Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №10, с. 48–58 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0106*

В.Ж. САКБАЕВ

О МНОЖЕСТВЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ И ЕГО УСРЕДНЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

Аннотация. Исследуется множество квантовых состояний и предельные переходы в последовательностях действующих в нем квантовых динамических полугрупп. Изучается структура множества крайних точек совокупности состояний и получено представление произвольного состояния интегралом по множеству одномерных ортогональных проекторов, подобное спектральному разложению нормального состояния. Полученные результаты применены к анализу последовательностей квантовых динамических полугрупп, возникающих при регуляризации вырожденного гамильтониана.

Ключевые слова: конечно-аддитивная мера, квантовое состояние, динамическая полугруппа.

УДК: 517.98

Abstract. In this paper we consider the set of quantum states and passages to the limit for sequences of quantum dynamic semigroups in the mentioned set. We study the structure of the set of extreme points of the set of quantum states and represent an arbitrary state as an integral over the set of one-dimensional orthogonal projectors; the obtained representation is similar to the spectral decomposition of the normal state. We apply the obtained results to the analysis of the limit behavior of sequences of quantum dynamic semigroups which occur in the regularization of the degenerate Hamiltonian.

Keywords: finitely additive measure, quantum state, dynamic semigroup.

Введение. Вырождение гамильтониана на некотором подмножестве фазового или координатного пространства приводит к некорректности задачи Коши для уравнения эволюции как в классической [1], так и в квантовой [2] механике. Динамическое преобразование пространства состояний системы с вырожденным гамильтонианом определяется как предел последовательности регуляризованных динамических полугрупп, задаваемых регуляризованными гамильтонианами [3]. Предельные переходы в пространстве квантовых состояний выводят предельную динамику квантовой системы из подмножества нормальных состояний во множество состояний общего вида ([4], [5]), которые в отличие от нормальных состояний не могут быть представлены ни ядерными, ни ограниченными линейными операторами в гильбертовом пространстве квантовой системы ([6]–[8]). Поэтому для изучения указанных предельных переходов требуется перенести методы анализа ядерных операторов на состояния общего вида — определить отношение коммутативности состояния и оператора или

Поступила 10.08.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, № 09-01-00265 и № 10-01-00395, при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект № 2.1.1/11133, при поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы.

двух состояний, исследовать структуру множества крайних точек совокупности состояний и представимость произвольного состояния интегралом по множеству одномерных ортогональных проекторов в духе спектральной теоремы для нормальных состояний.

Изучению квантовых состояний, весов и мер на проекторах алгебры $B(H)$ посвящены работы Дж. фон Неймана, Ф. Мюррея, А. Глизона, И. Сигала, Дж. Макки и многих других авторов ([9] и цитированная там литература). Теорема Глизона устанавливает связь между вполне аддитивными мерами на проекторах и нормальными состояниями. Теорема 27.16 [9], являющаяся обобщением теоремы Глизона на случай неограниченных мер, утверждает, что мера, заданная на проекторах алгебры $B(H)$, определяет вес на $B(H)$. Цель настоящей статьи — изучить представление состояний, не являющихся нормальными, с помощью мер на множестве одномерных ортогональных проекторов.

Разложение нормального состояния может производиться по множеству попарно ортогональных одномерных проекторов некоторого ортогонального разложения единичного оператора (теорема Глизона, спектральная теорема), а может — по переполненной системе одномерных ортогональных проекторов (например, по состояниям Глаубера [10]). В первом случае разложение состояния называется ортогональным, а во втором — неортогональным. В настоящей статье для произвольного квантового состояния получено неортогональное разложение в интеграл Петтиса по множеству векторных состояний. Исследован специальный класс состояний, которые допускают разложение в интеграл по семейству попарно ортогональных одномерных проекторов.

Полученные результаты применяются к описанию динамики квантовой системы с вырожденным гамильтонианом и ее регуляризации.

При изучении задачи Коши для уравнения Шрёдингера с вырожденным гамильтонианом

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}u(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0, \quad u_0 \in H = L_2(R) \tag{2}$$

(где $\mathbf{L}$ — симметрический плотно определенный оператор в пространстве H, заданный вырожденным дифференциальным выражением второго порядка) методом эллиптической регуляризации исследуется последовательность регуляризованных задач Коши с начальным условием (2) для уравнений Шрёдингера

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}_\varepsilon u(t), \quad t > 0,\ \varepsilon \in E \equiv (0,1). \tag{3}$$

Здесь при каждом $\varepsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ самосопряжен и равномерно эллиптичен, а при $\varepsilon \to 0$ последовательность операторов $\{\mathbf{L}_\varepsilon\}$ аппроксимирует оператор $\mathbf{L}$ в топологии сходимости графиков операторов [2].

В качестве примера вырожденного симметрического оператора может быть предложен оператор $\mathbf{L}$, заданный на максимальной области определения в пространстве $H = L_2(R)$ дифференциальным выражением второго порядка

$$\mathbf{L}v(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial}{\partial x}v(x)\right) + \frac{i}{2}\left(a(x)\frac{\partial}{\partial x}v(x) + \frac{\partial}{\partial x}(a(x)v(x))\right), \tag{4}$$

где $g(x)$ — характеристическая функция некоторого промежутка координатной прямой, а $a(x)$ — вещественнозначная ступенчатая функция на координатной прямой. В этом случае примером регуляризации может служить оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$, заданный на максимальной области определения в пространстве H дифференциальным выражением вида (4) с функцией $g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon$, $\varepsilon \in E$, вместо функции $g(x)$.

