И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 519.6

Л.А. КРУКИЕР, Т.Н. СУББОТИНА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТРЕУГОЛЬНЫХ КОСОСИММЕТРИЧНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

1. Введение

С начала 60-х гг., времени интенсивного использования разностных схем для решения сложных научно-технических проблем, возникла дилемма о том, какую из схем, явную или неявную, использовать для решения задачи. Явные схемы просты в реализации, но неустойчивы при увеличении шага по времени, неявные схемы не накладывают ограничений на шаг по времени, но требуют на каждом временно́м слое решения системы линейных алгебраических уравнений, что усложняет алгоритм. За это время было предложено несколько типов разностных схем [1]–[5] таких, как схема переменных направлений, схема дробных шагов (расщепления по физическим переменным), схемы с пересчетом (предиктор-корректор), схемы с факторизованным оператором верхнего слоя, сочетающих простоту реализации и возможность использования любых шагов по времени для решения задачи.

Предложенные в данной работе треугольные кососимметричные разностные схемы относятся к классу схем, эффективно решающих задачи, т. к. треугольные матрицы легко обратимы и не требуют большого числа арифметических действий. Вместе с тем, показано, что разностные схемы такого класса устойчивы. Теоретические исследования проводились на основе известных результатов теории устойчивости операторно-разностных схем и операторных неравенств [6], [7]. Результаты, изложенные в статье, справедливы для разностных операторов по пространству, обладающих свойством диссипативности, т. е. несамосопряженных операторов, у которых симметричная часть положительно определена. Разностные операторы, обладающие такими свойствами, могут быть получены при аппроксимации достаточно широкого класса научно-технических проблем [8].

2. Постановка задачи и методы ее решения

Динамическую задачу конвективно-диффузионного переноса вещества в случае двух пространственных переменных можно записать в "симметричной" форме [8], учитывая несжимаемость среды ($\operatorname{div}\vec{V}=0$),

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{\mathrm{Pe}}\Delta\varphi+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1\varphi}{\partial x}+v_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v_2\varphi}{\partial y}+v_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)=f(x,y,t),\\
\varphi\big|_{t=0}=\varphi_0(x,y),\\
\varphi\big|_{\partial D}=\varphi_{\text{гр}},\\
D=[0,1]\times[0,1].
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00005-а) и программы "Университеты России" (проект УР.03.01.024).

В уравнении (1) $\vec{V} = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ — вектор скорости движения среды, первое слагаемое соответствует динамике задачи, второе слагаемое — диффузионному переносу, а остальные — конвективному переносу.

После аппроксимации пространственных производных уравнения (1) на стандартном пятиточечном шаблоне, где конвективная часть аппроксимируется центральными разностями, получаем операторно-разностную схему [6]

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + A y_k = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

$$y_0 = u_0. \tag{3}$$

Здесь A, B — линейные операторы (матрицы) в H, H — вещественное конечномерное гильбертово пространство, $f, y_0 \in H$, y_0 — начальное условие, y_k — решение задачи (1) на k-м шаге по времени, A — разностный оператор в области D, τ — шаг по времени.

Определение ([6]). Разностная схема (2), (3) называется ρ-устойчивой по начальным данным (при $f = 0$), если существуют такие постоянные $\rho > 0$ и M_1, не зависящая от τ, n, что при любых n и при всех $y_n \in H$ для решения y_{n+1} разностного уравнения (2) справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\| \leq \rho \|y_n\|,$$

причем $\rho^n \leq M_1$.

Представим матрицу A в виде суммы симметричной и кососимметричной частей

$$A = A_0 + A_1, \quad A_0 = 0{,}5\,(A + A^*), \quad A_1 = 0{,}5\,(A - A^*), \quad A_1 = K_B + K_H,$$

где K_B и K_H — верхняя и нижняя треугольные части матрицы A_1, $K_B = -K_H^*$. По следствию 1 из теоремы 12 ([6], с. 121) если симметричная часть $A_0 = 0{,}5(A + A^*)$ оператора A неотрицательна (оператор A называется в этом случае диссипативным) и оператор B можно записать в виде $B = L + \sigma\tau A$, где σ — число, $L = L^* > 0$, то при $\sigma \geq 0{,}5$ схема (2), (3) устойчива по начальным данным в H_L с постоянной $\rho = 1$, т. е. выполняется оценка $\|y_{n+1}\|_L \leq \|y_n\|_L$, $n = 1, 2, \ldots$

