И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 517.52

Д.М. ДЬЯЧЕНКО

О НЕКОТОРЫХ КОНСТАНТАХ В АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДАХ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ H^ω

1. Введение. Если $f(x)$ — 2π-периодическая функция, интегрируемая по Лебегу, то будем обозначать через

$$\sigma(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{1}$$

ее ряд Фурье, а через

$$\|f\|_A = \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

— сумму модулей коэффициентов Фурье этой функции (см. (1)). Будем полагать $a_0 = 0$, т.к. это не повлияет на дальнейшие результаты. Пусть $H^\omega = \{f : \omega(f,\delta) \le \omega(\delta),\ 0 \le \delta \le \pi\}$, где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, т.е.

$$\omega(\delta, f) = \sup_{|t|\le\delta,\ 0\le x\le 2\pi} |f(x+t) - f(x)|,$$

а $\omega(\delta)$ — некоторая непрерывная полуаддитивная неубывающая функция для $0 \le \delta \le \pi$ с $\omega(0) = 0$.

С.Н. Бернштейном было установлено (см., напр., [1], с. 608), что если $f \in \operatorname{Lip}\alpha$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то $\|f\|_A < \infty$. Им также было доказано (см. [1], с. 608), что если $f \in H^\omega$ с

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{1}{k}\right)}{\sqrt{k}} < \infty,$$

то $f \in A$. Для некоторого класса функций H^ω рассмотрим величину $\sup\limits_{f\in H^\omega} \|f\|_A$.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть $\omega^{(2)}(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f в $L^2[0,2\pi]$, т.е.

$$\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{|h|\le\delta} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx},$$

а $E_n^{(2)}(f)$ — наилучшее приближение функции f в $L^2[0,2\pi]$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$, т.е.

$$E_n^{(2)}(f) = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_{L^2} = \inf_{\{c_k, d_k\}} \|f - T_n\|_{L^2},$$

где $T_n = \frac{c_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k \cos kx + d_k \sin kx$.

Теорема А ([2], с. 230) *Пусть $\sigma(f)$ — ряд Фурье функции $f \in L^2[0,2\pi]$. Зададим возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_k}| + |b_{n_k}| \le C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \omega^{(2)}\Big(\frac{1}{n_k}, f\Big).$$

Дословно повторяя доказательство теоремы A, можно установить, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n_k}|+|b_{n_k}|\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\omega^{(2)}\Big(\frac{\pi}{n_k},f\Big),$$

где константу C можно взять равной $(2\sqrt{2}/\sqrt{3\pi})K$, а K — константа из неравенства Джексона $E_n^{(2)}(f)\le K\omega^{(2)}(\frac{\pi}{n},f)$ для приближений в метрике пространства $L^2[0,2\pi]$. Н.И. Черных показал (напр., [3], с. 237, теорема 9.3.1), что верна

Теорема B. *Для любой функции f из $L^2[0,2\pi]$ имеют место неравенства*

$$E_n^{(2)}(f)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\omega^{(2)}\Big(\frac{\pi}{n},f\Big)\quad(n=1,2,\dots).$$

Принимая во внимание теорему A, будем считать $C=\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$. Также будет использовано утверждение Рудина–Шапиро (напр., [4], с. 155).

Лемма. *Существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, что $\varepsilon_n\in\{1,-1\}$ при всех n и*

$$\Big|\sum_{n=0}^{N}\varepsilon_n e^{int}\Big|<5\sqrt{N+1}$$

при $N=0,1,2\dots$ и $t\in[0,2\pi]$.

При доказательстве леммы (см. [4], с. 155–156) использовались многочлены $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ степени 2^k, построенные рекуррентным образом, а именно

$$P_{k+1}(x)=P_k(x)+x^{2^k}Q_k(x),\quad Q_{k+1}(x)=P_k(x)-x^{2^k}Q_k(x).$$

Первые 2^k коэффициентов многочленов $P_k(x)$ и $P_{k_1}(x)$ совпадают и равны либо 1, либо -1. А ε_n полагается равным коэффициенту при x^n в многочленах $P_k(x),P_{k+1}(x),\dots$, где $2^k-1\ge n$. Далее показывалось, что если $S_n(P_k)$ — n-я частичная сумма многочлена P_k, то для $k\ge0$ и $0\le n<2^k$ выполнены неравенства $|S_n(P_k)|\le(2+\sqrt{2})2^{k/2}$ и $|S_n(Q_k)|\le(2+\sqrt{2})2^{k/2}$. В итоге, подставляя $x=e^{it}$, получим, что для последовательности $\{\varepsilon_l\}$ выполнено

$$|S_n(P_{k+1})-P_k|=|S_n(e^{i2^kt}Q_k)|=\Big|S_n\Big(\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1}\varepsilon_l e^{ilt}\varepsilon\Big)\Big|\le(2+\sqrt{2})2^{k/2}\tag{2}$$

при $k\ge0$, $2^k\le n<2^{k+1}$ и $t\in[0,2\pi]$.