При каждом значении $\varepsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon$ генерирует регуляризованную унитарную полугруппу $\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t) = e^{-i\mathbf{L}_\varepsilon t}$, $t > 0$, в пространстве H и определяет регуляризованное решение $u_\varepsilon(t,u_0) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)u_0$. Сходимость при $\varepsilon \to 0$ последовательности регуляризованных решений

$\{u_\varepsilon(t,u_0)\}$ в сильной и слабой топологиях пространства H и последовательности регуляризованных полугрупп $\{\mathbf{U}_{\mathbf{L}_\varepsilon}(t)\}$ в сильной и слабой операторной топологии пространства $B(H)$ исследованы в работе [2]. При условии $\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^*+i\mathbf{I}))>\dim(\mathrm{Ker}(\mathbf{L}^*-i\mathbf{I}))$ установлено отсутствие сходящейся в сильной операторной топологии последовательности регуляризованных полугрупп $\{e^{-i\mathbf{L}_{\varepsilon_n}t}\}$. Для исследования расходящейся по норме пространства H последовательности решений $\{u_\varepsilon(t)\}$ изучим соответствующую ей последовательность регуляризованных операторов плотности

$$\{\rho_\varepsilon(t,\rho_{u_0}),\quad t>0,\quad \varepsilon\in E,\quad \varepsilon\to 0\},\tag{5}$$

где при каждом $\varepsilon\in E$ функционал $\rho_\varepsilon(t,\rho_{u_0})$ определен равенством

$$\langle\rho_\varepsilon(t,\rho_{u_0}),\mathbf{A}\rangle=(u_\varepsilon(t,u_0),\mathbf{A}u_\varepsilon(t,u_0))_H.$$

Далее $B(H)$ есть банахово пространство линейных ограниченных операторов в пространстве H и $B^*(H)$ его сопряженное. Обозначим через $B_*(H)$ предсопряженное пространство линейных функционалов на $B(H)$. Через $T_1(H)$ будем обозначать банахово пространство ядерных операторов, действующих в пространстве H, наделенное следовой нормой. Пространство, сопряженное к $T_1(H)$, изометрически изоморфно пространству $B(H)$, причем каждый ограниченный оператор $\mathbf{A}\in B(H)$ задает на пространстве $T_1(H)$ функционал, значение которого на произвольном элементе $\rho\in T_1(H)$ равно следу $\mathrm{Tr}\,(\rho\mathbf{A})$ ядерного оператора $\rho\mathbf{A}$.

Через $\Sigma(H)$ обозначим множество квантовых состояний — части единичной сферы пространства $B^*(H)$, лежащей в положительном конусе функционалов из $B^*(H)$ [4]; через $\Sigma_n(H)$ — множество нормальных квантовых состояний — функционалов из $\Sigma(H)$, непрерывных не только по норме, но и в ультраслабой топологии пространства $B^*(H)$ [9]; через $\Sigma_p(H)$ — множество чистых векторных состояний — множество крайних точек пространства $\Sigma_n(H)$, задаваемых проекторами на одномерные подпространства пространства H ([4], [11]). Чистое состояние, отвечающее ортогональному проектору на единичный вектор $u\in H$, задает на пространстве $B(H)$ линейный непрерывный функционал по правилу $\langle\rho_u,\mathbf{A}\rangle=(u,\mathbf{A}u)_H$. В силу изометрического изоморфизма пространств $B_*(H)$ и $T_1(H)$ будем отождествлять нормальное состояние $\rho\in\Sigma_n(H)$ и ядерный оператор $\widehat{\rho}\in T_1(H)$ такой, что $\rho(\mathbf{A})=\mathrm{Tr}\,(\widehat{\rho}\mathbf{A})$.

Коммутативность состояния и оператора. Пусть $\rho\in\Sigma(H)$, $P\subset H$ — замкнутое линейное подпространство в H, $P^\perp$ — его ортогональное дополнение, $\mathbf{P}$ — оператор ортогонального проектирования на подпространство P в пространстве H. Для двух ограниченных операторов $\mathbf{A},\mathbf{B}\in B(H)$ обозначим через $[\mathbf{A},\mathbf{B}]\equiv\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ их коммутатор.

Определение 1. Будем говорить, что состояние ρ коммутирует с проектором $\mathbf{P}$, если

$$\rho([\mathbf{A},\mathbf{P}])=0\ \ \forall\mathbf{A}\in B(H).\tag{6}$$

Обозначать этот факт будем равенством $[\rho,\mathbf{P}]=0$.

Замечание 1. Если состояние $\rho\in T_1(H)$ является нормальным, то условие (6) равносильно равенству $[\widehat{\rho},\mathbf{P}]=0$ при любом $\mathbf{A}\in B(H)$. Таким образом, определение 1 расширяет понятие перестановочности состояния и ограниченной наблюдаемой на случай не обязательно нормальных состояний.

Теорема 1. *Состояние ρ коммутирует с проектором $\mathbf{P}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\rho=\mathbf{P}\rho\mathbf{P}+\mathbf{P}^\perp\rho\mathbf{P}^\perp,\tag{7}$$

где функционал $\mathbf{P}\rho\mathbf{P}\in B^*(H)$ определяется функционалом ρ согласно равенству

$$\langle\mathbf{P}\rho\mathbf{P},\mathbf{A}\rangle=\langle\rho,\mathbf{PAP}\rangle.$$

Доказательство. Условие (6) равносильно требованию

$$\rho(\mathbf{AP}) = \rho(\mathbf{PA}) \ \ \forall \mathbf{A} \in B(H). \tag{8}$$

Для каждого ограниченного оператора $\mathbf{C} \in B(H)$ положим $\mathbf{A} = \mathbf{CP}^{\perp}$ в равенстве (8). Получим $\rho(\mathbf{PCP}^{\perp}) = 0$ для всех $\mathbf{C} \in B(H)$. Аналогично и $\rho(\mathbf{P}^{\perp}\mathbf{CP}) = 0$ для всех $\mathbf{C} \in B(H)$. Поэтому из равенства (6) следует равенство (7). Наоборот, из равенства (7) очевидным образом вытекает (8). $\square$

Ультрафильтры и двузначные меры. Пусть $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, $2^{\mathbf{N}}$ — σ-алгебра всех его подмножеств, $B(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) = l_\infty$ и $ba(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) = l_\infty^*$, через $ca(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}})$ и $pba(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}})$ обозначим соответственно счетно-аддитивную и чисто конечно-аддитавную части пространства l_∞^* ($ca(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) = l_1$ [12]). Через $V(\mathbf{N})$ обозначим пересечение единичной сферы пространства l_∞^* с конусом его неотрицательных элементов, а через $W(\mathbf{N})$ — пересечение $pba(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) \bigcap V(\mathbf{N})$, т. е. множество неотрицательных нормированных мер на $\mathbf{N}$, которые принимают нулевое значение на любом конечном подмножестве.

