ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 512:519.4

В.Ю. ПОПОВ

ОБ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ КЛАССОВ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Первый пример многообразия универсальных алгебр с неразрешимой эквациональной теорией был найден А. Тарским (см. [1]–[3]). А.И. Мальцев в работе [4] построил конечно базируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил вопрос [5] о существовании конечно базируемых многообразий полугрупп, групп и колец с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для групп получен в [6]. Первый пример конечно базируемого многообразия полугрупп с неразрешимой эквациональной теорией построен в [7]. Другие примеры многообразий полугрупп с неразрешимой эквациональной теорией можно найти в ([8], теорема 3.16, [9], [10]). В [11] анонсировано, что произвольное конечно базируемое многообразие ассоциативных колец имеет разрешимую эквациональную теорию. Примеры многообразий неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией построены в [12]–[17]. В работе [18] доказано, что существует конечно базируемое многообразие полугрупп такое, что эквациональная теория класса всех его конечных полугрупп неразрешима. Описание многообразий полугрупп с таким условием получено в ([8], теорема 3.17). Пример конечно базируемого многообразия неассоциативных колец такого, что эквациональная теория класса всех его конечных колец неразрешима, построен в [19]. В связи с этими результатами представляет интерес

Теорема. *Существует конечно базируемое многообразие неассоциативных колец с неразрешимой эквациональной теорией такое, что эквациональная теория класса всех его конечных колец тоже неразрешима.*

Доказательство теоремы основано на интерпретации работы двухленточной машины Минского. Отметим, что впервые этот метод был использован в [20] при доказательстве неразрешимости квазиэквациональной теории классов конечных полугрупп и ассоциативных колец. Подробное изложение методов интерпретации машин Минского, а также обзор относящихся сюда результатов дан в [8].

Пусть P – некоторое рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел, $\mathfrak{p}$ — частичная характеристическая функция множества P [21]. Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую функцию $\mathfrak{p}$ [22]. В дальнейшем будем полагать, что $q_0, q_1, q_2, \dots, q_m$ — внутренние состояния машины M, где q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное состояние. Если машина находится в состоянии q_i и j-я лента сдвинута на ξ_j ячеек влево, то будем говорить, что M находится в конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$.

Введем ряд обозначений для слов свободного группоида Γ со свободным порождающим множеством $e, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ Пусть

$$s(x_1, \dots, x_k) = ((x_{k-1}((\dots(x_4((x_1x_2)x_3))x_5\dots)x_{k-2}))x_k),$$
$$t(x_1, \dots, x_{k+l}) = s(s(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}, \dots, x_{k+l}).$$

Если $w(e_1, \dots, e_k) \in \Gamma$, то через $w_k(x)$ обозначим слово, полученное из $w(e_1, \dots, e_k)$ подстановкой

$$\begin{pmatrix} e_1 \dots e_k \\ x \dots x \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\begin{array}{lll} AP(x)=t_{k+17}(x), & BP(x)=t_{k+18}(x), & CP(x)=t_{k+19}(x),\\ DP(x)=t_{k+20}(x), & EP(x)=t_{k+21}(x), & GP(x)=t_{k+22}(x),\\ KP(x)=t_{k+23}(x), & LP(x)=t_{k+24}(x), & MP(x)=t_{k+25}(x),\\ AV(x)=t_{k+26}(x), & BV(x)=t_{k+27}(x), & CV(x)=t_{k+28}(x),\\ DV(x)=t_{k+29}(x), & QP_i(x)=t_{k+i+30}(x), & QV_i(x)=t_{k+i+m+31}(x), \end{array}$$

где $i\in\omega$, k — фиксированное натуральное число такое, что $k\geq 40$. Будем считать, если не оговорено противное, что

$$w_1\dots w_n=(\dots((w_1w_2)w_3)\dots)w_n,\quad w_1w_2^n=(\dots((w_1w_2)w_2)\dots)w_2$$

и что y^0 — пустой символ.

Произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2\to q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины M сопоставим кодирующее ее тождество в соответствии со следующей таблицей:

δ_1	δ_2	Тождество
1	1	$QP_i(x)CP(x)DP(x)=$ $QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1}(x)BP^{\varepsilon_2}(x)CP(x)DP(x)$
1	0	$QP_i(x)AP(x)DP(x)=$ $QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1+1}(x)BP^{\varepsilon_2}(x)DP(x)$
0	1	$QP_i(x)BP(x)CP(x)=$ $QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1}(x)BP^{\varepsilon_2+1}(x)CP(x)$
0	0	$QP_i(x)AP(x)BP(x)=$ $QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1+1}(x)BP^{\varepsilon_2+1}(x)$
1	1	$QV_i(x)CV(x)DV(x)=$ $QV_j(x)AV^{\varepsilon_1}(x)BV^{\varepsilon_2}(x)CV(x)DV(x)$
1	0	$QV_i(x)AV(x)DV(x)=$ $QV_j(x)AV^{\varepsilon_1+1}(x)BV^{\varepsilon_2}(x)DV(x)$
0	1	$QV_i(x)BV(x)CV(x)=$ $QV_j(x)AV^{\varepsilon_1}(x)BV^{\varepsilon_2+1}(x)CV(x)$
0	0	$QV_i(x)AV(x)BV(x)=$ $QV_j(x)AV^{\varepsilon_1+1}(x)BV^{\varepsilon_2+1}(x)$

Пусть

$$\begin{gathered} WP=\{AP(x),BP(x),CP(x),DP(x),EP(x),GP(x),KP(x),\\ LP(x),MP(x),QP_i(x)\mid 0\leq i\leq m\},\\ WV=\{AV(x),BV(x),CV(x),DV(x),QV_i(x)\mid 0\leq i\leq m\}. \end{gathered}$$

Обозначим через $\mathfrak{X}^1$ многообразие колец, заданное тождествами

$$QP_i(x)CP(x)DP(x)=QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1}(x)BP^{\varepsilon_2}(x)CP(x)DP(x),$$
$$QP_i(x)AP(x)DP(x)=QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1+1}(x)BP^{\varepsilon_2}(x)DP(x),$$
$$QP_i(x)BP(x)CP(x)=QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1}BP^{\varepsilon_2+1}(x)CP(x),$$
$$QP_i(x)AP(x)BP(x)=QP_j(x)EP(x)AP^{\varepsilon_1+1}(x)BP^{\varepsilon_2+1}(x),$$

через $\mathfrak{X}^2$ — многообразие колец, заданное тождествами

$$\begin{array}{ll} yAP(x)BP(x) = yBP(x)AP(x), & yCP(x)DP(x) = yDP(x)CP(x), \\ yAP(x)DP(x) = yDP(x)AP(x), & yBP(x)CP(x) = yCP(x)BP(x), \\ yAP(x)EP(x) = yEP(x)AP(x), & yBP(x)EP(x) = yEP(x)BP(x), \\ yCP(x)EP(x) = yEP(x)CP(x), & yDP(x)EP(x) = yEP(x)DP(x), \\ yEP(x)KP(x)z = yKP(x)(zEP(x)), & zEP^2(x)GP(x) = zEP(x), \\ LP(x)EP(x)GP(x) = LP(x), & yLP(x)MP(x) = 0, \end{array}$$

через $\mathfrak{X}^3$ — многообразие колец, заданное тождествами

$$\begin{aligned} &QV_i(x)CV(x)DV(x) = QV_j(x)AV^{\varepsilon_1}(x)BV^{\varepsilon_2}(x)CV(x)DV(x), \\ &QV_i(x)AV(x)DV(x) = QV_j(x)AV^{\varepsilon_1+1}(x)BV^{\varepsilon_2}(x)DV(x), \\ &QV_i(x)BV(x)CV(x) = QV_j(x)AV^{\varepsilon_1}(x)BV^{\varepsilon_2+1}(x), \\ &QV_i(x)AV(x)BV(x) = QV_j(x)AV^{\varepsilon_1+1}(x)BV^{\varepsilon_2+1}(x)CV(x), \end{aligned}$$

а через $\mathfrak{X}^4$ — многообразие колец, заданное тождествами

$$\begin{array}{ll} yAV(x)BV(x) = yBV(x)AV(x), & yCV(x)DV(x) = yDV(x)CV(x), \\ yAV(x)DV(x) = yDV(x)AV(x), & yBV(x)CV(x) = yCV(x)BV(x). \end{array}$$

