ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 517.929

А.С. БАЛАНДИН, В.В. МАЛЫГИНА

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Введение

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$, χ — характеристическая функция множества $\mathbb{R}_+$, L_∞ — пространство функций, измеримых и ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$, E — тождественный оператор, S — оператор, определенный для $h = \mathrm{const} \in \mathbb{R}_+$ равенством (см. [1], с. 20)

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geq 0; \\ 0, & t-h < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа

$$\Bigl(E - \sum_{i=1}^{I} a_i S^i\Bigr)\dot{x}(t) = \Bigl(\sum_{j=0}^{J} b_j S^j\Bigr)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

в следующих предположениях и обозначениях: $I \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $h = \mathrm{const} \in \mathbb{R}_+$, функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ суммируема на каждом конечном отрезке $[0, l]$.

Под *решением* уравнения (1) будем понимать абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке $[0, l]$ функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую (1) почти всюду на $\mathbb{R}_+$.

Как известно ([1], с. 84, теорема 1.1), уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds, \tag{2}$$

где $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $C : \Delta \to \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (1). Удобно доопределить нулем фундаментальное решение на отрицательной полуоси, а функцию Коши — вне множества Δ.

Для автономного дифференциально-разностного уравнения, разрешенного относительно производной, между его функцией Коши и фундаментальным решением существует простая зависимость $C(t,s) = X(t-s)$ ([2], с. 116). Эта формула упрощает решение любой задачи устойчивости, сводя ее к исследованию определенных свойств функции X, которая является решением однородного уравнения (1) с начальным условием $x(0) = 1$.

Принципиальные трудности, которые возникают при исследовании асимптотических свойств решений уравнений, не разрешенных относительно производной (см. работы [3], [4], [5], сс. 177–178, 512–513), на наш взгляд, связаны с отсутствием простых формул, позволяющих по заданной функции Коши находить фундаментальное решение и наоборот. Получение таких соотношений для уравнений вида (1) и является целью данной работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-96069.

1. Вспомогательная задача

Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений, дополненных начально-краевыми условиями

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_k(\tau) - \sum_{i=1}^{I} a_i \dot{x}_{k-i}(\tau) = \sum_{j=0}^{J} b_j x_{k-j}(\tau), \quad k = 0, 1, 2, \dots ;\\
&x_k(\tau) = 0, \quad \dot{x}_k(\tau) = 0, \quad k = -1, -2, -3, \dots ;\\
&x_k(0) = x_{k-1}(h) + H_k, \quad k \in \mathbb{Z},
\end{aligned} \tag{3}$$

где $I \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j, H_k \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in [0, h]$.

Под *решением* задачи (3) будем понимать последовательность функций $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, абсолютно непрерывных на отрезке $[0, h]$.

Лемма 1. *Задача* (3) *однозначно разрешима.*

Доказательство. Очевидно, $x_0(\tau) = H_0 e^{b_0 \tau}$. Тогда, если найдены функции $x_0, x_1, \dots, x_k$, то x_{k+1} находится из (3) как решение задачи Коши линейного обыкновенного дифференциального уравнения, абсолютно непрерывное на $[0, h]$. $\square$

Обозначим

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}, \quad P_a(z) = \sum_{i=1}^{I} a_i z^i, \quad P_b(z) = \sum_{j=0}^{J} b_j z^j,$$

$$G(\tau, z) = \frac{\exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1-P_a(z)}\right)}{1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)} g_0(z), \tag{4}$$

где $z \in \mathbb{C}$, а g_0 является функцией комплексного переменного, аналитической в некоторой окрестности нуля.

Лемма 2. *Существует ненулевая окрестность нуля $B(0, r) \subseteq \mathbb{C}$ такая, что при любом $z \in B(0, r)$ краевая задача*

$$(1 - P_a(z)) \frac{\partial G(\tau, z)}{\partial \tau} = P_b(z) G(\tau, z), \tag{5}$$

$$G(0, z) - zG(h, z) = g_0(z) \tag{6}$$

имеет единственное решение, определяемое равенством (4).

Доказательство. Выберем круг $B(0, r_1) \subseteq \mathbb{C}$, в котором $1 - P_a(z) \neq 0$. Такой круг найдется, т. к. $P_a(z)$ — многочлен, причем $P_a(0) = 1 \neq 0$.

