ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 4 (455)

УДК 517.929

Н.В. АЗБЕЛЕВ, П.М. СИМОНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ. II

В предыдущих работах [1], [2] на основе идей теории "абстрактного функционально-дифференциального уравнения" [3]–[5] была предложена новая концепция устойчивости для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их обобщений. Ниже упомянутая концепция и результаты работ [6]–[9] развиваются для уравнений квазилинейных.

Обозначим через $\mathbf{C}$ банахово пространство непрерывных и ограниченных функций $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{t\ge 0}|x(t)|$, где $|\cdot|$ — норма в $\mathbf{R}^n$. Пусть, далее, пространство $\mathbf{C}_0$ и *весовое* пространство $\mathbf{C}_\gamma$ при $\gamma > 0$ определяются равенствами

$$\mathbf{C}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{C} : \lim_{t\to\infty}|x(t)| = 0,\ \|x\|_{\mathbf{C}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_{\mathbf{C}}\}, \quad \mathbf{C}_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{C} : \|x\|_{\mathbf{C}_\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t\ge 0} e^{\gamma t}|x(t)| < \infty\}.$$

Пространства $\mathbf{C}_0$ и $\mathbf{C}_\gamma$ банаховы.

Задача Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(0) = \alpha, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

эквивалентна уравнению

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\,ds + \alpha. \tag{2}$$

Поэтому приведенные в ([10], с. 9) определения устойчивости уравнения $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ в случае $f(t,0) \equiv 0$ можно переформулировать следующим образом: тривиальное решение задачи (1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально), если уравнение (2) имеет в пространстве $\mathbf{C}$ (в $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_\gamma$ соответственно) единственное решение при каждом $\alpha \in \mathbf{R}^n$ и это решение непрерывно зависит от α в метрике этого пространства. Другими словами, данный тип устойчивости — это корректная разрешимость уравнения (2) в данном пространстве. В [10] рассмотрена также "устойчивость относительно постоянно действующих возмущений η" — непрерывная зависимость решения задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \eta(t),\ x(0) = \alpha, \quad t \ge 0,$$

от возмущений η.

Рассмотрим теперь общее функционально-дифференциальное уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ в предположении, что $\mathcal{L} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ — линейный, а $\mathcal{F} : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ — нелинейный вольтерровы операторы [3], [4]. Здесь $\mathbf{L}$ — линейное пространство классов эквивалентных локально суммируемых функций $z : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$, $\mathbf{D}$ — линейное пространство всех абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$. Пусть, далее, задано банахово пространство $\mathbf{B}$ с нормой $\|\cdot\|_{\mathbf{B}}$, элементы которого принадлежат пространству $\mathbf{L}$, а решение $x \in \mathbf{D}$ задачи Коши

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-15-96195, 99-01-01278), International Soros Science Education Program (EP-55, d99-1245) и Конкурсного центра по исследованиям в области фундаментального естествознания, Санкт-Петербург.

$\mathcal{L}_0 x = z$, $x(0) = \alpha$ для “модельного” уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ с линейным вольтерровым оператором $\mathcal{L}_0 : \mathbf{D} \to \mathbf{L}$ при любом $z \in \mathbf{L}$ имеет представление в виде формулы Коши $x = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha$ [3], [4]. Здесь вольтерров оператор $\mathcal{W} : \mathbf{L} \to \mathbf{D}$ — оператор Коши модельного уравнения, а $\mathcal{U} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{D}$ — оператор, порожденный фундаментальной матрицей U решений однородного уравнения $\mathcal{L}_0 x = 0$: $(\mathcal{U}\alpha)(t) \stackrel{\text{def}}{=} U(t)\alpha$. Банахово пространство $\mathbf{D}_0$ определим равенствами

$$\mathbf{D}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}\mathbf{B} \oplus \mathcal{U}\mathbf{R}^n, \quad \|x\|_{\mathbf{D}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathcal{L}_0 x\|_{\mathbf{B}} + |x(0)|.$$

Развивая идею понятия устойчивости как корректной разрешимости задачи Коши в данном пространстве, введем