Будем говорить, что функция $\omega(t)$ удовлетворяет условиям B' и B, если существуют некоторые константы C' и C, для которых выполнено соответственно

$$h\sum_{k=1}^{\left[\log_2\frac{1}{h}\right]}\omega(\pi2^{-k+1})2^k\le C'\omega(x)\ \text{ при }\ 0<h\le\frac{1}{2}$$

и

$$\sum_{k=\left[\log_2\frac{1}{h}\right]+1}^{\infty}\omega(\pi2^{-k+1})\le C\omega(h)\ \text{ при }\ 0<h\le1.$$

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}}\varepsilon_n\sin nx,\tag{3}$$

где $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность из леммы. Используя методы, разработанные в статье [5], можно доказать следующие утверждения

Утверждение 1. *Пусть модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию B, тогда ряд (3) равномерно сходится на $[0,2\pi]$ к некоторой непрерывной функции $g_\omega(x)$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $N_0 < N \le M$ рассмотрим

$$A = \sum_{k=N}^{M} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n \sin nx.$$

Заметим, если $v_1, v_2, \dots, v_n$ не возрастают и неотрицательны, то (см. [5] с. 15)

$$\Big| \sum_{k=1}^{n} v_k u_k \Big| \le v_1 \max_k |U_k|, \tag{4}$$

где $U_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$ для $k = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая условия B и то, что для $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполнены неравенства (см. (2))

$$\max_{2^{k-1} \le l < 2^k} \Big| \sum_{n=2^{k-1}}^{l} \varepsilon_n \sin nx \Big| \le (2 + \sqrt{2}) 2^{\frac{k-1}{2}}$$

при $k \ge 1$ и $x \in [0, 2\pi]$, получаем[1]

$$|A| = \Big| \sum_{k=[\log_2 N]+1}^{[\log_2 M]+1} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n \sin nx -$$

$$- \sum_{n=2^{\log_2 N}}^{N-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n \sin nx - \sum_{n=M+1}^{2^{[\log_2 M]+1}-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n \sin nx \Big| \le$$

$$\le \sum_{k=[\log_2 N]+1}^{[\log_2 M]+1} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} \max_{2^{k-1} \le l < 2^k} \Big| \sum_{n=2^{k-1}}^{l} \varepsilon_n \sin nx \Big| +$$

$$+ \frac{\omega(\pi 2^{-[\log_2 N]})}{2^{\frac{[\log_2 N]}{2}}} \max_{2^{[\log_2 N]} \le l < 2^{[\log_2 N]+1}} \Big| \sum_{n=2^{[\log_2 N]}}^{l} \varepsilon_n \sin nx \Big| +$$

$$+ \frac{\omega(\pi 2^{-[\log_2 M]})}{2^{\frac{[\log_2 M]}{2}}} \max_{2^{[\log_2 M]} \le l < 2^{[\log_2 M]+1}} \Big| \sum_{n=2^{[\log_2 M]}}^{l} \varepsilon_n \sin nx \Big| \le$$

$$\le (2 + \sqrt{2}) \Big(\sum_{k=[\log_2 N]+1}^{[\log_2 M]+1} \omega(\pi 2^{-k+1}) + \omega(\pi 2^{-[\log_2 N]}) + \omega(\pi 2^{-[\log_2 M]}) \Big) \le R \omega\Big(\frac{\pi}{N_0 - 1}\Big),$$

где R — некоторая константа.

Принимая во внимание тот факт, что $\omega(t)$ — непрерывная функция и $\omega(0) = 0$, выберем N_0 таким, чтобы

$$\omega\Big(\frac{\pi}{N_0 - 1}\Big) \le \frac{\varepsilon}{R}$$

и, следовательно, $|A| \le \varepsilon$ при всех $M \ge N > N_0$, и поэтому утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям B и B' с константами C и C'. Тогда $\frac{g_\omega(x)}{K} \in H^\omega$, где $K = (2 + \sqrt{2})(2C + C')$.*

Доказательство. Пусть $0 < h < \frac{1}{2}$, тогда

$$g_\omega(x) - g_\omega(x + h) = \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n (\sin nx - \sin n(x + h)) +$$

[1]Здесь и далее, если значение верхнего индекса суммирования меньше нижнего, то суммы принимаются равными нулю.

