементно равенствами

$$\widetilde{v}(\overline{x}^{(2)}(y)) = \widehat{P}_{\mathcal{E}}(\widetilde{v}_{\mathcal{T}}(\overline{x}^{(2)}(y)) \,|_{\partial\sqcap}), \quad y \in \overline{\sqcap}, \quad r = 1, 2, \ldots, R.$$

Оператор P — матричная форма оператора $\widetilde{P}$ в конечноэлементном базисе Галёркина. Положим теперь

$$(\widetilde{\Lambda}^{(2)})^+ = P \widetilde{\mathcal{D}}^{-1} P^T.$$

Теорема 6.1. *Пусть $\overline{K}$ — конечноэлементная матрица, соответствующая базисному элементу $\widehat{\mathcal{E}}_m$. Пусть далее выполнены неравенства* (4.2) *и условия леммы* 4. *Тогда*

$$c_1 \Lambda_D \le \overline{K} \le c_2 \Lambda_D \tag{6.24}$$

с положительными, не зависящими от p и h постоянными.

Доказательство. Под матрицей $\Lambda_{p,h}$ понимаем матрицу (4.7). Неравенства (6.24) следуют из доказываемых ниже оценок

$$\Lambda_D \prec \Lambda_{p,h} \prec \Lambda_D \tag{6.25}$$

и неравенств первой строки в (4.9), которые выполнены для рассматриваемых матриц $\Lambda_{p,h}$, $\overline{K}$. Для доказательства неравенств (6.25) разложим пространство V^0 в сумму $V^0 = V_I + V^0_{(\mathcal{T})}$, где $V^0_{(\mathcal{T})} := PV^0_{\mathcal{T}}$. Сопоставим V^0 квадратичную форму, порожденную матрицей $\Lambda_{p,h}$, а пространствам V_I, $V^0_{(\mathcal{T})}$ — определенные на них операторы $B_1 = (\widetilde{\Lambda}^+_I)^+$ и $B_2 = ((\widetilde{\Lambda}^{(2)})^+)^+$. Поскольку (6.18), (6.23) приводят к неравенствам

$$\widetilde{\mathcal{D}} \prec S^{(2)} \prec \widetilde{\mathcal{D}}, \tag{6.26}$$

то далее доказательство аналогично доказательству леммы 5.1. $\square$

Результаты данного параграфа можно использовать для p-версии с иерархическими координатными функциями, рассмотренной в § 1–§ 5. Каждый одномерный полином $u \in \mathcal{P}_{p,x}$, обращающийся в нуль при $x = \pm 1$, можно представить в виде

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p-1} d_i p^{(i)}(x) = \sum_{i=2}^{p} a_i \widehat{L}_i(x),$$

где $(p^{(i)}(x))$ — интерполяционный базис Лагранжа (6.3). Векторы $\overline{d} = \{d_i\}$, $\overline{a} = \{a_I\}$ связаны невырожденной матрицей G: $\overline{d} = G\overline{a}$. При помощи этой матрицы и матрицы

$$\widehat{\widehat{\mathcal{D}}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \emptyset \\ & & \cdots & & \\ & & & \cdots & \\ \emptyset & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}^{1/2}$$

размерности $(p-1) \times (p-1)$ однозначно определяется матрица

$$\widehat{S}_m := G^T \widehat{\widehat{\mathcal{D}}} G.$$

Здесь сохраняются те же обозначения $\widehat{S}_{II}$, $\widehat{S}_\Lambda$, что и в § § 3, 5 для предобуславливателей дополнения Шура базисного элемента, а также для полной конечноэлементной задачи, т. е. для матриц S_{II}, S_Λ, несмотря на то, что здесь они определяются иначе. А именно, в определении $\widehat{S}_{II}$ вместо матрицы $\widehat{S}_0$, заданной посредством (3.6), использована матрица $\widehat{S}_m$, а $\widehat{S}_\Lambda$ определяется равенством

$$\widehat{S}_\Lambda = \begin{pmatrix} \widehat{S}_m & & & 0 \\ & \widehat{S}_m & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \widehat{S}_m \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Матрица $\widehat{S}_\Lambda$ в свою очередь позволяет определить матрицы $\widetilde{\Lambda}_{II}^{+}$ и Λ_D^{-1} при помощи соотношений (5.1), (5.7).