Определение 1. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ $\mathbf{D}_0$-*устойчиво* (обладает $\mathbf{D}_0$-*свойством*), если задача Коши

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta, \quad x(0) = \alpha \tag{3}$$

имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$ при каждой паре $\{\eta, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ и это решение непрерывно по норме пространства $\mathbf{D}_0$ зависит от η и α (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, что $\|x_1 - x\|_{\mathbf{D}_0} < \varepsilon$, если $\|\eta_1 - \eta\|_{\mathbf{B}} < \delta$, $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$, где x_1 — решение задачи (3) при $\eta = \eta_1$, $\alpha = \alpha_1$).

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

а) *уравнение* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ $\mathbf{D}_0$-*устойчиво;*

б) *уравнение*

$$x = \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + \mathcal{W}\mathcal{F}x + g \tag{4}$$

имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$ *при каждом* $g \in \mathbf{D}_0$ *и это решение непрерывно зависит от* g *по норме пространства* $\mathbf{D}_0$;

в) *уравнение*

$$z = (\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})\mathcal{W}z + \mathcal{F}(\mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha) + \vartheta \tag{5}$$

имеет единственное решение $z \in \mathbf{B}$ *при каждой паре* $\{\vartheta, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ *и это решение непрерывно зависит от* ϑ *и* α *по норме пространства* $\mathbf{B}$.

Доказательство. Решение $x \in \mathbf{D}_0$ задачи (3) удовлетворяет равенству $\mathcal{L}_0 x + \mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta + \mathcal{L}_0 x$ и, следовательно, равенству $x = \mathcal{W}(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})x + \mathcal{W}\mathcal{F}x + \mathcal{W}\eta + \mathcal{U}\alpha$. Таким образом, импликация а) $\Longrightarrow$ б) следует из того, что при любом $g \in \mathbf{D}_0$ решение задачи (3), где $\eta = \mathcal{L}_0 g$, $\alpha = g(0)$, является решением уравнения (4). Импликация б) $\Longrightarrow$ а) следует из того, что при любых $\eta \in \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ решение уравнения (4), где $g = \mathcal{W}\eta + \mathcal{U}\alpha$, является решением задачи (3).

Импликация а) $\Longrightarrow$ в) есть следствие того, что при любых $\vartheta \in \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ решение $z \in \mathbf{B}$ уравнения (5) определяется равенством $z = \mathcal{L}_0 x$, где $x \in \mathbf{D}_0$ — решение задачи (3) при $\eta = \vartheta + \mathcal{L}\mathcal{U}\alpha$. Импликация в) $\Longrightarrow$ а) есть следствие того, что при любых $\eta \in \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ решение $x \in \mathbf{D}_0$ задачи (3) определяется равенством $x = \mathcal{W}z + \mathcal{U}\alpha$, где $z \in \mathbf{B}$ — решение уравнения (5) при $\vartheta = \eta - \mathcal{L}\mathcal{U}\alpha$. $\square$

Замечание 1. В предположении действия операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{F}$ из пространства $\mathbf{D}_0$ в пространство $\mathbf{B}$ можно утверждать, что $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ гарантирует совпадение множества всех решений уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta$ при всех $\eta \in \mathbf{B}$, которое обозначим через $\mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B})$, с множеством $\mathbf{D}_0$. Действительно, если $x \in \mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B})$, то $x \in \mathbf{D}_0$ в силу $\mathbf{D}_0$-устойчивости. Если же $x \in \mathbf{D}_0$, то $x \in \mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B})$, т. к. элемент x является решением задачи (3) при $\eta = \mathcal{L}x - \mathcal{F}x$, $\alpha = x(0)$.

Решения скалярной задачи $\dot{x}(t)+x(t) = x^2(t)$, $x(0) = \alpha$ имеют вид $x(t) = \alpha/(\alpha-(\alpha-1)e^t)$. При $\alpha < 1$ решения этой задачи асимптотически устойчивы, но при $\alpha > 1$ задача вообще не имеет решений, определенных на полуоси $[0,\infty)$. Поэтому естественно ввести следующее определение "локальной" устойчивости. Пусть x_k — решение задачи (3) при $\eta = \eta_k$, $\alpha = \alpha_k$, $k \in \mathbf{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1,2,\dots\}$.