Согласно результатам статьи [13] множества $V(\mathbf{N})$ и $W(\mathbf{N})$ — выпуклые компактные в $*$-слабой топологии пространства из l_∞^*, множества крайних точек которых составляют соответственно множества $V_0(\mathbf{N}) = \mathrm{Extr}(V(\mathbf{N}))$ и $W_0(\mathbf{N}) = \mathrm{Extr}(W(\mathbf{N}))$ мер, принимающих на алгебре $2^{\mathbf{N}}$ лишь два значения 0 или 1. Таким образом, для каждой меры $\mu \in V_0(\mathbf{N})$ алгебра $2^{\mathbf{N}}$ представима в виде объединения двух непересекающихся множеств $S_\mu(0)$ и $S_\mu(1)$, определяемых равенствами $S_\mu(s) = \mu^{-1}(s)$. Следовательно, для любой меры $\mu \in V_0(\mathbf{N})$ совокупность $S_\mu(1)$ элементов алгебры $2^{\mathbf{N}}$ образует ультрафильтр [12], который будем обозначать через $\mathcal{F}_\mu$. Тогда для меры $\mu \in W(\mathbf{N})$ ультрафильтр $\mathcal{F}_\mu$ является неглавным (т. е. пересечение всех множеств из $\mathcal{F}_\mu$ пусто), а для меры $\mu \in V(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) \bigcap ca(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}})$ — главным. Различным мерам $\mu, \nu \in V_0(\mathbf{N})$ соответствуют различные ультрафильтры $\mathcal{F}_\mu$, $\mathcal{F}_\nu$ такие, что найдутся множества $A \in \mathcal{F}_\mu$ и $B \in \mathcal{F}_\nu$, имеющие пустое пересечение.

Наоборот, если задан некоторый неглавный ультрафильтр $\mathcal{F}$, то равенство $\mu(\mathbf{N}_\alpha) = 1$ $\forall\, \mathbf{N}_\alpha \in \mathcal{F}$ определяет меру $\mu_{\mathcal{F}} \in W_0(\mathbf{N})$. При этом если два ультрафильтра $\mathcal{F}$, $\gimel$ различны, то они содержат непересекающиеся подмножества $F_\alpha \in \mathcal{F}$ и $G_\beta \in \gimel$, а соответствующие им меры $\mu_{\mathcal{F}}$, $\mu_{\gimel} \in W_0(\mathbf{N})$ различны. Следовательно, можно отождествить чисто конечно-аддитивные двузначные меры $\mu \in W_0(\mathbf{N})$ и неглавные ультрафильтры подмножеств $\mathcal{F} \in 2^{\mathbf{N}}$ ([14], гл. 3.5). Если $\mu = \mu_{\mathcal{F}}$, то будем говорить, что ультрафильтр $\mathcal{F}$ является носителем меры $\mu \in W_0(\mathbf{N})$.

О разложениях элементов множества $\Sigma(H)$. Согласно теореме Крейна–Мильмана всякое компактное выпуклое множество в линейном топологическом пространстве совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества своих крайних точек.

Например, множество крайних точек совокупности нормальных состояний $\Sigma_n(H)$ составляет множество $\Sigma_p(H)$ чистых векторных состояний. Действительно, всякое векторное состояние является, очевидно, крайней точкой множества $\Sigma_n(H)$, а любое другое состояние из множества $\Sigma_n(H)$ является выпуклой комбинацией двух ортогональных нормальных состояний с ненулевыми коэффициентами. Следовательно, множество $\Sigma_n(H)$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества $\Sigma_p(H)$ в топологии нормы пространства $B_*(H)$.

В то же время вся совокупность крайних точек может оказаться избыточной для построения выпуклого компакта с помощью замыкания выпуклой оболочки, что показывает следующий простой пример. Замкнутый единичный круг в пространстве R^2 является замыканием выпуклой оболочки счетного множества элементов окружности с рационально соизмеримой с числом π угловой координатой, тогда как множество всех крайних точек образует вся окружность. В случае множества $\Sigma(H)$ для получения всей совокупности состояний $\Sigma(H)$ посредством замыкания выпуклой оболочки системы крайних элементов в

$*$-слабой топологии достаточно взять лишь систему векторных чистых состояний $\Sigma_p(H)$, как показывает

Теорема Голдстайна ([12], гл. 5, с. 460, теорема 5). *Пусть $\varkappa$ — естественное вложение банахова пространства $B_*(H)$ в $B^*(H)$. Тогда множество $\varkappa S_1(B_*(H))$ всюду плотно в $S_1(B^*(H))$ в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$.*

Следовательно, множество $\Sigma(H)$ совпадает с замыканием выпуклой оболочки множества $\Sigma_p(H)$ в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$ ([5], гл. 2, теорема 6).

Лемма 1. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда существует такая последовательность нормальных состояний $\{\rho_m\}$, что для каждого состояния $\rho \in \Sigma(H)$ найдется мера $\mu \in W_0(\mathbf{N})$, с которой*

$$\rho = \int_{\mathbf{N}} \rho_k d\mu(k). \tag{9}$$

Равенство (9) *понимается в смысле Петтиса*: $\langle \rho, \mathbf{A}\rangle = \int\limits_{\mathbf{N}} \langle \rho_k, \mathbf{A}\rangle d\mu(k) \quad \forall \mathbf{A} \in B(H)$.

Доказательство. Пусть Ω_v — множество выпуклых комбинаций чистых состояний вида $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \rho_{u_j}$, где $u_1, \ldots, u_m \in S_1(H)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0,1]$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$. Через Ω_u обозначим множество выпуклых комбинаций попарно ортогональных чистых состояний вида $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \rho_{u_j}$, где $u_1, \ldots, u_m \in S_1(H)$ — некоторая конечная ортонормированная система векторов, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0,1]$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$. Очевидно, $\Omega_u \subset \Omega_v$. Поскольку любой элемент $\rho \in \Omega_v$ при отождествлении его с ядерным оператором $\widehat{\rho} \in T_1(H)$ есть положительный самосопряженный оператор конечного ранга с единичным следом, то в силу спектральной теоремы $\rho \in \Omega_u$ и, следовательно, $\Omega_v = \Omega_u$.

Поскольку пространство H сепарабельно, то существует счетное всюду плотное на единичной сфере $S_1(H)$ подмножество векторов единичной сферы $\{u_j,\, j \in \mathbf{N}\}$. Множество Ω_u^c выпуклых комбинаций векторных состояний ρ_{u_j} с рациональными коэффициентами образует счетное подмножество множества Ω_u.

Множество Ω_u^c плотно в $\Omega_u(H)$ по норме пространства B_*. Чтобы обосновать это утверждение, следует отождествить состояния $\rho \in \Omega_u(H)$ с операторами плотности $\widehat{\rho} \in T_1(H)$, воспользоваться спектральной теоремой и всюду плотностью множества $\{u_j\}$ на единичной сфере $S_1(H)$. Пусть последовательность $\{\rho_k\}$ задает некоторую нумерацию элементов множества Ω_u^c. Покажем, что эта последовательность является искомой.