Теорема 6.2. *При выполнении условий теоремы* 5.1 *для определенного соотношениями* (5.1), (5.7), (6.27) *предобуславливателя МДО* Λ_D *справедливы оценки*

$$c_1(1 + \log p)^{-1} \Lambda_D \le \overline{K} \le c_2 \Lambda_D \tag{6.28}$$

с положительными постоянными, зависящими от μ_1, μ_2, $\alpha^{(1)}$, θ, $\partial\Omega$, *но не от* p *и* h.

Доказательство теоремы совпадает с доказательством теоремы 5.2, за исключением того, что вместо (5.8), (5.15) используется спектральная эквивалентность матриц $\widehat{S}_\Lambda$, S_Λ и, следовательно, Λ_D, $\widetilde{\Lambda}_{p,h}$. Спектральная эквивалентность матриц $\widehat{S}_{II}$, S_{II} и матриц $\widehat{S}_\Lambda$, S_Λ доказывается тем же способом, что и спектральная эквивалентность матриц $\widehat{\mathcal{D}}$, $\widehat{S}^{(2)}$ и матриц $\mathcal{D}^{(2)}$, $S^{(2)}$. Таким образом, принимая во внимание (4.9), приходим вместо оценок теоремы 5.2 к неравенствам (6.28). $\square$

Замечание 6.2. Решение системы $\widehat{\widehat{\mathcal{D}}}x = y$ может быть выполнено при помощи быстрого дискретного преобразования Фурье за $\mathcal{O}(p \log p)$ операций. Решение системы $Gx = y$ при помощи общих прямых методов требует большого числа операций, т. к. матрица G заполненная. Однако она может быть факторизована так, чтобы вычислительная работа была существенно уменьшена. Рассмотрим вместо G такую матрицу G_+, что $G_+\overline{d} = \overline{a}$ для векторов коэффициентов разложений

$$u(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i \widehat{L}_i = \sum_{i=0}^{p} d_i p^{(i)}(x), \quad u \in P_{p,x}.$$

При факторизации $G_+ = VW$, где W — треугольная матрица, определенная в замечании 3.3, умножение на V и решение системы $Vx = y$ может быть выполнено при помощи быстрого дискретного преобразования Фурье за $\mathcal{O}(p \log p)$ операций. Таким образом, количество операций, необходимое для решения системы $\widehat{S}_m x = y$, есть $\mathcal{O}(p^2)$.

7. Замечания об алгоритмах

Целесообразно обсудить некоторые характерные свойства алгоритмов реализации предлагаемых МДО. Предположим для определенности и простоты изложения, что для решения системы (4.5) применяется предобусловленный метод простых итераций

$$\overline{d}_k = \tau^{-1}(\overline{f} - \overline{K}\overline{u}_k), \tag{7.1}$$

$$\overline{\delta}_k = \Lambda_D^{-1}\overline{d}_k, \tag{7.2}$$

$$u_{k+1} = u_k + \overline{\delta}_k. \tag{7.3}$$

Предположим также, что Λ_D есть простейший из предлагаемых в работе предобуславливателей, определенный в § 5 и фигурирующий в теореме 5.2. В качестве постоянного итерационного параметра можно взять

$$\tau = 2(1 + \log p)^2/(c_{1,D} + c_{2,D}(1 + \log p)^3) \tag{7.4}$$

и положить $u_0 = 0$. Тогда в соответствии с теоремой 5.2

$$\|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} \le \mu_1^{-1}\mu_2\rho^k \|\widetilde{u}\|_{1,\Omega} \le \mu_1^{-1}\mu_2\rho^k \|f\|_{-1,\Omega} \tag{7.5}$$

со знаменателем

$$\rho = [c_{2,D}(1 + \log p)^3 - c_{1,D}]/[c_{2,D}(1 + \log p)^3 + c_{1,D}], \tag{7.6}$$