При любом $z \in B(0, r_1)$ общее решение уравнения (5) имеет вид

$$G(\tau, z) = C \exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1 - P_a(z)}\right), \tag{7}$$

где C — произвольное комплексное число. Покажем, что можно выбрать C, при котором будет выполняться (6). Подставляя (7) в (6), получаем

$$C\left(1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1 - P_a(z)}\right)\right) = g_0(z). \tag{8}$$

Найдем круг $B(0, r_2) \subseteq B(0, r_1)$, в котором $1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right) \neq 0$; такой круг найдется в силу непрерывности, а значит, ограниченности функции $\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)$ на любом замкнутом подмножестве круга $B(0, r_1)$. Наконец, найдем круг $B(0, r) \subseteq B(0, r_2)$, в котором функция g_0 аналитична. При любом $z \in B(0, r)$ из уравнения (8) однозначно находится $C = g_0(z)\left(1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)h}{1-P_a(z)}\right)\right)^{-1}$.

Тем самым доказано, что при всех $z \in B(0,r)$ функция $G(\cdot,z)$, заданная формулой (4), является единственным решением краевой задачи (5)–(6). $\square$

Теорема 1. *Пусть в задаче* (3) *числа* H_k, $k \in \mathbb{N}_0$, *таковы, что ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} H_k z^k$ *сходится в некоторой окрестности нуля. Последовательность функций* $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *тогда и только тогда является решением задачи* (3), *когда* $g_k(\tau)$ *представляют собой коэффициенты разложения в степенной ряд функции* $G(\tau,\cdot)$, *определенной равенством* (4) *при*

$$g_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k. \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — решение задачи (3). Как показано в [6], найдутся такие N_1, N_2, $R > 0$, что для элементов последовательности $\{g_k\}$ при $k \in \mathbb{N}_0$ справедливы оценки $|g_k(\tau)| \le N_1 R^{-k}$, $|\dot g_k(\tau)| \le N_2 R^{-k}$. Составим степенной ряд $F(\tau,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(\tau) z^k$ и ряд с коэффициентами из производных $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dot g_k(\tau) z^k$. Оба ряда при фиксированном $\tau \in [0,h]$ сходятся в круге $B(0,R)$, причем при любом $z \in B(0,R)$ они сходятся абсолютно и равномерно по τ на $[0,h]$. Следовательно, первый ряд допускает почленное дифференцирование и $\frac{\partial}{\partial\tau}F(\tau,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dot g_k(\tau) z^k$. Умножая обе части равенств задачи (3) на z^k и суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \dot g_k(\tau) z^k - \left(\sum_{i=1}^{I} a_i z^i\right) \sum_{k=0}^{\infty} \dot g_k(\tau) z^k = \left(\sum_{j=0}^{J} b_j z^j\right) \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\tau) z^k,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} g_k(0) z^k = z\sum_{k=0}^{\infty} g_k(h) z^k + \sum_{k=0}^{\infty} H_k z^k.$$

С учетом введенных выше обозначений и установленных свойств функции F, последние два равенства примут вид

$$(1 - P_a(z))\frac{\partial F(\tau,z)}{\partial\tau} = P_b(z) F(\tau,z),$$
$$F(0,z) = zF(h,z) + g_0(z).$$

Следовательно, при всех z из некоторой окрестности нуля $F(\cdot,z)$ является решением задачи (5)–(6). Не нарушая общности, можно считать, что в этой окрестности решение задачи (5)–(6) единственно, а значит, совпадает с функцией G, определенной равенством (4). Так как коэффициенты разложения функции $G(\tau,\cdot)$ в степенной ряд определяются однозначно, то они совпадают с $g_k(\tau)$.

Достаточность. Пусть G — функция, определенная равенством (4), где g_0 имеет вид (9). При каждом $\tau \in [0,h]$ функция $G(\tau,\cdot)$ является аналитической в некоторой окрестности нуля и представима в виде степенного ряда

$$G(\tau,z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\tau) z^k. \tag{10}$$

Аналитически продолжим $G(\cdot,z)$ на $\mathbb{C}$. Применим к формулам Коши для коэффициентов $g_k(\tau)$ теорему о дифференцировании по параметру ([7], с. 55): $\dot g_k(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,\xi)}{\xi^{k+1}} d\xi$, следовательно, $\frac{\partial}{\partial\tau}G(\tau,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dot g_k(\tau) z^k$. Подставим (10) в задачу (5)–(6), учтем доказанную выше дифференцируемость g_k по τ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях z. Получим, что последовательность $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является решением задачи (3). Так как решение задачи (3) в силу леммы 1 единственно, то $g_k = x_k$ при любом $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Обозначим через z_0 ближайшую к нулю точку, в которой нарушается аналитичность функции $G(\tau, \cdot)$. Легко заметить, что z_0 не зависит от τ, следовательно, в круге $B(0, |z_0|)$ функция $G(\tau, \cdot)$ является аналитической при любом $\tau \in [0, h]$.