Согласно теореме Голдстайна множество $\Sigma(H)$ совпадает с замыканием в $*$-слабой топологии множества Ω_v и, следовательно, множества Ω_u^c. Это утверждение означает, что для любого элемента $\rho \in \Sigma(H)$, любого конечного набора операторов $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m \in B(H)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое непустое подмножество $\mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m}(\rho) \in 2^{\mathbf{N}}$, что для любого $k \in \mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m}(\rho)$ выполняются неравенства $|\langle \rho - \rho_k, \mathbf{A}_j\rangle| < \varepsilon$, $j \in \overline{1,m}$ и $\rho_k \neq \rho$. Если $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ и $\mathbf{A}_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}_s$ — два различных набора операторов, то множество $\mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}_s}$, во-первых, непусто в силу теоремы Голдстайна и, во-вторых, содержится в множествах $\mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k}$ и $\mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_{k+1}, \ldots, \mathbf{A}_s}$. Тогда совокупность подмножеств $\{\mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m}(\rho),\, \varepsilon \in (0,1),\, m \in \mathbf{N},\, \mathbf{A}_j \in B(H) \ \ \forall j \in \overline{1,m}\}$ образует базу некоторого фильтра $\mathcal{F}_0$. Пусть ультрафильтр $\mathcal{F}$ мажорирует фильтр $\mathcal{F}_0$. Тогда для меры $\mu_{\mathcal{F}} \in V_0(\mathbf{N})$ выполнено равенство $\rho = \int\limits_{\mathbf{N}} \rho_k d\mu_{\mathcal{F}}(k)$, что доказывает равенство (9). Поскольку для всех $k \in \mathbf{N}_{\varepsilon, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m}(\rho)$ выполняются неравенства $\rho_k \neq \rho$, то фильтр $\mathcal{F}$ является неглавным. Значит, $\mu \in W_0(\mathbf{N})$ и лемма 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда для всякого состояния $\rho \in \Sigma(H)$ существует такая последовательность единичных векторов $\{u_k\}$ пространства H и такая неотрицательная нормированная мера $\mu \in ba(\mathbf{N})$, что выполнено равенство*

$$\rho = \int_{\mathbf{N}} \rho_{u_k} d\mu(k), \tag{10}$$

которое понимается в $*$-слабом смысле Петтиса.

Доказательство. Пусть $\{u_k\}$ — последовательность единичных векторов гильбертова пространства H со всюду плотным множеством значений на сфере $S_1(H)$ и пусть $\{\rho_j\}$ — последовательность нормальных состояний, существование которой утверждает лемма 1.

Для каждого $\mathbf{A} \in B(H)$ по последовательности $\{u_k\}$ равенствами $a_k = (u_k, \mathbf{A}u_k)$, $k \in \mathbf{N}$, определяется числовая последовательность $\{a_k\} = \alpha(\mathbf{A}) \in l_\infty$. Последовательность $\{\rho_j\}$ сопоставляет каждому ограниченному линейному оператору $\mathbf{A}$ числовую последовательность $\{b_j\} = \beta(\mathbf{A}) \in \lambda_\infty$: $b_j = \langle \rho_j, \mathbf{A} \rangle$. Отображение $\beta : B(H) \to l_\infty$ линейно, непрерывно и изометрично, а отображение $\alpha : B(H) \to l_\infty$ линейно, непрерывно, изометрично и инъективно. Действительно, если ограниченные операторы $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ различны, то найдется единичный вектор пространства H, на котором различаются их квадратичные формы. В силу определения нормы оператора равенство $\|\mathbf{A}\|_{B(H)} = \|\alpha(\mathbf{A})\|_{l_\infty}$ справедливо при любом $\mathbf{A} \in B(H)$. Пусть $\Lambda = (\alpha)^{-1}$ — обратный оператор к отображению α, заданный на образе $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ оператора α в пространстве l_∞. Тогда отображение Λ линейно, биективно, изометрично и, следовательно, непрерывно.

Согласно лемме 1 существует такая мера $\mu \in W_0(\mathbf{N})$, что $\rho(\mathbf{A}) = \int\limits_{\mathbf{N}} (\rho_j, \mathbf{A}) d\mu(j)$ и, следовательно, $\rho(\mathbf{A}) = \langle \mu, \beta(\mathbf{A}) \rangle$ в силу определения отображения β.

Определим меру m как линейный непрерывный функционал на пространстве l_∞, который на линейном многообразии $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ задается равенством $m = \mu \circ \beta \circ \Lambda$ как композиция линейных ограниченных отображений и на пространство l_∞ может быть продлен каким-либо образом по теореме Хана–Банаха. (Тот факт, что единичная функция $\mathbf{1}$ входит в многообразие $\mathrm{Im}\,(\alpha)$ и $m(\mathbf{1}) = 1$, обеспечивает неотрицательность и нормировку любого такого продолжения.)

Поэтому если $m = \mu \circ \beta \circ \Lambda$, то $\int\limits_{\mathbf{N}} (\rho_j, \mathbf{A}) d\mu(j) = \int\limits_{\mathbf{N}} \langle r_k, \mathbf{A} \rangle dm$, поскольку

$$\rho(\mathbf{A}) = \int\limits_{\mathbf{N}} (\rho_m, \mathbf{A}) d\mu(m) = \langle \mu, \beta(\mathbf{A}) \rangle = \langle \mu, \beta(\Lambda(\alpha\mathbf{A})) \rangle = \langle m, \alpha(\mathbf{A}) \rangle = \int\limits_{\mathbf{N}} \langle r_j, \mathbf{A} \rangle dm.$$

Следовательно, для любого $\rho \in \Sigma(H)$ найдется мера $m \in V(\mathbf{N})$ такая, что $\rho = \int\limits_{\mathbf{N}} r_j dm(j)$.

$\square$

Пример. В конечномерном пространстве H любое состояние $\rho \in \Sigma(H)$ является нормальным. При этом любое счетное всюду плотное на единичной сфере $S_1(H)$ множество векторов u_k, $k \in \mathbf{N}$, удовлетворяет условию теоремы 2, так как всякий вектор $u \in S_1(H)$ есть предел некоторой последовательности $\{u_{k_l}\}$. Тогда для всякой меры $\mu \in W_0(\mathbf{N})$ такой, что $\mu\Big(\bigcup\limits_{l \in \mathbf{N}} k_l\Big) = 1$, выполнено равенство $\rho_u = \lim\limits_{\mathbf{N}} \rho_{u_k} d\mu(k)$.