а $\widetilde{u}_k, \widetilde{u} \in H_h^0(\Omega)$, $\widetilde{u}_k, \widetilde{u} \leftrightarrow \overline{u}_k, \overline{u}$. Таким образом, для того чтобы приближение $\widetilde{u}_k \leftrightarrow \overline{u}_k$ обеспечивало точность ε в норме $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, необходимо $k = \mathcal{O}((1 + \log p)^3 \log \varepsilon^{-1})$ итераций. Предобуславливатели, фигурирующие в теоремах 6.1, 6.2, требуют $k = \mathcal{O}(\log \varepsilon^{-1})$ и $k = \mathcal{O}((1 + \log p)\log \varepsilon^{-1})$ итераций соответственно. Обсудим только вычисления, соответствующие (7.2), поскольку (7.1), (7.3) не зависят от предобуславливателя (за исключением итерационного параметра τ). Таким образом, эффективность предобуславливателя, кроме того, что он обеспечивает нужное обобщенное число обусловленности, напрямую зависит от сложности операции $\overline{\delta} = \Lambda_D^{-1}\overline{d}$; индекс "$k$" опущен. Это заключение справедливо и при использовании вместо (7.1)–(7.3) более сложных итерационных процедур.

Перед описанием последовательности операций, требующихся для вычисления $\overline{\delta} = \Lambda_D^{-1}\overline{d}$, полезно отметить два специфических свойства данного предобуславливателя. Первое состоит в том, что все слагаемые в выражении

$$\Lambda_D^{-1} := \widetilde{\Lambda}_I^+ + \widetilde{\Lambda}_{II}^+ + \widetilde{\Lambda}_{III}^+ \tag{7.7}$$

определяются при помощи шести стандартных матриц: одна размерности 4×4, четыре размерности $(p-1) \times (p-1)$ и одна прямоугольная матрица $(p-1)^2 \times (p-1)$. Второе состоит в том, что здесь в действительности нет нужды собирать матрицу Λ_D^{-1}, а умножение на $\widetilde{\Lambda}_I^+ + \widetilde{\Lambda}_{II}^+$ может быть выполнено в параллельном режиме для каждой стороны и каждого элемента. При вычислениях все указанные стандартные матрицы используются для каждого элемента. Как следствие, вычисления, соответствующие (7.2), не зависят от конкретного вида дифференциального уравнения в частных производных, но в некоторой степени зависят от структуры конечноэлементной сетки. Это может быть недостатком, когда коэффициенты дифференциального уравнения слабо меняются на каждом элементе, но существенно меняются вблизи их границ. Однако легко видеть, что предобуславливатель может быть видоизменен так, что быстрое изменение коэффициентов не будет влиять на обобщенное число обусловленности и сложность операции (7.2).

Поскольку Λ_D^{-1} — сумма трех матриц, умножение на каждую из них может выполняться параллельно.

Умножение $\overline{\delta}_I = \widetilde{\Lambda}_I^{+}\overline{d}$. Эта операция требует решения $\mathcal{R}$ задач

$$\widehat{A}_{1,0}\overline{\delta}_I^{(r)} = \overline{d}^{(r)}, \quad r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}, \tag{7.8}$$

для каждого элемента, где $\overline{\delta}_I^{(r)}$, $\overline{d}^{(r)}$ — подвекторы векторов $\overline{\delta}_I$, $\overline{d}$, содержащие внутренние коэффициенты, соответствующие элементу $\mathcal{E}_r$. После того, как все подвекторы $\overline{\delta}_I^{(r)}$ вычислены, вектор $\overline{\delta}_I$ получается добавлением нулей на места, соответствующие неизвестным сторон и вершин. Матрица $\widehat{A}_{1,0}$, используемая во всех задачах (7.8), в соответствии с (5.4) может быть определена, например, при помощи двух матриц $\widehat{\mathcal{D}}$ и $\widehat{\triangle}$, размерности $(p-1)\times(p-1)$. Мы не рассматриваем здесь оптимальные методы решения (7.8). Среди прочих можно упомянуть метод вложенных сечений. Вследствие специальной структуры матрицы $\widehat{A}_{1,0}$ он требует $\mathcal{O}(p^3)$ арифметических операций. Однако устойчивость метода в этом случае требует дополнительного изучения.