Пусть

$$B = B_C + \omega K_H, \quad B_C = B_C^*, \tag{4}$$

где B_C — произвольный пока оператор. Заметим, что симметричная часть оператора B имеет вид $B_0 = B_C + 0{,}5\omega\,(K_H - K_B)$. Тогда

$$B = B_C + \omega K_H - 0{,}5\omega\,(A_0 + K_B - K_H) + 0{,}5\omega\,(A_0 + K_B - K_H) =$$
$$= B_C + 0{,}5\omega\,(K_H - K_B) - 0{,}5\omega A_0 + 0{,}5\omega\,(A_0 + K_B + K_H) = B_0 - 0{,}5\omega A_0 + 0{,}5\omega A.$$

Обозначим $L = B_0 - 0{,}5\omega A_0$. Тогда $L = B_C + 0{,}5\omega\,(K_H - K_B) - 0{,}5\omega A_0 = L^*$, т. к. $B_C = B_C^*$, $K_B = -K_H^*$ и $A_0 = A_0^*$ и $B = L + 0{,}5\omega A$. Потребуем $L = L^* > 0$. Это приводит к операторному неравенству $B_0 > 0{,}5\omega A_0$.

Используя приведенное ранее следствие из [6] и полагая $\sigma = 0{,}5\omega/\tau$, получаем, что при $\sigma \geq 0{,}5$ схема (2), (3) устойчива по начальным данным в H_L, ограничение на шаг по времени имеет вид $\tau \leq \omega$.

На основании изложенного выше имеет место

Теорема 1. *Пусть оператор A диссипативен, оператор B представим в виде* (4). *Если при этом*

$$0 < \tau \leq \omega \tag{5}$$

и выполнено операторное неравенство

$$0 < 0{,}5\omega A_0 < B_0, \tag{6}$$

где $B_0 = B_C + 0{,}5\omega\,(K_H - K_B)$, *то схема* (2), (3) *устойчива в* H_L, $L = B_0 - 0{,}5\omega A_0$.

В достаточном условии (6) есть свобода в выборе оператора B_C. Рассмотрим несколько вариантов его построения.

Следствие. Если оператор A диссипативен, оператор B представи́м в виде (4), причем

$$B_C = D + 0{,}5\omega\alpha_i E, \tag{7}$$

где $D = D^* \geq 0$, $M = A_0 + K_B - K_H$, m_{ij} — элементы матрицы M, 1) $\alpha_i = \alpha = \|M\|$ или 2) $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{N} |m_{ij}|$, $i = 1, \ldots, N$, то при выполнении условия (5) схема (2), (3) устойчива в H_L, $L = D + 0{,}5\omega\,(\alpha_i E - M)$.

Доказательство. По условиям теоремы 1 схема (2), (3) устойчива в H_L при выполнении неравенств (5) и (6). Если оператор B_C имеет вид (7), то $L = B_0 - 0{,}5\omega A_0 = D + 0{,}5\omega\,(\alpha_i E - M)$, и неравенство (6) будет выполнено, если $D + 0{,}5\omega\,(\alpha_i E - M) > 0$. Учитывая $D = D^* \geq 0$, получаем, что в случае 1) неравенство $\alpha_i E \geq M$ выполняется по [9], в случае 2) это неравенство выполняется по теореме Гершгорина [10].

Достаточные условия устойчивости схемы (2), (3) по начальным данным, приведенные выше, имеют свободные параметры:

— симметричную положительно-определенную матрицу D,

— параметр ω в операторе B.

Ранее, при исследовании сходимости итерационных методов были рассмотрены различные частные случаи выбора параметра ω: $\omega = 2\tau$ [11], $\omega = \tau$ [12].

Приведем несколько теорем из этих работ, дающих достаточные условия устойчивости в этих случаях.

Теорема 2 ([11]). *Пусть оператор* A *несамосопряжен, оператор* B *имеет вид*

$$B = B_C + 2\tau K_H, \quad B_0 = B_C + \tau\,(K_H - K_B) = B_0^* > 0. \tag{8}$$

Тогда для устойчивости разностной схемы (2), (3) *по начальным данным в энергетическом пространстве* H_{B_0} *достаточно выполнения условия*

$$0 \leq 0{,}5\tau A_0 \leq B_0.$$

Определим оператор B_C в теореме 2 как диагональный оператор.