Теорема 2. *Для того чтобы коэффициенты ряда* (10) *удовлетворяли неравенству* $|g_k(\tau)| \le Ne^{-\alpha k}$ *с положительными и не зависящими от* τ *постоянными* N *и* α, *необходимо и достаточно, чтобы* $|z_0| > 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $|g_k(\tau)| \le Ne^{-\alpha k}$. Подставляя это неравенство в (10), получаем $\Big|\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k(\tau) z^k\Big| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} |g_k(\tau)|\, |z^k| \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} Ne^{-\alpha k}|z|^k$. Ряд сходится при $|z| < e^{\alpha}$, где $\alpha > 0$, поэтому $|z_0| > 1$.

Достаточность. Пусть $|z_0| > 1$. Выберем R так, чтобы $1 < R < |z_0|$. Используя неравенство Коши для оценки коэффициентов степенного ряда, получаем $|g_k(\tau)| \le NR^{-k}$, где $N = \max\limits_{|z|=R, \tau\in[0,h]} |G(\tau, z)|$. Обозначив $\alpha = \ln R$, получаем $|g_k(\tau)| \le Ne^{-\alpha k}$. $\square$

2. Фундаментальное решение

Из формулы (2) следует, что функция X определяется как решение задачи Коши для уравнения (1) при $f = 0$ и $x(0) = 1$, т. е.

$$\begin{gathered}\Big(E - \sum_{i=1}^{I} a_i S^i\Big)\dot{X}(t) = \Big(\sum_{j=0}^{J} b_j S^j\Big) X(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ X(0) = 1.\end{gathered} \tag{11}$$

Лемма 3. *Функция* X *тогда и только тогда является решением задачи* (11), *когда последовательность* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *определяемая равенством*

$$x_k(\tau) = X(kh + \tau), \quad \tau \in [0, h], \tag{12}$$

является решением задачи (3) *при* $H_0 = 1$ *и* $H_k = 0$, $k \ne 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть X — решение задачи (11). Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$ и для любого $\tau \in [0, h]$ построим по правилу (12) функцию x_k, абсолютно непрерывную на $[0, h]$. Заметим, что при $k < 0$ $x_k(\tau) \equiv \dot{x}_k(\tau) \equiv 0$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи (3). Из непрерывности X при любом значении аргумента кроме нуля вытекает $x_k(0) = x_{k-1}(h)$ при $k \ne 0$. Рассмотрим поведение X в нуле. Так как $\lim\limits_{t\to 0-0} X(t) = 0$, а $X(0) = 1$, то $x_0(0) = x_{-1}(h) + 1$. Таким образом, установлено, что последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяет краевым условиям задачи (3) при $H_0 = 1$ и $H_k = 0$, $k \ne 0$.

Достаточность. Пусть $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — решение задачи (3) при указанном выборе H_k. Любое число $t \in \mathbb{R}$ можно (единственным образом) представить в виде $t = kh + \tau$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\tau \in [0, h)$. По формуле (12), на основании последовательности $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строим функцию $X(t) = x_k(\tau)$. По построению, X является абсолютно непрерывной функцией на каждом промежутке $[kh, (k+1)h)$; рассмотрим ее поведение в точках $t = kh$.

Если $k = 0$, то $t = 0$ и $X(0) = x_0(0) = 1$. Пусть $k \ne 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\lim_{t\to kh+0} X(t) = \lim_{\tau\to 0+0} X(kh+\tau) = \lim_{\tau\to 0+0} x_k(\tau) = x_k(0) = \\ = x_{k-1}(h) = \lim_{\tau\to h-0} X((k-1)h+\tau) = \lim_{t\to kh-0} X(t).\end{aligned}$$

Так как при $k < 0$ $x_k(\tau) \equiv 0$, то $X(t) \equiv 0$ при $t < 0$. При $t > 0$, по доказанному выше, X абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке из $\mathbb{R}_+$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что X удовлетворяет задаче (11). $\square$

Пусть X — фундаментальное решение уравнения (1). Поставим ему в соответствие по правилу (12) последовательность $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которой составим производящую функцию

$$F_X(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(\tau) z^k, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Лемма 4. $F_X(\tau, z) = \dfrac{\exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1-P_a(z)}\right)}{1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)}$, $\tau \in [0, h]$.