Пусть $\mathfrak{R}_2$ — многообразие всех колец характеристики два и $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1 \cap \mathfrak{X}^2 \cap \mathfrak{X}^3 \cap \mathfrak{X}^4 \cap \mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных колец из многообразия $\mathfrak{X}$. Обозначим через $F\mathfrak{R}_2$, $F\mathfrak{X}$, $F\mathfrak{X}^i$ кольца счетного ранга, свободные в многообразиях $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^i$ соответственно, а через $\mathfrak{R}_2 \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}^i \cap \mathfrak{F}$ — классы всех конечных колец из многообразий $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^i$ соответственно. Пусть, кроме того, $F_1\mathfrak{X}$ — моногенное кольцо, свободное в многообразии $\mathfrak{X}$, $\{e, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ — множество свободных образующих кольца $F\mathfrak{R}_2$. Для удобства свободные образующие колец $F\mathfrak{X}$, $F\mathfrak{X}^i$, $F_1\mathfrak{X}$ будем обозначать теми же буквами.

Лемма 1. *Пусть $w_1(e)\ldots w_n(e)$ — слово из свободного группоида Γ, где $w_i(x) \in WP \cup WV$. Тогда слово $w_1(e)\ldots w_n(e)$ содержит подслово $t(y_1, \ldots, y_{k+l})$ для $y_i = e^{p_i}$ и $l > 16$, если и только если существует j такое, что $w_j(e) = t(y_1, \ldots, y_{k+l})$.*

Лемма 2. *Если машина M через конечное число d тактов работы переходит из конфигурации $q_i\xi_1\xi_2$ в конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняются тождества*

$$\begin{aligned} &QP_i(x)AP^{\xi_1}(x)BP^{\xi_2}(x)CP(x)DP(x) = QP_j(x)AP^{\eta_1}(x)BP^{\eta_2}(x)CP(x)DP(x)EP^d(x), \\ &QV_i(x)AV^{\xi_1}(x)BV^{\xi_2}(x)CV(x)DV(x) = QV_j(x)AV^{\eta_1}BV^{\eta_2}(x)CV(x)DV(x). \end{aligned}$$

Лемма 3. *Если $n \notin P$, то класс $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ удовлетворяет тождеству*

$$QP_1(x)AP^{2^n}(x)CP(x)DP(x)KP(x)(LP(x)EP(x))MP(x) = 0.$$

Лемма 4. *Если $n \in P$, то существует такое кольцо $\mathcal{K}$, что $\mathcal{K} \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ и*

$$\mathcal{K} \nvDash QP_1(x)AP^{2^n}(x)CP(x)DP(x)KP(x)(LP(x)EP(x))MP(x) = 0.$$

Лемма 5. *Пусть в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество*

$$QV_i(x)AV^{\xi_1}(x)BV^{\xi_2}(x)CV(x)DV(x) = QV_j(x)AV^{\eta_1}(x)BV^{\eta_2}(x)CV(x)DV(x).$$

Тогда существует конечное вычисление на M, переводящее конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ в конфигурацию $q_i\xi_1\xi_2$ или наоборот.

Лемма 1 доказывается аналогично лемме 1 из [13]. В справедливости леммы 2 можно убедиться непосредственной проверкой. Леммы 3 и 4 можно доказать по схеме доказательства теоремы из [19], используя леммы 1 и 2. Доказательство леммы 5 можно провести по аналогии с доказательством леммы 1 из [12] и леммы 3 из [13], основываясь на лемму 1.

Схема доказательства. Согласно лемме 4, если $n \in P$, то существует такое кольцо $\mathcal{K}$, что $\mathcal{K} \in \mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ и

$$\mathcal{K} \not\models QP_1(x)AP^{2^n}(x)CP(x)DP(x)KP(x)(LP(x)EP(x))MP(x) = 0.$$

Следовательно, если $n \in P$, то

$$\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F} \not\models QP_1(x)AP^{2^n}(x)CP(x)DP(x)KP(x)(LP(x)EP(x))MP(x) = 0.$$

Отсюда в силу леммы 3 вытекает, что класс $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ удовлетворяет тождеству

$$QP_1(x)AP^{2^n}(x)CP(x)DP(x)KP(x)(LP(x)EP(x))MP(x) = 0$$

тогда и только тогда, когда $n \notin P$. Следовательно, эквациональная теория класса $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{F}$ неразрешима.