Таким образом, произвольное квантовое состояние r из множества $\Sigma(H)$ допускает вид разложения в интеграл (10) по векторным состояниям с конечно-аддитивной мерой μ на множестве $\Sigma_p(H)$. Полученное разложение является обобщением на состояния общего вида спектрального разложения и разложения Глаубера–Сударшана [10] для нормального состояния. Заметим, что состояния вида (10) изучались в работах Диксмье по обобщению понятия следа [7], в работе Шриниваза по постулатам редукции в теории квантовых измерений [8], а также к указанному виду относятся состояния Кубо–Мартина–Швингера ([6], [5]). В указанных исследованиях квантовое состояние, не являющееся нормальным, представлено как инвариантное среднее последовательности чистых векторных состояний, т. е. как интеграл вида (9) по мере μ, удовлетворяющей условиям инвариантности относительно группы сдвигов. Отказываемся от последнего требования, поскольку ставим цель определить не операцию обобщенного следа (не зависящую от выбора базиса), а конкретное состояние на $B(H)$, для которого не все базисы в H равноправны.

Если совокупность векторных состояний под знаком интеграла представляет собой систему попарно ортогональных чистых состояний, то такое разложение будем называть ортогональным. Выскажем гипотезу: всякое разложение квантового состояния вида (10) может быть представлено и как ортогональное разложение.

Ортогональные разложения. Пусть $\Sigma_c(H)$ есть множество тех квантовых состояний, с которыми коммутируют (в смысле определения 1) все проекторы, имеющие общее ортогональное разложение единичного оператора в сумму одномерных ортогональных проекторов

$$\mathbf{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{e_k}.$$

Лемма 2. *Элемент ρ принадлежит $\Sigma_c(H)$ тогда и только тогда, когда существуют некоторый ортонормированный базис $\{e_k\}$ в пространстве H и некоторая мера $\mu \in V(N)$ такие, что*

$$\rho_{\mu,\{e_k\}} = \int_N \rho_{e_k} d\mu. \tag{11}$$

Доказательство. Пример состояния из множества $\Sigma_c(H)$ предоставляется выбором некоторого ортонормированного базиса $\{e_k\}$ в пространстве H и некоторой меры $\mu \in V(N)$. Тогда состояние (11) коммутирует в смысле определения 1 со всеми проекторами, имеющими ортонормированный базис из собственных векторов $\{e_k\}$ и, следовательно, входит в $\Sigma_c(H)$. Наоборот, если некоторое состояние $\rho \in \Sigma_c(H)$ коммутирует со всеми проекторами некоторого ортогонального разложения единицы $\mathbf{I} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{e_k}$, то на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ задана мера $\mu : \mu(B) = \rho\Big(\sum\limits_{k \in B} \mathbf{P}_{e_k}\Big) \quad \forall B \in 2^{\mathbf{N}}$, принадлежащая $V(\mathbf{N})$. Тогда состояние ρ допускает представление интегралом Петтиса (11) в том смысле, что для любого $\mathbf{A} \in B(H)$ справедливо равенство $\rho(\mathbf{A}) = \int\limits_{\mathbf{N}} (\mathbf{A}e_k, e_k) d\mu$. □

Множество состояний вида (11) при всевозможном выборе ортонормированных базисов $\{e_k\}$ пространства H и счетно-аддитивных мер $\mu \in ca(\mathbf{N}) \bigcap V(\mathbf{N})$ представляет согласно спектральной теореме и теореме Глизона ([9], 24.6) параметризацию множества нормальных состояний $\Sigma_n(H)$. Если же меры μ пробегают множество мер $V(\mathbf{N})$, то состояния $\rho_{\mu,\{e_k\}}$ пробегают все множество $\Sigma_c(H)$. Вопрос о том, существуют ли в $\Sigma(H)$ состояния, не представимые в виде (11), оставим пока открытым.

Состояния $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma(H)$ назовем взаимно ортогональными, если существует такой ортогональный проектор $\mathbf{P} \in B(H)$, что $\rho_1 = \mathbf{P}\rho_1\mathbf{P}$ и $\rho_2 = \mathbf{P}^{\perp}\rho_2\mathbf{P}^{\perp}$. Состояния $\rho_1, \rho_2 \in \Sigma_c(H)$ назовем коммутирующими, если они допускают представление в виде интеграла (11) с общим ортонормированным базисом.

Рассмотрим некоторое состояние $\rho \in \Sigma(H)$. Через $s(\rho)$ обозначим множество таких чисел $\alpha \in [0,1]$, для которых найдется ортогональный проектор $\mathbf{P}(\alpha)$ такой, что $[\rho, \mathbf{P}(\alpha)] = 0$ и $\rho(\mathbf{P}) = \alpha$. Заметим, что $\{0,1\} \subset s(\rho)$ для любого $\rho \in \Sigma_{pba}(H)$, поскольку для любого конечномерного проектора $\mathbf{P}_0$ выполняются равенства $[\rho, \mathbf{P}_0] = 0$ и $\rho(\mathbf{P}_0) = 0$.

Замечание 2. Если точка ρ из $\Sigma(H)$ является его крайней точкой, то $s(\rho)=\{0,1\}$.

Действительно, если некоторое число $\alpha \in s(\rho)\bigcap(0,1)$, то состояние ρ не является крайней точкой $\Sigma(H)$, а является выпуклой комбинацией взамно ортогональных состояний $\alpha^{-1}\mathbf{P}_\alpha\rho\mathbf{P}_\alpha$ и $(1-\alpha)^{-1}\mathbf{P}_\alpha^\perp\rho\mathbf{P}_\alpha^\perp$.

Теорема 3. *Совокупность крайних точек множества $\Sigma_c(H)$ составляют функционалы вида $\rho=\int\limits_{\mathbf{N}}\mathbf{P}_{e_k}d\mu(k)$, где $\{e_k\}$ – некоторый ортонормированный базис, а $\mu\in V_0(\mathbf{N})$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 всякий элемент $\rho\in\Sigma_c(H)$ представим в виде (11) с мерой $\mu\in V(\mathbf{N})$. Если мера μ является нетривиальной выпуклой комбинацией двух других мер из $V(\mathbf{N})$, то и состояние ρ является нетривиальной выпуклой комбинацией двух других состояний. Следовательно, условие $\mu\in\mathrm{Extr}(V(\mathbf{N}))=V_0(\mathbf{N})$ необходимо для того, чтобы $\rho\in\mathrm{Extr}(\Sigma_c(H))$.