Определение 2. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ $\mathbf{D}_0$-*устойчиво* (*локально*) *в окрестности решения* x_0 при $x_0(0) = \alpha_0$, если существует $\delta_0 = \delta_0(x_0) > 0$, для которого при каждой паре $\{\eta,\alpha\} \in \mathbf{B}\times\mathbf{R}^n$, $\|\eta-\eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha-\alpha_0| \le \delta_0$, задача (3) имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$, и это решение непрерывно по норме пространства $\mathbf{D}_0$ зависит от η и α (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$, что $\|x_1 - x\|_{\mathbf{D}_0} < \varepsilon$, если $\|\eta_1 - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha_1 - \alpha_0| \le \delta_0$ и $\|\eta_1 - \eta\|_{\mathbf{B}} < \delta$, $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$).

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое банахово пространство, $\Omega \subseteq \mathbf{V}$ — область в пространстве $\mathbf{V}$. Следуя установившейся в Анализе терминологии, будем говорить, что уравнение $y = \mathcal{G}y + g$ *корректно разрешимо в пространстве* $\mathbf{V}$ (*корректно разрешимо в области* Ω), если оно имеет единственное решение $y \in \mathbf{V}$ при каждом $g \in \mathbf{V}$ ($g \in \Omega$) и это решение непрерывно зависит от g по норме пространства $\mathbf{V}$.

Отметим, что если оператор $\mathcal{G}$ действует в пространстве $\mathbf{V}$ и уравнение $y = \mathcal{G}y+g$ однозначно разрешимо в этом пространстве при любом $g \in \mathbf{V}$, то множество всех решений этого уравнения при всех $g \in \mathbf{V}$ совпадает с пространством $\mathbf{V}$.

Лемма 1. *Пусть уравнение* $\mathcal{L}x = f$ *с линейным оператором* $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathbf{D}_0$*–устойчиво. Тогда*

а) $\mathbf{D}_0$-*устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x+\eta$ *эквивалентна корректной разрешимости уравнения* $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ *в пространстве* $\mathbf{D}_0$;

б) $\mathbf{D}_0$-*устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ *в окрестности решения* x_0 *при* $\eta_0 = \mathcal{L}g_0$, $x_0(0) = \alpha_0 \equiv g_0(0)$ *эквивалентна корректной разрешимости в пространстве* $\mathbf{D}_0$ *уравнения* $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ *для всех* g *из некоторой окрестности элемента* $g_0 = \mathcal{C}\eta_0 + \mathcal{X}\alpha_0$.

Доказательство. $\mathbf{D}_0$-устойчивость линейного уравнения $\mathcal{L}x = f$ эквивалентна тому, что его оператор Коши $\mathcal{C}$ действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{D}_0$ и ограничен, а столбцы фундаментальной матрицы X принадлежат пространству $\mathbf{D}_0$. Поэтому оператор $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ ограничен в силу теоремы Банаха об обратном операторе ([11], гл. 3, 3.5.3, с. 89).

Утверждение а) леммы следует из теоремы 1, если положить $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$.

Докажем утверждение б). Пусть уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво в некоторой окрестности решения x_0 при $x_0(0) = \alpha_0$. Это означает существование $\delta_0 = \delta_0(x_0) > 0$, для которого при каждой паре $\{\eta,\alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha - \alpha_0| \le \delta_0$, задача (3) имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$ и это решение непрерывно по норме $\mathbf{D}_0$ зависит от $\{\eta,\alpha\}$. Пусть $g, g_0 \in \mathbf{D}_0$, $g = \mathcal{C}\eta + \mathcal{X}\alpha$, $g_0 = \mathcal{C}\eta_0 + \mathcal{X}\alpha_0$, $\|g - g_0\|_{\mathbf{D}_0} \equiv \|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} + |\alpha - \alpha_0| < \delta_0$. Тогда $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha - \alpha_0| \le \delta_0$ и при $\eta = \mathcal{L}g$, $\alpha = g(0)$ задача (3) имеет единственное решение $x \in \mathbf{D}_0$, непрерывно зависящее в метрике $\mathbf{D}_0$ от $\{\eta,\alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$. Для решения $x \in \mathbf{D}_0$ в силу уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta$ имеем $\mathcal{F}x \in \mathbf{B}$. Поэтому x удовлетворяет уравнению $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ и в метрике $\mathbf{D}_0$ непрерывно зависит от $g \in \mathbf{D}_0$, $\|g - g_0\|_{\mathbf{D}_0} \le \delta_0$.