$$+\sum_{k=[\log_2 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n(\sin nx - \sin n(x+h)) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Напишем несколько соотношений, которые понадобятся в дальнейшем. Полагая $P_{n,l}(x) = \sum\limits_{k=2^{n-1}}^{l} \varepsilon_n \sin kx$, с помощью неравенства (2) получаем

$$|P_{n,l}(x)| \le (2+\sqrt{2})2^{\frac{n-1}{2}} \tag{5}$$

при $x \in [0, 2\pi]$, $n \ge 0$ и $2^{n-1} \le l < 2^n$. В силу неравенств Лагранжа и Бернштейна имеем

$$|P_{n,l}(x) - P_{n,l}(x+h)| \le h \max_{x\in[0,2\pi]} |P'_{n,l}(x)| \le h 2^n \max_{x\in[0,2\pi]} |P_{n,l}(x)| \le (2+\sqrt{2}) h 2^{n+\frac{n-1}{2}} \tag{6}$$

при $x \in [0, 2\pi]$, $n \ge 0$ и $2^{n-1} \le l < 2^n$. Для использования неравенства (4) важно отметить, что $v_n = \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}}$ — невозрастающая последовательность. Это вытекает при $n \ge 1$ из неравенства

$$\frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} - \frac{\omega(\frac{\pi}{n+1})}{\sqrt{n+1}} = \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) - \omega\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right) \ge 0,$$

т. к. $\omega(t)$ — неубывающая функция.

Принимая во внимание неравенства (4) и (6), получаем цепочку неравенств

$$|\Sigma_1| \le \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} \left| \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n(\sin nx - \sin n(x+h)) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} \max_{2^{k-1} \le l < 2^k} |P_{k,l}(x) - P_{k,l}(x+h)| \le$$

$$\le (2+\sqrt{2}) h \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} 2^{k+\frac{k-1}{2}} \le (2+\sqrt{2}) C' \omega(h),$$

где последнее неравенство получено вследствие того, что для $\omega(t)$ выполнено условие B'.

Учитывая (4) и (5), получаем

$$|\Sigma_2| \le \sum_{k=[\log_2 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} \left| \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n(\sin nx - \sin n(x+h)) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=[\log_2 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} \max_{2^{k-1} \le l < 2^k} |P_{k,l}(x) - P_{k,l}(x+h)| \le$$

$$\le 2(2+\sqrt{2}) \sum_{k=[\log_2 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Но т. к. для $\omega(t)$ выполнено условие B, то окончательно получаем

$$|\Sigma_2| \le 2(2+\sqrt{2}) C \omega(h).$$

При $\frac{1}{2} < h \le 1$ имеем $\Sigma_1 = 0$, т. к. верны неравенства (5) и (4), а для $\omega(t)$ выполнено условие B при $h \le 1$, имеем

$$|\Sigma_2| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{\omega(\frac{\pi}{n})}{\sqrt{n}} \varepsilon_n(\sin nx - \sin n(x+h)) \right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} \max_{2^{k-1} \le l < 2^k} |P_{k,l}(x) - P_{k,l}(x+h)| \le$$

$$\leq 2(2+\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega(\pi 2^{-k+1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} 2^{\frac{k-1}{2}} \leq 2(2+\sqrt{2}) C\omega(h).$$

Наконец, при $h > 1$ имеем $\Sigma_1 = 0$, а поскольку $\omega(t)$ — возрастающая функция, то, учитывая неравенство для Σ_2 при $h = 1$, получаем

$$|\Sigma_2| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}} \varepsilon_n \sin nx \right| \leq 2(2+\sqrt{2}) C\omega(1) \leq 2(2+\sqrt{2}) C\omega(h).$$

Таким образом, для $g_\omega(x)$ при $0 \leq h \leq \pi$ выполнено неравенство

$$\omega(h, g_\omega) \leq (2+\sqrt{2})(2C + C')\omega(h),$$

что и доказывает справедливость утверждения.

Следствие 1. Если $\omega(t) = t^\alpha$ при $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и $t \in [0, \pi]$, то $g_\omega(x) \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, где $M = \frac{2(2\pi)^\alpha (3 - 2^\alpha - 2^{-\alpha})(2+\sqrt{2})}{(2^{1-\alpha} - 1)(2^\alpha - 1)}$.