Умножение $\overline{\delta}_{II} = \widetilde{\Lambda}_{II}^{+}\overline{d}$. Для отыскания $\overline{\delta}_{II}$ необходимо выполнить следующее:

a) вычислить сужение

$$\overline{c}^{(II)} = P^T\overline{d}, \tag{7.9}$$

b) решить систему

$$\widehat{S}_\Lambda\overline{b}^{(II)} = \overline{c}^{(II)}, \tag{7.10}$$

c) вычислить продолжение

$$\overline{\delta}_{II} = P\overline{b}^{(II)}\ . \tag{7.11}$$

Пусть $P_\mathcal{E}$ — матрица оператора продолжения $\widehat{P}_\mathcal{E}$ базисного элемента. Очевидно,

$$P_\mathcal{E} = P_{1,\mathcal{E}} + P_{2,\mathcal{E}} + P_{3,\mathcal{E}} + P_{4,\mathcal{E}}, \tag{7.12}$$

где $P_{i,\mathcal{E}}$ определяет продолжение со стороны γ_i. Поскольку при подходящем упорядочении компонент соответствующих векторов все $P_{i,\mathcal{E}}$ совпадают, будем использовать для них одно и то же обозначение $P_{\mathcal{S},E}$. Эта матрица имеет вид

$$P_{\mathcal{S},E} = \begin{pmatrix} P_{(\mathcal{S},E)} \\ I \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

где I — единичная матрица размерности $(p-1)\times(p-1)$, $P_{(\mathcal{S},E)}$ — прямоугольная матрица размерности $(p-1)^2\times(p-1)$. Введем обозначения T_n, $Q_\mathcal{S}$ для стороны, которая не лежит на $\partial\Omega$, и для числа таких сторон так, что $n = 1, 2, \ldots, Q_\mathcal{S}$, а также обозначения $r = r_1(n)$, $r_2(n)$ для номеров двух смежных элементов, имеющих общей стороной T_n. Теперь (7.9) может быть выполнено в два этапа:

i) для всех $n = 1, 2, \ldots, Q_\mathcal{S}$ и $r = r_1(n), r_2(n)$ найдем

$$\overline{c}_r^{[n]} = P_{(\mathcal{S},E)}^T\overline{d}^{(r)}, \tag{7.14}$$

ii) для всех $n = 1, 2, \dots, Q_{\mathcal{S}}$ найдем суммы

$$\overline{c}^{[n]} = c^{[n]}_{r_1(n)} + c^{[n]}_{r_2(n)} + \overline{d}^{[n]},$$

где $c^{[n]}_{r_1(n)}$, $c^{[n]}_{r_2(n)}$, $\overline{d}^{[n]}$ — подвекторы $(p-1)$ переменных, соответствующих стороне T_n. Эти подвекторы содержат все компоненты вектора $\overline{c}^{(II)}$.

Обратимся к шагу b). В § 5 матрица $\widehat{S}_\Lambda$ была определена как блочно-диагональная матрица с равными $(p-1)\times(p-1)$ блоками

$$2(1+\log p)^{-1}\widehat{S}_0.$$

Шаг b) требует решения $Q_{\mathcal{S}}$ систем

$$\widehat{S}_0\overline{b}^{[n]} = \frac{1}{2}(1+\log p)\overline{c}^{[n]}; \tag{7.15}$$

это может быть просто выполнено, если принять во внимание замечание 3.3.

Шаг c) также легко выполняется поэлементно для всех $r = 1, 2, \dots, \mathcal{R}$. Для каждого элемента необходимо выполнить два шага:

i_o) найти продолжение

$$\overline{\delta}^{(r)}_{II,n} = P_{(\mathcal{S},E)}\overline{b}^{[n]}$$

для каждой стороны T_n, $n = n_i(r)$, $i = 1, 2, 3, 4$, элемента $\mathcal{E}_r$,

ii_o) просуммировать продолжения

$$\overline{\delta}^{(r)}_{II} = \overline{\delta}^{(r)}_{II,n_1} + \dots + \overline{\delta}^{(r)}_{II,n_4}.$$

Подвекторы $\overline{b}^{[n]}, \overline{\delta}^{(r)}_{II}$ содержат все элементы вектора $\overline{\delta}_{II}$. А именно, они суть сужения вектора $\overline{\delta}_{II}$ на сторону T_n и на внутренность элемента $\mathcal{E}_r$ соответственно.

Умножение на $\widetilde{\Lambda}^+_{II}$, т. е. шаги a), b), c) выполняются при помощи трех основных матриц $P_{(\mathcal{S},E)}$, W и Λ (две последние введены в § 3). Это требует $\mathcal{O}(p^3)$ арифметических операций на каждом элементе, а всего — $\mathcal{O}(\mathcal{R}p^3)$.