Пусть уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{D}_0$ для $g \in \mathbf{D}_0$, $\|g - g_0\|_{\mathbf{D}_0} \le \delta_0 = \delta_0(g_0) > 0$. Положим $\eta_0 = \mathcal{L}g_0$, $\alpha = g_0(0)$ и возьмем $\{\eta,\alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} < \delta/2$, $|\alpha - \alpha_0| < \delta/2$. Тогда $\|g - g_0\|_{\mathbf{D}_0} \equiv \|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} + |\alpha - \alpha_0| \le \delta_0$, где $\eta = \mathcal{L}g$, $\alpha = g(0)$, и при таких $g \in \mathbf{D}_0$ уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{D}_0$. Для решения $x \in \mathbf{D}_0$ в силу уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ имеем $\mathcal{C}\mathcal{F}x \in \mathbf{D}_0$, откуда $\mathcal{F}x \in \mathbf{B}$. Поэтому x является решением задачи Коши (3) и в метрике $\mathbf{D}_0$ непрерывно зависит от $\{\eta,\alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$. □

При исследовании локальной устойчивости удобно пользоваться подстановкой $y = x - x_0$, сводящей задачу (3) при $\eta = \eta_0$, $\alpha = \alpha_0$ и $x = x_0$ к "канонической форме" $\mathcal{L}y = \mathcal{F}_0 y + \eta_0$, $y(0) = 0$, где $\mathcal{F}_0 y \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(y+x_0) - \mathcal{L}x_0$, и рассматривать вопрос об устойчивости в окрестности тривиального решения $y = 0$ этой задачи.

Тот факт, что явный вид оператора $\mathcal{F}_0$ неизвестен, поскольку неизвестно решение x_0, не мешает применять здесь стандартные методы: оператор $\mathcal{F}_0$ наследует от оператора $\mathcal{F}$ требуемые свойства. Например, константы Липшица операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0$ одинаковы.

Некоторые задачи о локальной устойчивости удается решить на основе следующего распространения теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, аналогичное теореме 1 из [7] и теоремам 3 из [8], [9].

Теорема 2. *Пусть уравнение $\mathcal{L}x = f$ с линейным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathbf{D}_0$–устойчиво, оператор $\mathcal{F} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ обладает свойством: $\mathcal{F}(0) = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\|\mathcal{F}x_2 - \mathcal{F}x_1\|_{\mathbf{B}} \leq k\|x_2 - x_1\|_{\mathbf{D}_0} \tag{6}$$

при всех $\|x_1\|_{\mathbf{D}_0} \leq \delta$, $\|x_2\|_{\mathbf{D}_0} \leq \delta$. Тогда уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво в окрестности тривиального решения.

Доказательство. В силу леммы 1 локальная $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ в окрестности тривиального решения эквивалентна корректной разрешимости в пространстве $\mathbf{D}_0$ уравнения

$$x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g \tag{7}$$

для g из некоторой окрестности нуля. Здесь $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}_0$ — оператор Коши уравнения $\mathcal{L}x = f$, $g = \mathcal{C}\eta + \mathcal{X}\alpha$. Обозначим $\sigma \overset{\text{def}}{=} \|\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{D}_0}$. В силу условия на оператор $\mathcal{F}$ для некоторого положительного $k < 1/\sigma$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $x_i \in \mathbf{D}_0$, $\|x_i\|_{\mathbf{D}_0} < \delta$, $i = 1, 2$, имеет место неравенство (6).