Следствие. Пусть оператор A диссипативен, оператор B имеет вид (8) и $B_C = \delta E$, $\delta > 0$. Тогда разностная схема (2), (3) устойчива по начальным данным в энергетическом пространстве H_{B_0}, $B_0 = \delta E + \tau\,(K_H - K_B)$ при выполнении условия

$$0 < \tau < \frac{\delta}{\gamma + 0{,}5\mu_{\max}}, \tag{9}$$

где $\gamma = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}^1|$, a_{ij}^1 — элементы матрицы A_1, μ_k — собственные числа оператора A_0, $\mu_{\max} = \max\limits_k \mu_k$.

Доказательство. Из (8) получаем $B_0 = \delta E + \tau R$, $R = K_H - K_B$. Обозначим через λ_k и ν_k собственные числа операторов B_0 и R соответственно. Тогда

$$\lambda_k = \delta + \tau\nu_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{10}$$

По лемме из [9]

$$-\,\nu \leq \nu_k \leq \nu, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где $\nu = \max\limits_i R_i$, $R_i = \sum\limits_j |k_{ij}|$, k_{ij} — элементы матрицы R. Так как элементы матриц A_1 и R отличаются друг от друга только знаками, суммы модулей этих элементов совпадают. Поэтому в силу свойств матриц [9] можно положить $\nu = \gamma$. Учитывая (10) и (11), получаем, что справедливо неравенство

$$\delta - \tau\gamma \le \lambda_k \le \delta + \tau\gamma, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

По теореме 2 для сходимости схемы (2), (3) достаточно выполнения условия $0 \le 0{,}5\tau A_0 \le B_0$, что эквивалентно $0 \le 0{,}5\tau\mu_{\max} \le \lambda_{\min}$, следовательно, $\lambda_k - 0{,}5\tau\mu_{\max} \ge 0$, поэтому $\delta - \tau\gamma - 0{,}5\tau\mu_{\max} \ge 0$. При $\tau > 0$ получаем, что схема (2), (3) устойчива при $0 < \tau < \delta/(\gamma + 0{,}5\mu_{\max})$.

Теорема 3 ([12]). *Пусть оператор A диссипативен, оператор $B = E + \tau K_H$, и выполнено условие $B_0 > 0{,}5\tau A_0$, где $B_0 = E + 0{,}5\tau(K_H - K_B)$. Тогда схема (2), (3) устойчива в H_L, $L = B_0 - 0{,}5\tau A_0$.*

3. Численные эксперименты

В численном эксперименте была рассмотрена схема (2), (3) с оператором (8) со следующими значениями параметра δ:

a) если $\delta = 1$, то условие устойчивости (9) эквивалентно $0 < \tau \le 1/(\gamma + 0{,}5\mu_{\max})$;

b) если $\delta = \alpha$, $\alpha = \|M\| + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $M = A_0 + K_B - K_H$, то условие устойчивости (9) равносильно $0 < \tau \le \alpha/(\gamma + 0{,}5\mu_{\max})$.

Также в численных расчетах была рассмотрена схема (2), (3) с оператором (4), где B_C вычисляется по формуле (7), $\alpha = \|M\| + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $M = A_0 + K_B - K_H$, а D и ω имеют следующий вид:

a) если $D = 0$, $\omega = 2\tau$, то схема (2), (3) абсолютно устойчива в H_L, $L = \tau(\alpha E - M)$;

b) если $D = E$, $\omega = \tau$, то схема (2), (3) абсолютно устойчива в H_L, $L = E + 0{,}5\tau(\alpha E - M)$;

c) если $D = 0$, $\omega = \tau$, то схема (2), (3) абсолютно устойчива в H_L, $L = 0{,}5\tau(\alpha E - M)$.

С использованием выбранных треугольных схем были решены четыре задачи, коэффициенты векторов скорости которых приведены в таблице.

Таблица. Коэффициенты вектора скорости $\vec{V}$

№	$v_1(x,y)$	$v_2(x,y)$
1	1	2
2	$1-2x$	$2y-1$
3	$x+y$	$x-y$
4	$\sin\pi x$	$-\pi y\cos\pi x$

Начальные и краевые условия, а также $f(x,y,t)$ выбирались так, чтобы аналитическим решением задачи (1) была функция типа погранслоя $\varphi(x,y) = (x^{10} + y^{10})\,t$.

Задачи решались на временно́м отрезке $t \in [0, 20]$ с шагом по времени, увеличение которого приводит к потере устойчивости схемы (2), (3) или к росту относительной погрешности более чем на 20%. Решения получены на сетке 32×32 по пространству при следующих числах Пекле:

1. $\mathrm{Pe} = 10^{-1}$ — доминирующая диффузия,
2. $\mathrm{Pe} = 10$ — средняя диффузия,
3. $\mathrm{Pe} = 10^3$ — слабая диффузия,
4. $\mathrm{Pe} = 10^5$ — доминирующая конвекция.