Умножение $\overline{\delta}_{III} = \widetilde{\Lambda}^+_{III}\overline{d}$. Эта операция выполняется путем решении системы

$$\Lambda_{III}\overline{\delta}^{(III)} = \overline{d}^{(III)}, \tag{7.16}$$

где $\overline{\delta}^{(III)}$, $\overline{d}^{(III)}$ — подвекторы векторов $\overline{\delta}_{III}$, $\overline{d}$. Вектор δ_{III} получается продолжением нулями вектора $\overline{\delta}^{(III)}$.

Пусть $A = A_1$ или $A = A_1 + h^2 A_0$ — это 4×4-матрицы базисного элемента, соответствующие $p = 1$. Матрица Λ_{III} собирается из матриц жесткости элементов, которые в точности совпадают с A. Система (7.16) — единственная глобальная система, которую необходимо решать на каждой итерации. Для решения системы (7.16) можно применить некоторый вспомогательный итерационный метод с фиксированным числом вспомогательных итераций на всех итерациях (7.1)–(7.3), обеспечивающим выполнение (5.14). В этом случае сборка матрицы Λ_{III} не нужна, а (7.7) соответствует равенство $\overline{\delta} = \overline{\delta}_I + \overline{\delta}_{II} + \overline{\delta}_{III}$.

Алгоритмы вычисления $\Lambda_D^{-1}\overline{d}$ для двух других предобуславливателей, введенных в § 6, немного отличаются от описанных и требуют, например, использования быстрого дискретного преобразования Фурье. Это происходит вследствие отличия в определении предобуславливателя дополнения Шура. Объем вычислений при таком Λ_D^{-1} по порядку относительно p тот же, что и выше.

Замечание 7.1. Нами рассмотрены два типа методов Дирихле–Дирихле декомпозиции области, в одном из которых переменные, соответствующие вершинам отщепляются, а в другом — нет. Для первого типа методов в § § 5, 6 введено два предобуславливателя дополнения Шура, обозначенных $\widehat{S}_\Lambda$, а для второго типа — один, обозначенный $\widetilde{\mathcal{D}}$. Эти предобуславливатели могут быть использованы не только в рамках изучаемых здесь МДО, но также и в других методах, в частности, в таких, в которых на первом шагу выполняется исключение внутренних неизвестных, а затем при помощи некоторого итерационного метода решается задача сопряжения с использованием соответствующего дополнения Шура. Оценки скорости сходимости таких предобусловленных итерационных методов следуют из полученных в работе оценок обобщенных чисел обусловленности предобуславливателей дополнения Шура. Например, использование предобуславливателя $\widetilde{\mathcal{D}}$ потребует $\mathcal{O}(\log \varepsilon^{-1})$ простых итераций. Это легко устанавливается с помощью леммы 4.2 и неравенств (6.12), (6.17).

Есть еще один вариант реализации МДО типа Дирихле–Дирихле, для которого результаты данной работы применяются без каких-либо изменений. Проиллюстрируем это, рассматривая для определенности предобуславливатель Λ_D из теоремы 6.2.

Представляя оператор продолжения P (см. (5.7)) в форме

$$P = \begin{pmatrix} P_{I,II} \\ I \end{pmatrix}, \tag{7.17}$$

введем $N \times N$ матрицы

$$\Xi := \begin{pmatrix} I & P_{I,II} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \qquad \Psi^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{S}_\Lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

и $\Lambda_L = \Xi^T \Lambda_D \Xi$. Нетрудно показать, что

$$\Lambda_L^{-1} := \widetilde{\Lambda}_I^+ + \Psi^+ + \widetilde{\Lambda}_{III}^+. \tag{7.19}$$

Отсюда следует, что для матриц Λ_L и $\overline{K}_L := \Xi^T \overline{K} \Xi$ справедливы неравенства, идентичные (6.28),

$$c_1(1 + \log p)^{-1}\Lambda_L \le \overline{K}_L \le c_2 \Lambda_L. \tag{7.20}$$