При $\|g\|_{\mathbf{D}_0} \leq \delta_0 \overset{\text{def}}{=} \delta(1 - \sigma k)$ для уравнения (7) в шаре $\{\|x\|_{\mathbf{D}_0} \leq \delta_0\}$ выполнены условия локального принципа Банаха о сжимающих отображениях ([11], гл. 4, след. 4.3.5, с. 130). Следовательно, уравнение (4) (которое в данном случае совпадает с уравнением (7)) корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{D}_0$ при $\|g\| \leq \delta_0$. Отсюда следует $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ в окрестности тривиального решения. □

Замечание 2. Условие теоремы относительно оператора $\mathcal{F}$ выполнено, если в некоторой окрестности точки $x = 0$ оператор $\mathcal{F} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ имеет непрерывную производную Фреше $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}'(0) = 0$.

Пример 1. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) + p_0(t)x[h_0(t)] = p(t)\dot{x}^2[h(t)] + q(t)\dot{x}[h(t)]x[h(t)] + r(t)x^2[h(t)] + f(t), \quad t \geq 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), \quad \text{если} \quad \xi < 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь функции $p_0, p, q, r, f : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ измеримы и ограничены в существенном на $[0, \infty)$; функции $h_0, h : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ измеримы, причем существуют такие $\delta > 0$, $b > 0$, что $t - \delta \leq h_0(t) \leq t$, $t - \delta \leq h(t) \leq t$ при всех $t \in [b, \infty)$; $\operatorname*{vrai\,inf}_{t\geq b} p_0(t) > 0$, $\operatorname*{vrai\,sup}_{t\geq b} p_0(t) < 3/(2\delta)$; начальные функции $\varphi, \psi : [-\delta, 0] \to \mathbf{R}$ измеримы и ограничены в существенном на $[-\delta, 0]$.

Следуя [3]–[5], введем для функций $y, u : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ и $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ обозначения

$$y_u(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y[u(t)], & \text{если } u(t) \geq 0; \\ 0, & \text{если } u(t) < 0, \end{cases} \qquad \phi^u(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } u(t) \geq 0; \\ \phi[u(t)], & \text{если } u(t) < 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение (8) принимает вид $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta$, где

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}x)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}(t) + p_0(t)x_{h_0}(t),\\
(\mathcal{F}x)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} p(t)\dot{x}_h^2(t) + q(t)\dot{x}_h(t)x_h(t) + r(t)x_h^2(t),\\
\eta(t) &\stackrel{\text{def}}{=} p(t)\big(\psi^h(t)\big)^2 + q(t)\psi^h(t)\varphi^h(t) + r(t)\big(\varphi^h(t)\big)^2 - p_0(t)\varphi^{h_0}(t) + f(t),
\end{aligned}
$$

т. к. $x[h_0(t)] = x_{h_0}(t)+\varphi^{h_0}(t)$, $\dot{x}[h(t)] = \dot{x}_h(t)+\psi^h(t)$, $x[h(t)] = x_h(t)+\varphi^h(t)$, $\dot{x}^2[h(t)] = \dot{x}_h^2(t)+\big(\psi^h(t)\big)^2$, $\dot{x}[h(t)]x[h(t)] = \dot{x}_h(t)x_h(t) + \psi^h(t)\varphi^h(t)$, $x^2[h(t)] = x_h^2(t) + \big(\varphi^h(t)\big)^2$.

В силу результатов работ [12], [13] для функции Коши $C(t,s)$ уравнения $\mathcal{L}x = f$ для некоторых $N, \beta > 0$ справедлива при $0 \le s \le t$ оценка

$$|C(t,s)| \le Ne^{-\beta(t-s)}.$$

Пусть $\mathcal{L}_0 x \equiv \dot{x} + \beta x = z$ и $\mathbf{B} = \mathbf{L}_\gamma^\infty$, $0 < \gamma < \beta$. Тогда банаховы пространства $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}(\mathcal{L}, \mathbf{L}_\gamma^\infty)$ и $\mathbf{W}_\gamma$ совпадают, т. е. совпадают как линейные пространства, и нормы этих пространств эквивалентны, причем $\mathbf{W}_\gamma \subset \mathbf{C}_\gamma$ и это вложение непрерывно.