В работе [13] показано, что схемы с $\alpha_i = \alpha = \|M\|$ решают задачу (1) с меньшей погрешностью, чем аналогичные схемы с $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{N} |m_{ij}|$, $i = 1, \ldots, N$, при этом время решения задачи соответствующими схемами одно и то же. Поэтому схемы с $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{N} |m_{ij}|$, $i = 1, \ldots, N$, рассмотренные ранее, в численных результатах данной работы не отражены.

При сравнении численных результатов решения задачи (1) с различными векторами скорости выбранными схемами учитывались

— время, затраченное на решение задачи на отрезке $[0, 20]$;
— относительная погрешность решения в норме пространства $\mathbf{C}$ на последнем шаге по времени.

4. Выводы

Предложен новый класс устойчивых и частично-устойчивых треугольных кососимметричных разностных схем и получены достаточные условия устойчивости этих схем. Проведено численное исследование схемы (2) с каждым из следующих операторов (при $\alpha = \|M\|$):

$$B = E + 2\tau K_H, \tag{12}$$

$$B = \alpha\tau E + 2\tau K_H, \tag{13}$$

$$B = (1 + 0{,}5\tau\alpha)\, E + \tau K_H, \tag{14}$$

$$B = \alpha E + 2\tau K_H, \tag{15}$$

$$B = 0{,}5\alpha\tau E + \tau K_H. \tag{16}$$

Численные расчеты подтвердили полученные теоретические результаты об условной устойчивости схемы (2) с операторами (12), (15) и абсолютной устойчивости этой схемы с операторами (13), (16), (14).

Схема (2) с оператором (12) при доминирующей диффузии неустойчива, возрастание влияния конвекции ведет к увеличению шага по времени, при котором схема сохраняет устойчивость.

Схема (2) с оператором (15), являясь условно устойчивой, при малых числах Пекле и большом шаге по времени ($\tau = 20$) решает задачу (1) с погрешностью порядка 0,2%–1%, при больших числах Pe и $\tau \gg 1$ погрешность составляет более 20%, что приводит к необходимости уменьшить шаг по времени до $\tau = 1{,}2$.

Схема (2) с операторами (13), (14) абсолютно устойчива независимо от того, какой из физических процессов доминирует, и решает задачу точнее и за меньшее время, чем схема (2) с операторами (12), (15).

Как и ожидалось, доминирование конвективных процессов приводит к увеличению погрешности решения задачи (1).

Схема (2) с оператором (12) достигает наибольшей точности на задаче 1 (см. табл.), с оператором (15) — на задаче 2, с операторами (13), (16), (14) — на задачах 3 и 4. Самой точной из треугольных схем является схема (2) с оператором (13).

Таким образом, схема (2) с операторами (13), (16), (14) в случае решения типа погранслоя является наиболее эффективной из треугольных кососимметричных схем, т. к. решает задачу конвекции-диффузии быстрее и точнее остальных, независимо от преобладания конвекции или диффузии.

Литература

1. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. – 616 с.
2. Годунов С.К., Рябенький B.C. *Разностные схемы. Введение в теорию.* – М.: Наука, 1977. – 439 с.
3. Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 418 с.
4. Peaceman D.W., Rachford H.H. *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations* // SIAM J. – 1955. – V. 3. – № 1. – P. 28–41.
5. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика.* – М.: Мир, 1980. – 616 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 415 с.

7. Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем и операторные неравенства* // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15. – № 12. – С. 2238–2250.
8. Крукиер Л.А. *Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса систем квазилинейных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 7. – С. 41–52.
9. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* – М.: Наука, 1972. – 232 с.
10. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 575 с.
11. Крукиер Л.А. *Математическое моделирование гидродинамики Азовского моря при реализации проектов реконструкции его экосистемы* // Матем. моделирование. – 1991. – Т. 3. – № 9. – С. 3–20.
12. Чикина Л.Г. *Исследование сходимости итерационного метода решения сильно несимметричных систем в различных энергетических нормах* // Современ. пробл. матем. моделирования. Сб. тр. VIII Всероссийск. школы-семинара. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1999. – С. 251–258.
13. Субботина Т.Н., Крукиер Б.Л. *Решение нестационарного уравнения конвекции-диффузии треугольными кососимметричными схемами* // Современ. пробл. матем. моделирования. Сб. тр. IX Всероссийск. школы-семинара. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 2001. – С. 324–334.

Ростовский государственный университет

Поступила 11.12.2003