Доказательство. Лемма 3 устанавливает взаимнооднозначное соответствие между решением (11) и решением (3) при $H_0 = 1$ и $H_k = 0$, $k \neq 0$. По теореме 1 члены последовательности, являющейся решением задачи (3), суть коэффициенты разложения в степенной ряд функции (4) при условии аналитичности g_0 в некоторой окрестности нуля. В силу условий на H_k имеем $g_0(z) \equiv 1$, поэтому g_0 аналитична в $\mathbb{C}$, а формула (4) дает искомое представление. $\square$

3. Функция Коши

Рассмотрим уравнение

$$C(t, s) = 1 + \sum_{i=1}^{I} a_i C(t, s + ih) + \sum_{j=0}^{J} b_j \int_{s+jh}^{t} C(t, \mu)\, d\mu, \tag{14}$$

где $I \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+$, $(t, s) \in \Delta$. Как показано в ([1], с. 61), уравнение (14) может быть принято за определение функции Коши уравнения (1).

Наряду с (14) рассмотрим уравнение

$$Y(t) = 1 + \sum_{i=1}^{I} a_i (S^i Y)(t) + \sum_{j=0}^{J} b_j S^j \left(\int_0^t Y(\mu)\, d\mu \right), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{15}$$

Положим $Y(t) \equiv 0$ при $t \in (-\infty, 0)$.

Докажем, что уравнение (15) имеет единственное решение, являющееся абсолютно непрерывной функцией на каждом конечном отрезке $[kh - h, kh)$, $k \in \mathbb{N}$. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k = 1$ (15) имеет вид $Y(t) = 1 + b_0 \int\limits_0^t Y(\mu)\, d\mu$, $t \in [0, h)$. Единственным решением этого уравнения является абсолютно непрерывная функция $Y(t) = e^{b_0 t}$. Пусть Y — решение уравнения (15) на отрезке $[0, kh)$, абсолютно непрерывное на каждом полуинтервале $[lh - h, lh)$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Построим решение уравнения (15) на $[kh, kh + h)$. Преобразуем (15) к виду $Y(t) - b_0 \int\limits_{kh}^{t} Y(\mu)\, d\mu = u(t)$, где непрерывная функция u выразится через Y и его интегралы на $[lh - h, lh)$, $l = 1, 2, \ldots, k$. Решение этого уравнения имеет вид $Y(t) = e^{b_0(t-kh)} Y(kh) + \int\limits_{kh}^{t} e^{b_0(t-s)} u(s)\, ds$ и, значит, оно абсолютно непрерывно на $[kh, kh + h)$.

Рассмотрим поведение Y в окрестностях точек $t = kh$, $k \in \mathbb{Z}$. В силу абсолютной непрерывности Y на $[kh - h, kh)$ существуют пределы $\lim\limits_{t \to kh - 0} Y(t)$, $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$H_k = Y(kh) - \lim_{t \to kh-0} Y(t), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Заметим, что $H_0 = 1$, а $H_k = 0$ при $k \neq 0$. Используя (15), найдем

$$Y(kh) = 1 + \sum_{i=1}^{I} a_i Y((k-i)h) + \sum_{j=0}^{J} b_j \int_0^{(k-j)h} Y(\mu)\, d\mu,$$

$$\lim_{t\to kh-0} Y(t) = 1 + \lim_{t\to kh-0} \Big(\sum_{i=1}^{I} a_i Y(t-ih) \Big) + \lim_{t\to kh-0} \Big(\sum_{j=0}^{J} b_j \int_0^{t-jh} Y(\mu)\, d\mu \Big).$$

Вычитая из первого равенства второе с учетом (16) получаем

$$H_k = \sum_{i=1}^{I} a_i H_{k-i} + \sum_{j=0}^{J} b_j \Big(\int_0^{(k-j)h} Y(\mu) d\mu - \lim_{t\to kh-0} \int_0^{t-jh} Y(\mu)\, d\mu \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} a_i H_{k-i} + \sum_{j=0}^{J} b_j \lim_{t\to kh-0} \int_{t-jh}^{(k-j)h} Y(\mu)\, d\mu.$$

Функция Y является суммируемой на $[kh-h, kh]$, следовательно, $\lim\limits_{t\to kh-0} \int\limits_{t-jh}^{(k-j)h} Y(\mu) d\mu = 0$ для любых $k \in \mathbb{N}$ и $j \leq k$. Значит, $H_k = \sum\limits_{i=1}^{I} a_i H_{k-i}$.