Доказательство. Пусть $0 < h < \frac{1}{2}$, тогда

$$h \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} \omega(\pi 2^{-k+1}) 2^k = \pi^\alpha h \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} 2^{k - \alpha(k-1)} =$$

$$= \pi^\alpha 2^\alpha h \sum_{k=1}^{[\log_2 \frac{1}{h}]} 2^{k(1-\alpha)} = \pi^\alpha 2^\alpha h \frac{2^{(1-\alpha)([\log_2 \frac{1}{h}]+1)} - 1}{2^{1-\alpha} - 1} \leq$$

$$\leq \pi^\alpha 2h \frac{2^{(1-\alpha)\log_2 \frac{1}{h}}}{2^{1-\alpha} - 1} = \frac{2\pi^\alpha}{2^{1-\alpha} - 1} h^\alpha = C' h^\alpha.$$

Теперь при $0 < h \leq 1$ находим константу для $\omega(t)$ в условии B, получаем

$$\sum_{k=[\log_1 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} \omega(\pi 2^{-k+1}) = \pi^\alpha 2^\alpha \sum_{k=[\log_2 \frac{1}{h}]+1}^{\infty} 2^{-k\alpha} =$$

$$= \pi^\alpha \frac{2^\alpha 2^{-\alpha([\log_2 \frac{1}{h}]+1)}}{1 - 2^{-\alpha}} \leq \frac{2^\alpha \pi^\alpha}{1 - 2^{-\alpha}} h^\alpha = \frac{4^\alpha \pi^\alpha}{2^{\alpha - 1}} h^\alpha = C h^\alpha.$$

Таким образом, используя утверждение 2, получаем $g_\omega(x) \in \operatorname{Lip}_M \alpha$, где $M = (2\pi)^\alpha (2 + \sqrt{2})\left(\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha} - 1} + \frac{2^{\alpha+1}}{2^\alpha - 1}\right) = \frac{2(2\pi)^\alpha (3 - 2^\alpha - 2^{-\alpha})(2+\sqrt{2})}{(2^{1-\alpha} - 1)(2^\alpha - 1)}$. $\square$

3. Основной результат. Теорема. *Пусть $\omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям B и B'. Тогда справедливы неравенства*

$$K_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}} \leq \sup_{f \in H^\omega} \|f\|_A \leq K_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}}, \tag{7}$$

где $K_1 = \frac{1}{(2+\sqrt{2})(2C + C')}$, $K_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Доказательство. Так как выполнено неравенство

$$\omega^{(2)}\left(\frac{\pi}{k}, f\right) = \sup_{|h| \leq \frac{\pi}{k}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx} \leq \sqrt{2\pi}\, \omega\left(\frac{\pi}{k}\right),$$

то, полагая $n_k = k$ в теореме A, с учетом всех упомянутых выше предположений, получаем

$$\|f\|_A \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}}.$$

С другой стороны,

$$\|g_\omega\|_A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}}.$$

Согласно утверждению 2 при $K = (2+\sqrt{2})(2C + C')$ имеем

$$\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega\left(\frac{\pi}{k}\right)}{\sqrt{k}} = \left\| \frac{g_\omega}{K} \right\|_A \le \sup_{f \in H^\omega} \|f\|_A.$$

Из полученных оценок вытекают неравенства (7). $\square$

Следствие 2. Для чисел $M > 0$ и $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ справедливы неравенства

$$A_1 \frac{M}{2\alpha - 1} \le \sup_{f \in \mathrm{Lip}_M \alpha} \|f\|_A \le A_2 \frac{M}{2\alpha - 1},$$

где $A_1 = \frac{(2^{1-\alpha}-1)(2^\alpha - 1)}{2^\alpha(3 - 2^\alpha - 2^{-\alpha})(2+\sqrt{2})}$ и $A_2 = \frac{2\sqrt{2}\pi^\alpha(2\alpha+1)}{\sqrt{3}}$.

Доказательство. Оценим сверху и снизу ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^\alpha}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+\alpha}} \ge \int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}+\alpha}} dx = \frac{2}{2\alpha - 1}.$$

Теперь напишем оценку сверху

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+\frac{1}{2}}} \le 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+\frac{1}{2}}} dx = 1 + \left.\frac{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\frac{1}{2} - \alpha}\right|_1^\infty = 1 + \frac{1}{\alpha - \frac{1}{2}} = \frac{2\alpha+1}{2\alpha - 1}.$$

Для получения окончательного результата остается применить теорему и следствие 1. $\square$

Замечание. Отметим, что более слабый результат следствия 2 был опубликован в [5].

Литература

1. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов* // Матем. сб. – 1951. – Т. 29. – № 1. – С. 225–232.
3. Корнейчук Н.П. *Экстремальные задачи теории приближения.* – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. *Мера и интеграл.* – М.: Факториал, 1998. – 159 с.
5. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.
6. Дьяченко Д.М. *О точных константах в абсолютно сходящихся рядах Фурье из класса* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. механ. – 2005. – № 2. – С. 17–21.

Московский государственный университет

Поступила
18.07.2005