Из лемм 2 и 5 следует, что в многообразии $\mathfrak{X}$ тождество

$$QV_i(x)AV^{\xi_1}(x)BV^{\xi_2}(x)CV(x)DV(x) = QV_j(x)AV^{\eta_1}(x)BV^{\eta_2}(x)CV(x)DV(x)$$

выполняется тогда и только тогда, когда существует конечное вычисление на M, переводящее конфигурацию $q_j\eta_1\eta_2$ в конфигурацию $q_i\xi_1\xi_2$ или наоборот. Отсюда по определению машины Минского вытекает, что тождество

$$QV_1(x)AV^{2^n}(x)CV(x)DV(x) = QV_0(x)AV(x)CV(x)DV(x)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $n \in P$. Поэтому эквациональная теория многообразия $\mathfrak{X}$ неразрешима.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность профессору Ю.М. Важенину, под руководством которого написана эта работа, и профессору Л.Н. Шеврину за ценные замечания и помощь при подготовке статьи.

Литература

1. Chin L.H., Tarski A. *Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras.* — University of California, 1951.
2. Tarski A. *Some metalogical results concerning the calculus of relations* // J. Symbolic Logic. – 1953. – № 18. – P. 188–189.
3. Tarski A., Givant S. *A formalization of set theory without variables.* – AMS: Providence, Rhode Island, 1987.
4. Мальцев А.И. *Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп* // Матем. сб. – 1966. – Т. 69. – № 1. – С. 3–12.
5. *Коуровская тетрадь.* – 10-е изд. – Новосибирск, 1986.
6. Клейман Ю.Г. *О тождествах в группах* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1982. – Т. 44. – С. 62–108.
7. Мурский В.Л. *Несколько примеров многообразий полугрупп* // Матем. заметки. – 1968. – Т. 3. – № 6. – С. 663–670.
8. Kharlampovich O.G., Sapir M.V. *Algorithmic problems in varieties* // Internat. J. Algebra Comput. – 1995. – V. 5. – № 4–5. – P. 379–602.
9. Попов В.Ю. *Об эквациональных теориях многообразий полугрупп* // Изв. Уральск. ун-та. Матем. и механ. – 2000. – № 18. – Вып. 3. – С. 162–175.
10. Попов В.Ю. *Об эквациональных теориях классов конечных полугрупп* // Алгебра и логика. – 2001. – Т. 40. – № 1. – С. 97–116.

11. Belov A.J. *Solution of one Maltzev problem* // II международн. конф. “Полугруппы: теория и приложения” в честь профессора Е.С. Ляпина: Тез. докл. – Санкт-Петербург, 2–9 июля 1999. – С. 9.
12. Попов В.Ю. *Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец* // Алгебра и логика. – 1995. – Т. 34. – № 3. – С. 347–361.
13. Попов В.Ю. *О разрешимости эквациональных теорий многообразий колец* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – № 6. – С. 873–881.
14. Попов В.Ю. *Об эквациональных теориях многообразий антикоммутативных колец* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65. – № 2. – С. 230–245.
15. Попов В.Ю. *О некоторых алгоритмических проблемах, связанных с многообразиями неассоциативных колец* // Матем. тр. – 2000. – Т. 3. – № 2. – С. 146–170.
16. Попов В.Ю. *Об эквациональных теориях многообразий колец конечной характеристики* // Фундам. и прикл. матем. – 2000. – Т. 6. – № 4. – С. 1193–1203.
17. Попов В.Ю. *Неразрешимость проблемы равенства в относительно свободных кольцах* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – № 4. – С. 582–594.
18. Albert D., Baldinger R., Rhodes J. *Undecidability of the identity problem for finite semigroups* // J. Symbolic Logic. – 1992. – V. 57. – № 1. – P. 179–192.
19. Попов В.Ю. *Об эквациональных теориях классов конечных колец* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 666–675.
20. Гуревич Ю.Ш. *Проблема равенства слов для некоторых классов полугрупп* // Алгебра и логика. – 1966. – Т. 5. – № 5. – С. 25–35.
21. Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции.* – М.: Наука, 1965.
22. Minsky M.L. *Recursive unsolvability of Post's problem of “TAG” and topics in theory of Turing machines* // Ann. Math. – 1961. – V. 74. – P. 437–455.

Уральский государственный технический университет

Поступила
03.05.2001