Итак, *единственным решением уравнения* (15) *является функция* Y, *которая абсолютно непрерывна на любом отрезке* $[kh, kh+h)$, $k \in \mathbb{N}_0$, *и имеет в точках* $t = kh$ *конечные скачки* H_k, *определяемые следующим рекуррентным соотношением*:

$$\begin{aligned} &H_k = \sum_{i=1}^{I} a_i H_{k-i}, \quad k \in \mathbb{N}_0; \\ &H_0 = 1, \quad H_k = 0, \quad k \notin \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Лемма 5. *Пусть* C *— функция Коши уравнения* (1). *Тогда* $C(t,s) = Y(t-s)$, *где* Y *— решение уравнения* (15).

Доказательство. Заменой переменных преобразуем (15) к виду

$$Y(t-s) = 1 + \sum_{i=1}^{I} a_i Y(t-(s+ih)) + \sum_{j=0}^{J} b_j \int_{s+jh}^{t} Y(t-\mu)\, d\mu. \tag{18}$$

Сравнивая (14) и (18), в силу однозначной разрешимости (14) получаем $C(t,s) = Y(t-s)$. $\square$

Лемма 6. *Функция* Y *тогда и только тогда является решением уравнения* (15), *когда последовательность функций* $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, *определенная равенством*

$$y_k(\tau) = \begin{cases} Y(kh+\tau), & \tau \in [0,h); \\ \lim\limits_{\tau\to h-0} Y(kh+\tau), & \tau = h, \end{cases} \tag{19}$$

является решением задачи (3) *при* H_k, *определенных формулами* (17).

Доказательство. Необходимость. Пусть Y — решение уравнения (15). Зафиксируем $k \in \mathbb{Z}$. При $\tau \in [0,h]$ по правилу (19) получим функцию y_k, абсолютно непрерывную на $[0,h]$. Заметим, что $kh + \tau < 0$ при $k < 0$, значит, $y_k(\tau) \equiv \dot{y}_k(\tau) \equiv 0$. Пусть $k \geq 0$. Продифференцируем равенство (15) на интервале $[kh, kh+h)$

$$\dot{Y}(t) = \sum_{i=1}^{I} a_i \dot{Y}(t-ih) + \sum_{j=0}^{J} b_j Y(t-jh); \tag{20}$$

при этом $Y(kh)=\lim\limits_{t\to kh-0}Y(t)+H_k$, где H_k определены равенством (17). Отсюда следует, что последовательность $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является решением задачи (3).

Достаточность. Пусть $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ — решение задачи (3) при указанном выборе H_k. Любую точку $t\in\mathbb{R}$ можно представить в виде $t=kh+\tau$, где $k\in\mathbb{Z}$, $\tau\in[0,h)$. По формуле (19) на основании последовательности $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ строится функция $Y(t)=y_k(\tau)$, которая по построению является абсолютно непрерывной функцией на каждом промежутке $[kh,kh+h)$ и удовлетворяет уравнению (20). Вычисляя интегралы от обеих частей (20) последовательно по отрезкам $[0,h),[h,2h),\dots,[kh,t)$ и складывая их, получаем с учетом свойств H_k, что Y удовлетворяет уравнению (15). $\square$

Пусть C — функция Коши уравнения (1). С помощью леммы 5 и формулы (19) поставим ей в соответствие последовательность $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, для которой составим производящую функцию

$$F_C(\tau,z)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k(\tau)z^k,\quad z\in\mathbb{C}. \tag{21}$$

Лемма 7. $F_C(\tau,z)=\dfrac{1}{1-P_a(z)}\dfrac{\exp\left(\frac{P_b(z)\,\tau}{1-P_a(z)}\right)}{1-z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)}$, $\tau\in[0,h]$.

Доказательство. Согласно лемме 5 $C(t,s)=Y(t-s)$, где C — функция Коши уравнения (1), а Y — решение уравнения (15). Лемма 6 устанавливает соответствие между решением (15) и решением (3) при H_k, удовлетворяющих соотношению (17). По теореме 1 члены последовательности, являющейся решением (3), являются коэффициентами разложения в степенной ряд функции (4) при условии аналитичности g_0 в некоторой окрестности нуля. В силу условий на H_k, функция $g_0(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}H_kz^k$ удовлетворяет равенству $g_0(z)=1+P_a(z)g_0(z)$ и имеет вид $g_0(z)=\frac{1}{1-P_a(z)}$, следовательно, g_0 аналитична в некоторой окрестности нуля, а формула (4) дает искомое представление. $\square$

4. Основные результаты

Следующие теоремы устанавливают связь между функцией Коши и фундаментальным решением, а также их производящими функциями.