Если же функционал $\rho\in\Sigma_c(H)$ представим в виде (11) с мерой $\mu\in V_0(E)$, то он является крайней точкой множества $\Sigma_c(H)$. Действительно, пусть функционал ρ мажорирует некоторый другой функционал $r\in\Sigma_c(H)$. Тогда существует число $\sigma\in(0,1)$ такое, что для любого проектора $\mathbf{Q}\in\pi(H)$ выполняется неравенство

$$\rho(\mathbf{Q})\geq\sigma r(\mathbf{Q}). \tag{12}$$

Так как $\mu\in V_0(\mathbf{N})$, то мера μ принимает лишь два значения $\{0,1\}$ на σ-алгебре $2^{\mathbf{N}}$ [13]. Пусть $S_\mu(1)=\{\mathbf{A}\in 2^{\mathbf{N}}:\mu(\mathbf{A})=1\}$ и $S_\mu(0)=\{\mathbf{A}\in 2^{\mathbf{N}}:\mu(\mathbf{A})=0\}$. Тогда подмножества $\mathbf{A}\in S_\mu(1)$ образуют ультрафильтр множества $\mathbf{N}$, а для любого $\mathbf{N}_\alpha\in S_\mu(0)$ выполняется $\rho(\mathbf{Q}_\alpha)=0$, где $\mathbf{Q}_\alpha$ — ортогональный проектор, равный сумме ряда $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}_\alpha}\mathbf{P}_{e_k}$ в сильной операторной топологии пространства $B(H)$. Поэтому в силу условия (12) $r(\mathbf{Q}_{\mathbf{N}_\alpha})=0$ для любого $\mathbf{N}_\alpha\in S_\mu(0)$.

Пусть Υ — множество ортогональных H проекторов, равных сумме ряда $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}_\alpha}\mathbf{P}_{e_k}$ с базисом $\{e_k\}$ из представления (11) функционала ρ при всевозможных $\mathbf{N}_\alpha\in S_\mu(1)$. Пусть $\mathbf{Q}_1\in\Upsilon$ и $r(\mathbf{Q}_1)=s$. Тогда $r(\mathbf{Q}_2)=s$ для любого $\mathbf{Q}_2\in\Upsilon$. Предположим, что $r(\mathbf{Q}_2)=s'\neq s$. В силу определения множества Υ выполняются равенства $\rho(\mathbf{Q}_1)=\rho(\mathbf{Q}_2)=1$ и $[\mathbf{Q}_1,\mathbf{Q}_2]=0$. Поэтому, если $\mathbf{Q}_0=\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_{12}=\mathbf{Q}_1(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_2)$, $\mathbf{Q}_{21}=\mathbf{Q}_2(\mathbf{I}-\mathbf{Q}_1)$, то $\rho(\mathbf{Q}_0)=1$, $\rho(\mathbf{Q}_{21})=\rho(\mathbf{Q}_{12})=0$. Тогда в силу неравенства (12) $r(\mathbf{Q}_{21})=r(\mathbf{Q}_{12})=0$, поэтому $r(\mathbf{Q}_1)=r(\mathbf{Q}_2)=r(\mathbf{Q}_0)$ и $s'=s$. Так как $\mathbf{I}\in\Upsilon$ и $r(\mathbf{I})=1$, то $s=1$.

Тогда функционал $r\in\Sigma_c$, мажорируемый оператором ρ, допускает разложение вида (11) с тем же базисом $\{e_k\}$, что и функционал ρ (т. е. функционалы r и ρ коммутируют друг с другом), и для любого проектора $\mathbf{P}\in\Upsilon$ выполнено равенство $r(\mathbf{P})=\rho(\mathbf{P})$. Поэтому для любых оператора $\mathbf{A}\in B(H)$ и проектора $\mathbf{P}\in\Upsilon$ выполнены равенства $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{PAP})$ и $\rho(\mathbf{A})=\rho(\mathbf{PAP})$, а оператор $\mathbf{PAP}$ уже допускает спектральное разложение по проекторам базиса $\{e_k\}$. Следовательно, $r=\rho$. □

В следующем утверждении получены необходимые условия включения $\rho\in\mathrm{Extr}(\Sigma(H))$.

Предложение 1. *Если состояние $\rho\in\mathrm{Extr}(\Sigma(H))$ представлено в (10), то $\mu\in W_0(\mathbf{N})$. Если, кроме того, состояние не является нормальным, то последовательность векторов $\{u_k\}$ сходится слабо к нулю по фильтру $\digamma_\mu$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 для каждого состояния ρ имеет место представление состояния ρ интегралом (10). Как и в теореме 3, если $\rho=\int\limits_{\mathbf{N}}\rho_{v_k}d\mu(k)$ — крайняя точка совокупности $\Sigma(H)$, то $\mu\in W_0(\mathbf{N})$. Пусть $\{\mathbf{N}_\alpha\}$ — фильтр подмножеств $\digamma_\mu$, содержащий носитель μ.

Определим среднее значение $l = \int\limits_{\mathbf{N}} v_k d\mu \in B_1(H)$ случайной величины v на пространстве с мерой $(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}, \mu)$ и ее дисперсию $r \in B_+^*(H)$, которая как функционал на множестве $B(H)$ определяется равенством $\langle r, \mathbf{A}\rangle = \int\limits_{\mathbf{N}}(v_k - l, \mathbf{A}(v_k - l))d\mu = \int\limits_{\mathbf{N}}(v_k, \mathbf{A}v_k)d\mu - (l, \mathbf{A}l)$. Функционал r, очевидно, неотрицателен, а норма его равна $r(\mathbf{I}) = 1 - \|l\|_H^2$.