Предобуславливатель Λ_L, как видно из (7.18), (7.19), не требует выполнения операций сужения и продолжения на каждой итерации. Вместо этого необходимо преобразовать систему (4.5) к виду

$$\overline{K}_L \overline{u}_L = \overline{f}_L, \quad \overline{f}_L = \Xi^T \overline{f}. \tag{7.21}$$

Это преобразование может быть выполнено в соответствии с приведенными ранее формулами после вычисления матрицы $\overline{K}$ и вектора $\overline{f}$, но прямое вычисление $\overline{K}_L$, $\overline{f}_L$, порождаемое соответствующим преобразованием координатных функций сторон базисного элемента, может оказаться экономичнее. Новые граничные координатные функции получаются путем продолжения внутрь квадрата $\sqcap$ следов старых координатных функций $\widehat{L}_{i.j} \in \mathcal{M}_{II}$ на $\partial\sqcap$ при помощи оператора продолжения $\widehat{P}_\mathcal{E}$, фигурирующего в (5.9). На практике, однако, матрицы жесткости элементов всегда вычисляются сначала в некотором простом базисе на базисной конфигурации, а затем преобразуются в соответствии с текущим базисом. Такой простой базис может быть сформирован из мономов $x_1^i x_2^j$ или из интегрированных полиномов Лежандра $\widehat{L}_{i,j}$ и т.д. Часто базис $\mathcal{M}_\sqcap$ оказывается одним из наиболее удобных, например, в случае эллиптического уравнения с постоянными на каждом элементе коэффициентами. В этом и других случаях оба способа получения (7.20) сравнимы по вычислительным затратам. Сравнение вычислительных затрат вариантов МДО, представленных выше, зависит от заполненности матриц $\overline{K}$, $\overline{K}_L$. Даже если $\overline{K}$ — разреженная матрица, как в упомянутом выше случае постоянных коэффициентов, $\overline{K}_L$ может иметь достаточное заполнение блоков, соответствующих неизвестным сторон и вершин, что может компенсировать отсутствие операций продолжения и сужения на каждой итерации. По этой причине для h-версии с невысоким порядком элементов используется только первый вариант, в то время как для p-версии с высоким порядком элементов предпочтительным может оказаться второй вариант.

Подобно (7.18)–(7.21) можно так преобразовать (4.5) и предобуславливатель Λ_D, фигурирующий в теореме 6.1, при помощи трансформирующей матрицы Ξ, что можно будет вновь избежать операций продолжения и сужения, но сохранить эффективность предобуславливателя преобразованной системы.

В данной работе всегда предполагалось выполнение обобщенных условий квазиравномерности конечноэлементной сетки. Однако легко видеть, что теоремы 6.1, 6.2 остаются справедливыми, если предположить, что неравенства (4.3) выполнены для $h = h(r)$. Таким образом, результаты работы применимы и для геометрически неоднородных сеток.

Литература

1. Корнеев В.Г., Енсен С. Е *Эффективное предобуславливание методом декомпозиции области для p-версии с иерархическим базисом.* I // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 37–56.
2. Babuška I., Craig A., Mandel J., and Pitkäranta J. *Efficient preconditioning for the p–version finite element method in two dimensions* // SIAM J. Numer. Anal. – 1991. – V. 28. – № 3. – P. 624–661.
3. Nepomnyaschikh S.V. *Method of splitting into subspaces for solving elliptic boundary value problems in complex-form domains.* Russian (cont. Sov.) // J. Numer. Anal. & Math. Model. – 1991. – V. 6. – № 2. – P. 151–168.
4. Lions P.L. *On the Schwarz alternating methods.* I. In: Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, ed. R. Glowinski et al. // Philadelphia. SIAM. – 1988. – P. 1–42.
5. Bahlmann D. and Korneev V.G. *Comparison of high order accuracy finite element methods: nodal points selection and preconditioning.* – Preprint Nr. 237/7. – Chemnitz, Technische Universität Chemnitz, Jg., 1993.
6. Иванов С.А., Корнеев В.Г. *Построение координатных функций высокого порядка и предобуславливание в рамках метода декомпозиции области* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 4. – С. 62–81.
7. Dryja M. *A finite element capacitance method for elliptic problems on regions partitioned into substructures* // Numer. Math. – 1984. – V. 44. – P. 153–168.

Санкт-Петербургский государственный университет

Университет штата Мэриленд (США)

Поступила 25.02.1998