Из лемм 4 и 7 очевидным образом следует

Теорема 3. *Пусть r_X, r_C — радиусы сходимости рядов* (13) *и* (21). *Тогда $r_C\le r_X$, а для сумм этих рядов имеет место равенство $F_C(\tau,z)=\frac{1}{1-P_a(z)}F_X(\tau,z)$.*

Теорема 4. *Пусть X — решение задачи* (11), *а Y — решение уравнения* (15). *Тогда*

$$X(t)=\Big(E-\sum_{i=1}^{I}a_iS^i\Big)Y(t). \tag{22}$$

Доказательство. Из определения функций F_X и F_C в силу теоремы 3 имеем $\sum\limits_{k=0}^{\infty}y_k(\tau)z^k=\frac{1}{1-P_a(z)}\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k(\tau)z^k$, следовательно, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\Big(1-\sum\limits_{i=0}^{I}a_iz^i\Big)y_k(\tau)z^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k(\tau)z^k$, откуда, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях z, находим, что при любом $\tau\in[0,h]$ справедливо равенство $y_k(\tau)-\sum\limits_{i=1}^{I}a_iy_{k-i}(\tau)=x_k(\tau)$. Используя (12) и (19), получаем $Y(\tau)-\sum\limits_{i=1}^{I}a_iY(t-ih)=X(t)$. Так как $X(t)\equiv 0$ при $t<0$, то равенство (22) доказано. $\square$

Из теоремы 2 и леммы 4 следует

Теорема 5. *Фундаментальное решение уравнения* (1) *имеет экспоненциальную оценку*

$$|X(t)| \le Ne^{-\alpha t}, \quad N, \alpha > 0, \tag{23}$$

тогда и только тогда, когда все особенности функции $\left(1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)\right)^{-1}$ *лежат вне единичного круга* $|z| \le 1$.

Из лемм 5, 7 и теоремы 2 следует

Теорема 6. *Функция Коши уравнения* (1) *имеет экспоненциальную оценку*

$$|C(t,s)| \le Ne^{-\alpha(t-s)}, \quad N, \alpha > 0, \tag{24}$$

тогда и только тогда, когда особенности функций $\left(1 - z\exp\left(\frac{P_b(z)\,h}{1-P_a(z)}\right)\right)^{-1}$ *и* $(1-P_a(z))^{-1}$ *лежат вне единичного круга* $|z| \le 1$.

При сравнении производящих функций F_C и F_X может возникнуть гипотеза, что функция Коши и фундаментальное решение имеют одинаковую асимптотику, поскольку особенности функции $(1-P_a(z))^{-1}$ должны проявиться и при анализе особенностей функции F_X. Следующие примеры показывают, что эта гипотеза неверна.

Пример 1. Пусть $I = 0$, $J = 0$, $b_0 = 0$, $a_1 = a$. Тогда уравнение (1) имеет вид

$$(E - aS)\dot{x}(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{25}$$

Из определения фундаментального решения следует $X(t) = \chi(t)$, а из формулы (22) и леммы 5 получаем $C(t,s) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a^i\chi(t - ih - s)$. Пусть $a > 1$, тогда, очевидно, фундаментальное решение ограничено, в то время как функция Коши имеет экспоненциальный рост.

Более того, возможен случай, когда фундаментальное решение экспоненциально убывает, а функция Коши экспоненциально растет.

Пример 2. Пусть $I = 1$, $J = 2$, $a_1 = a$, $b_0 = b$, $b_1 = ab$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$(E - aS)\dot{x}(t) = -b(E - aS)x(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{26}$$

Легко убедиться, что $X(t) = \chi(t)e^{-bt}$ — фундаментальное решение этого уравнения. Используя (22) и лемму 5, строим функцию Коши $C(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \chi(t - jh - s)e^{-b(t-jh-s)}a^j$. Непосредственный подсчет по направлению $s = 0$ в точках $t = kh$, $k \in \mathbb{N}_0$, приводит к равенствам $C(kh, 0) = Y(kh) = \frac{a^{k+1} - e^{-b(k+1)}}{a - e^{-b}}$. Очевидно, при $a > 1$ и $b > 0$ функция Коши неограниченно растет, в то время как фундаментальное решение экспоненциально убывает.