Тогда для произвольного $\mathbf{A} \in B(H)$ справедливо равенство

$$\rho(\mathbf{A}) = \int_{\mathbf{N}}(v_k, \mathbf{A}v_k)d\mu = \int_{\mathbf{N}}(v_k - l, \mathbf{A}(v_k - l))d\mu + \\ + \int_{\mathbf{N}}(l, \mathbf{A}(v_k - l))d\mu + \int_{\mathbf{N}}(v_k - l, \mathbf{A}l)d\mu + \int_{\mathbf{N}}(l, \mathbf{A}l)d\mu.$$

С учетом того факта, что $\int\limits_{\mathbf{N}}(v_k - l, \mathbf{A}l)d\mu = \lim\limits_{k\to\infty}(v_k - l, \mathbf{A}l) = 0$ имеем

$$\rho(\mathbf{A}) = \langle r, \mathbf{A}\rangle + (l, \mathbf{A}l).$$

По условию функционал $\rho \in \Sigma(H)$ является крайней точкой, поэтому только одно из двух слагаемых отлично от нуля. При условии, что состояние ρ не является нормальным, отлично от нуля только первое слагаемое. Поэтому $l = \theta_H$, т.е. последовательность $\{v_k\}$ сходится по фильтру множеств $\{\mathbf{N}_\alpha\}$ к нулевому вектору θ_H пространства H. $\square$

Приложения к проблеме регуляризации вырожденного гамильтониана. Напомним некоторые результаты по задаче Коши (1)–(3) из работ [15]–[17]. Сделаем предположение, что индексы дефекта оператора $\mathbf{L}$ есть $(n_-, n_+) = (0, m)$, где m — натуральное число или бесконечность. Тогда оператор $-i\mathbf{L}$ не является генератором полугруппы, а оператор $i\mathbf{L}$ генерирует изометрическую полугруппу $e^{i\mathbf{L}t}$. Пусть $H_0(t) = \overline{\mathrm{Im}\,(e^{i\mathbf{L}t})}$ и $H_1(t) = \mathrm{Ker}(e^{-i\mathbf{L}^*t})$.

Для изучения последовательности регуляризованных квантовых состояний $\{\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})\}$ (см. (5)) рассмотрим σ-алгебру 2^E всех подмножеств множества параметров регуляризации E и обозначим через $W(E)$ совокупность всех конечно-аддитивных мер, заданных на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, неотрицательных, нормированных (принимающих единичное значение на элементе $E \in 2^E$) и удовлетворяющих условию: мера любого множества $\mathbf{A} \in 2^E$, замыкание которого не содержит предельной точки $e^* = 0 = \inf E$, равна нулю. Множество $W(E)$ есть непустое выпуклое подмножество в пересечении конуса неотрицательных элементов с единичной сферой в банаховом пространстве $ba(E, 2^E) = (b(E, 2^E))^*$ конечно-аддитивных мер на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, сопряженном к банахову пространству ограниченных измеримых функций на $(E, 2^E)$ [13].

В работе [18] установлены необходимые и достаточные условия сходимости последовательности регуляризованных квантовых состояний и секвенциальной компактности множества ее значений в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$. В случае отсутствия подпоследовательностей регуляризованных квантовых состояний, сходящихся в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$, в работах [19], [15] расходящаяся последовательность $\{\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})\}$ исследована как случайный процесс, т. е. как семейство измеримых отображений (параметризованных переменной $t > 0$) измеримого пространства $(E, 2^E)$ с мерой $\mu \in W(E)$ в измеримое пространство $B^*(H)$ с алгеброй цилиндрических подмножеств, порожденной конечными наборами функционалов из $B(H)$. Каждое семейство отображений $\{\rho_\varepsilon(t, \rho_{u_0})\}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to+0} \sup\limits_{\mathbf{A}\in B(H),\, \|\mathbf{A}\|_{B(H)}=1} |\rho_n(t, \rho_{u_0})(\mathbf{A}) - \rho_{u_0}(\mathbf{A})| = 0$ при любом $\varepsilon \in E$

(т. е. процесс $\rho_\varepsilon(t,\rho_{u_0})$ начинается в точке ρ_{u_0} пространства $B^*(H)$). Математическое ожидание случайного процесса $\rho_\varepsilon(t,\rho_{u_0})$ задается интегралом Петтиса

$$\rho^\mu(t,\rho_0)=\int_E \rho_\varepsilon(t,\rho_0)d\mu.$$

Следовательно, каждой мере $\mu\in W(E)$ сопоставляется однопараметрическое семейство усредненных динамических преобразований $T^\mu(t)$, $t>0$, пространства $B^*(H)$, задаваемых соотношениями $T^\mu(t)\rho_{u_0}=\rho^\mu(t,\rho_{u_0})$.

Теорема 4 ([16], [17])**.** 1. *При любом выборе $\mu\in W(E)$ и любом $t>0$ отображение T_t^μ определено на пространстве $B^*(H)$, линейно, непрерывно и изометрично, причем множество квантовых состояний $\Sigma(H)$ отображается им в себя.*

Для каждого счетного всюду плотного множества $\Gamma\subset(0,+\infty)$ существует мера $\mu\in W(E)$ такая, что при любом $t\in\Gamma$ отображение T_t^μ обладает следующими свойствами.

2. *При каждом $s=0,1$ образом выпуклого множества $\Sigma(H_s(t))$ пространства $B^*(H)$ при отображении T_t^μ является выпуклое множество $T_t^\mu(\Sigma(H_s(t)))$ пространства $B(H)^*$. Множество образов крайних точек множества $\Sigma_n(H_s(t))$ совпадает с множеством крайних точек образа $T_t^\mu(\Sigma_n(H_s(t)))$: $T_t^\mu(\mathrm{Extr}(\Sigma_n(H_s(t))))=\mathrm{Extr}(T_t^\mu(\Sigma_n(H_s(t))))$.*

3. *Сужение отображения $T_n^\mu(t)|_{\Sigma_n(H_1(t))}$ есть взаимно однозначное отображение выпуклого множества $\Sigma_n(H_1(t))$ на выпуклое множество $T_t^\mu(\Sigma_n(H_1(t)))$. Сужение отображения $T_n^\mu(t)|_{\Sigma_n(H_0(t))}$ есть биекция выпуклого множества $\Sigma_n(H_1(t))$ на себя.*

В исследованиях работ [16], [17] использовалось предположение, что начальное состояние ρ_0 принадлежит множеству нормальных состояний $\Sigma_n(H)$. Считая отображения $T^\mu(t)$, $t>0$, заданными на множестве векторных состояний $\Sigma_p(H)$, определим продолжение операторов эволюции $T^\mu(t)$, $t>0$, на множество $\Sigma(H)$.