Причины различного асимптотического поведения функции Коши и фундаментального решения становятся легко объяснимыми, если построить соответствующие производящие функции.

Для уравнения (25)

$$F_X(\tau, z) = \frac{\exp\left(\frac{0\tau}{1-az}\right)}{1 - z\exp\left(\frac{0h}{1-az}\right)} = \frac{1}{1-z}, \quad F_C(\tau, z) = \frac{1}{1-az}\frac{1}{1-z}. \tag{27}$$

Для уравнения (26)

$$F_X(\tau, z) = \frac{\exp\left(\frac{b-abz}{1-az}\,\tau\right)}{1 - z\exp\left(\frac{b(1-az)}{1-az}\,h\right)} = \frac{\exp(b\tau)}{1 - z\exp(bh)}, \quad F_C(\tau, z) = \frac{1}{1-az}\frac{\exp(b\tau)}{1 - z\exp(bh)}. \tag{28}$$

И в том, и в другом случае многочлены $P_b(z)$ и $1 - P_a(z)$ имеют общие корни внутри круга $|z| \leq 1$. Это и позволяет строить примеры уравнений с различным поведением фундаментального решения и функции Коши.

Теорема 7. *Пусть $\delta(z)$ — наибольший общий делитель многочленов $1-P_a(z)$ и $P_b(z)$. Оценки (23) и (24) выполняются одновременно тогда и только тогда, когда все корни $\delta(z)$ лежат вне круга $|z| \leq 1$.*

Доказательство. Очевидно, если имеет место оценка (24), то выполнена и оценка (23) без каких-либо дополнительных условий. Значит, в доказательстве нуждается только переход от (23) к (24).

Пусть $1 - P_a(z) = p(z)\delta(z)$ и $P_b(z) = q(z)\delta(z)$. Для экспоненциальной оценки на фундаментальное решение X необходимо и достаточно, чтобы все корни функции $1 - ze^{\frac{q(z)h}{p(z)}}$ лежали вне единичного круга $|z| \leq 1$. Производящая функция F_C отличается от F_X множителем $\frac{1}{p(z)\delta(z)}$; значит, все точки неаналитичности F_C лежат вне единичного круга тогда и только тогда, когда корни многочлена $\delta(z)$ не добавляют функции F_C новых точек неаналитичности, лежащих внутри единичного круга. Понятно, что это возможно в том и только том случае, когда все корни $\delta(z)$ лежат вне единичного круга. □

Из теоремы 6 следует, что *необходимым условием* существования оценки (24) является требование отсутствия у функции $(1 - P_a(z))^{-1}$ особенностей внутри единичного круга, т. е. многочлен $1 - P_a(z)$ не должен обращаться в нуль внутри круга $|z| \leq 1$. Последнее утверждение, как показано в работе [8], допускает ряд эквивалентных переформулировок.

Теорема 8 ([8]). *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *все корни многочлена $1 - P_a(z)$ расположены вне единичного круга $|z| \leq 1$;*
2. *оператор $E - \sum\limits_{i=1}^{I} a_i S^i$ имеет в пространстве L_∞ ограниченный обратный*;
3. *оператор $\lambda E - S$, где λ — любой корень многочлена $1 - P_a(z)$, имеет в пространстве L_∞ ограниченный обратный.*

Из этой теоремы следует, что необходимым условием экспоненциальной устойчивости уравнения (1) является требование ограниченной обратимости в пространстве L_∞ оператора при производной. Отметим, что вопрос о наличии экспоненциальной оценки у фундаментального решения и функции Коши уравнения (1) изучался в [3], [4]. Существенно, что в этих работах предполагалось выполненным неравенство $\sum\limits_{i=1}^{I} |a_i| < 1$, которое гарантирует ограниченную обратимость, но не является необходимым ее условием.

В заключение сделаем ряд замечаний об устойчивости неоднородного уравнения (1). Рассмотрим уравнение (1) с правой частью $f \in L_\infty$. Если функция Коши имеет экспоненциальную оценку (24), то по теоремам 5 и 6 фундаментальное решение имеет оценку (23). В силу формулы (2) решение уравнения (1) ограничено. По теоремам 6 и 8 экспоненциальная оценка функции Коши влечет ограниченную обратимость оператора $E - \sum\limits_{i=1}^{I} a_i S^i$ в пространстве L_∞, т. е., разрешив уравнение (1) относительно производной, получим, что производная уравнения (1) также будет ограничена.

Итак, из экспоненциальной оценки функции Коши вытекает устойчивость решения (1) *и его производной по правой части из L_∞.*

С другой стороны, покажем, что наличия экспоненциальной оценки фундаментального решения, вообще говоря, недостаточно для ограниченности решения уравнения (1) при ограниченной правой части.

Рассмотрим уравнение (26) при $x(0) = 0$ и $f = 1$. Фундаментальное решение и функция Коши $X(t) = \chi(t)e^{-bt}$, $C(t,s) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \chi(t - jh - s)e^{-b(t-jh-s)}a^j$ этого уравнения были построены выше. Несложно показать, что функция $x(t)=\sum\limits_{j=0}^{[t/h]}\int\limits_0^{t-jh} e^{-b(t-jh-s)}a^j\,ds$ является решением данной задачи. Полагая $t=kh$, где $k\in\mathbb{N}_0$, получаем $x(kh)=\frac{1}{b}\big(\frac{1}{1-a}+\frac{e^{-bh(k+1)}}{a-e^{-bh}}-\frac{a^{k+1}(1-e^{-bh})}{(1-a)(a-e^{-bh})}\big)$. При $b>0$, $a>0$, очевидно, $|x(kh)|\to\infty$, т. е. функция x неограничена, в то время как фундаментальное решение имеет экспоненциальную оценку.

Иными словами, *из экспоненциальной оценки фундаментального решения в общем случае не следует устойчивость решения* (1) *по правой части из* L_∞.

5. Примеры

Проиллюстрируем полученные результаты рядом примеров, установив для некоторых классов уравнений вида (1) признаки экспоненциальной устойчивости.

Сначала закончим исследование примеров 1 и 2. Из формул (27) следует, что ни при каких a и h функция Коши и фундаментальное решение уравнения (25) не имеют экспоненциальных оценок. Анализируя производящие функции (28), получаем, что фундаментальное решение уравнения (26) имеет оценку (23) тогда и только тогда, когда $b>0$, а необходимым и достаточным условием оценки (24) для функции Коши будет выполнение неравенств $b>0$, $|a|<1$.

Используя метод производящих функций, легко расширить список уравнений, для которых можно получить коэффициентные признаки экспоненциальной устойчивости.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$(E-aS)\dot{x}(t)=bSx(t)+f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Анализируя производящие функции F_X и F_C, получим следующий известный [4] результат: для того чтобы фундаментальное решение и функция Коши этого уравнения имели экспоненциальные оценки, необходимо и достаточно выполнения неравенств $|a|<1$, $b<0$, $bh+\sqrt{1-a^2}\,\arccos a>0$.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$(E-aS)\dot{x}(t)=-bS(E-aS)x(t)+f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Анализируя производящие функции F_X и F_C, получаем, что фундаментальное решение этого уравнения имеет оценку (23) тогда и только тогда, когда $bh\in\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$, а его функция Коши имеет оценку (24) тогда и только тогда, когда $|a|<1$, $bh\in(0,\frac{\pi}{2})$.

В заключение отметим, что близкие результаты, связанные с получением точных оценок решений уравнений нейтрального типа, содержатся в ([5], сс. 177–178, 512–513, [9], [10]).

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. – 230 с.
3. Соколов В.А. *Об устойчивости одного класса линейных уравнений нейтрального типа* // Краевые задачи. — Пермь: Перм. политехн. ин-т., 1984. – С. 60–63.
4. Соколов В.А. *Экспоненциальная оценка матрицы Коши и устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа.* – Перм. политех. ин-т. – Пермь, 1985. — 21 с. — Деп. в ВИНИТИ 11.04.85, № 2419-85.
5. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М.: Мир, 1967. — 548 с.
6. Баландин А.С., Малыгина В.В. *Об оценке решения одного класса разностных уравнений* // Вычисл. механ. – Пермь, 2006. – № 5. – С. 3–8.

7. Ефимов А.В. *Математический анализ* (*специальные разделы*). Ч. 1. *Общие функциональные ряды и их приложение.* – М.: Высш. школа, 1980. – 279 с.
8. Баландин А.С., Малыгина В.В. *О разрешимости одного класса разностных уравнений* // Вычисл. механ. – Пермь, 2006. – № 4. – С. 67–72.
9. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
10. Власов В.В., Медведев Д.А. *Об оценках решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 6. – С. 21–29.

Пермский государственный технический университет

Поступила 27.03.2006