Предложение 2. *Преобразование $T^\mu(t)$ сохраняет сходимость последовательности точек в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$, т. е. если последовательность состояний $\{\rho_n\}$ сходится по некоторому фильтру $\mathcal{F}$ к состоянию ρ в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$, то последовательность состояний $\{T^\mu(t)\rho_n\}$ также сходится к состоянию $T^\mu(t)\rho$ по фильтру $\mathcal{F}$.*

Доказательство. С отображением $T^\mu(t)\in B(B^*(H))$ свяжем предсопряженное отображение $T_*^\mu(t)\in B(B(H))$, определяемое системой равенств:

$$\langle r,T_*^\mu(t)\mathbf{A}\rangle=\langle T^\mu(t)r,\mathbf{A}\rangle\ \ \forall r\in B_*(H)=T_1(H),\ \ \forall\mathbf{A}\in B(H).$$

При каждом $\mathbf{A}\in B(H)$ приведенная выше система равенств определяет на банаховом пространстве ядерных операторов $T_1(H)$ линейный непрерывный функционал, т. е. корректно определен образ $T_*^\mu(t)\mathbf{A}$ оператора $\mathbf{A}$ при отображении $T_*^\mu(t)$. Поскольку отображение $T^\mu(t)$ не увеличивает норму образа, то этим же свойством обладает и отображение $T_*^\mu(t)$. Следовательно, если последовательность $\{\rho_{0n}\}\in\Sigma_n(H)$ сходится к элементу $\rho_0\in\Sigma(H)$ в $*$-слабой операторной топологии по фильтру $\mathcal{F}\in 2^{\mathbf{N}}$, то для каждого $\varepsilon>0$ и любого конечного набора операторов $\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m\in B(H)$ найдется такой элемент $\mathbf{N}_{\varepsilon,\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m}\in\mathcal{F}$, что $|\langle\rho_0-\rho_k,\mathbf{A}_j\rangle|<\varepsilon$ для любых $k\in\mathbf{N}_{\varepsilon,\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m}$ и $j\in 1,\dots,m$. Поэтому последовательность $\{T^\mu(t)\rho_{0n}\}$ сходится к элементу $T^\mu(t)\rho_0\in\Sigma(H)$ в $*$-слабой операторной топологии по тому же фильтру подмножеств $\mathcal{F}$. Действительно, условие $|\langle T^\mu(t)\rho_{0n}-T^\mu(t)\rho_0,\mathbf{A}\rangle|<\varepsilon$ $\forall\mathbf{A}\in\{\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m\}$ при всех $n\in\mathbf{N}_{\varepsilon,\mathbf{A}_1,\dots,\mathbf{A}_m}$ вытекает из условия $|\langle\rho_{0n}-\rho_0,\mathbf{A}\rangle|<\varepsilon$ $\forall\mathbf{A}\in\{T_*^\mu(t)\mathbf{A}_1,\dots,T_*^\mu(t)\mathbf{A}_m\}$ при всех $n\in\mathbf{N}_{\varepsilon,T_*^\mu(t)\mathbf{A}_1,\dots,T_*^\mu(t)\mathbf{A}_m}$, которое в свою очередь следует из сходимости последовательности ρ_{0n} к элементу ρ_0 по фильтру $\mathcal{F}$. $\square$

Следовательно, если усредненное динамическое преобразование $T^{\mu}(t)$ определено на множестве $\Sigma_p(H)$, то оно однозначно продолжается на множество $\Sigma_n(H)$ по непрерывности в топологии $T_1(H)$ и на множество $\Sigma(H)$ по непрерывности в $*$-слабой топологии пространства $B^*(H)$. Для определения действия отображения $T^{\mu}(t)$ на произвольное состояние $\rho \in \Sigma(H)$ достаточно рассмотреть сужение $T^{\mu}(t)|_{\Sigma_p(H)}$ и представить состояние ρ интегралом (10).

Литература

[1] Гитман Д.М., Тютин И.В. *Каноническое квантование полей со связями* (Наука, М., 1986).
[2] Сакбаев В.Ж. *О спектральных аспектах регуляризации задачи Коши для вырожденного уравнения*, Тр. МИАН им. В.А. Стеклова **261**, 258–267 (2008).
[3] Козлов В.В. *Динамика систем с неинтегрируемыми связями.* I, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем, механ., № 3, 92–100 (1982).
[4] Брателли У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика* (Мир, М., 1982).
[5] Эмх Ж. *Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля* (Мир, М., 1976).
[6] Accardi L., Lu Y.G., Volovich I.V. *Quantum theory and its stochastic limit*, Texts and monographs in physics (Springer, 2001).
[7] Кери А.Л., Сукочев Ф.А. *Следы Диксмье и некоторые приложения в некоммутативной геометрии*, УМН **61** (6) 45–110 (2006).
[8] Srinivas M.D. *Collapse postulate for observables with continuous spectra*, Comm. Math. Phys. **71** (2) 131–158 (1980).
[9] Шерстнев А.Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла* (Физматлит, М., 2008).
[10] Глаубер Р. *Оптическая когерентность и статистика фотонов.* Квантовая оптика и радиофизика (Мир, М., 1966), с. 93–279.
[11] Холево А.С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (Москва–Ижевск, 2003).
[12] Данфорд Н., Шварц Д. *Теория операторов.* Т. 1 (УРСС, М., 2004).
[13] Iosida K., Hewitt E. *Finitely additive measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** 46–66 (1952).
[14] Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач* (УИФ Наука, Екатеринбург, 1993).
[15] Sakbaev V.Zh. *Stochastic properties of degenerated quantum systems*, Inf. Dimens. Anal., Quantum Probab. Relat. Top. **13** (1) 65-85 (2010).
[16] Сакбаев В.Ж. *Об усреднении квантовых динамических полугрупп*, ТМФ **164** (3) 455-463 (2010).
[17] Сакбаев В.Ж. *О динамике вырожденной квантовой системы в пространстве функций, интегрируемых по конечно-аддитивной мере*, Тр. МФТИ **1** (4) 126-147 (2009).
[18] Сакбаев В.Ж. *О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шрёдингера с вырождением*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **46** (4), 683-699 (2006).
[19] Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж. *Стохастические свойства динамики квантовых систем*, Вестн. СамГУ **8** (1) 479–494 (2008).

В.Ж. Сакбаев

доцент,
кафедра высшей математики,
Московский физико-технический институт,
Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская обл., 141700,

e-mail: fumi2003@mail.ru

V.Z. Sakbaev

Associate Professor,
Moscow Psycical & Engineering Institute,
9 Institutskii lane, Dolgoprudnyi, Moscow region, 141700 Russia,

e-mail: fumi2003@mail.ru