Здесь через $\mathbf{L}_\gamma^\infty$, $\gamma \in \mathbf{R}$, обозначим банахово пространство всех таких функций $z : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$, для которых справедливо представление $z(t) = y(t)e^{-\gamma t}$, где $y \in \mathbf{L}^\infty$, с нормой $\|z\|_{\mathbf{L}_\gamma^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \|y\|_{\mathbf{L}^\infty}$, $\mathbf{L}_\infty$ — банахово пространство измеримых и ограниченных в существенном на $[0,\infty)$ функций $y : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$ с нормой $\|y\|_{\mathbf{L}^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge0} |y(t)|$. Аналогично $\mathbf{W}_\gamma$, $\gamma \in \mathbf{R}$, — банахово пространство всех таких функций $x \in \mathbf{D}$, для каждой из которых справедливы включения $x \in \mathbf{C}_\gamma$, $\dot{x} \in \mathbf{L}_\gamma^\infty$, где $\|x\|_{\mathbf{W}_\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_{\mathbf{C}_\gamma} + \|\dot{x}\|_{\mathbf{L}_\gamma^\infty}$.

В каждой точке $x_0 \in \mathbf{D}_0$ для любого $x \in \mathbf{D}_0$ справедливы равенства

$$(\mathcal{F}'(x_0)x)(t) = 2p(t)(\dot{x}_0)_h(t)\dot{x}_h(t) + q(t)[(\dot{x}_0)_h(t)x_h(t) + (x_0)_h(t)\dot{x}_h(t)] + 2r(t)(x_0)_h(t)x_h(t).$$

Очевидно, $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}'(0) = 0$.

Таким образом, в силу теоремы 3 уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ локально $\mathbf{D}_0$-устойчиво в окрестности тривиального решения. Из непрерывности вложения $\mathbf{D}_0 \subset \mathbf{C}_\gamma$ следует экспоненциальная устойчивость по Ляпунову и, следовательно, экспоненциальная устойчивость такого решения по начальным функциям φ и ψ, т. е. при некотором $M > 0$ и достаточно малых $|\alpha|$ и $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty[-\delta,0]} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[-\delta,0]} |\varphi(t)|$, $\|\psi\|_{\mathbf{L}^\infty[-\delta,0]} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[-\delta,0]} |\psi(t)|$ справедливо неравенство

$$|x(t)| \le Me^{-\gamma t}\big((\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty[-\delta,0]} + \|\psi\|_{\mathbf{L}^\infty[-\delta,0]})^2 + |\alpha|\big), \quad t \ge 0.$$

Если ограничиться случаем, когда оператор $\mathcal{F} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ допускает непрерывное расширение $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ на пространство $\mathbf{C}$ непрерывных функций, то чебышевская норма и удобная естественная упорядоченность ($x_1 \le x_2$, если $x_1(t) \le x_2(t)$ при всех $t \in [0,\infty)$) позволяет получать требуемые оценки простыми приемами.

Зафиксируем банахово пространство функций $\mathbf{B} \subset \mathbf{L}$, модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x = z$ и некоторое банахово пространство $\mathbf{V}$ функций $y : [0,\infty) \to \mathbf{R}^n$. Пусть, далее, x_k — решение задачи (3) при $\eta = \eta_k$, $\alpha = \alpha_k$, $k \in \mathbf{Z}_+$.

Определение 3. Уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ называется $\mathbf{V}$-*устойчивым* (обладает $\mathbf{V}$-*свойством*), если для каждой пары $\{\eta, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ задача (3) имеет единственное решение $x \in \mathbf{V}$ и это решение непрерывно зависит от η и α (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(x,\varepsilon) > 0$, что $\|x_1 - x\|_{\mathbf{V}} < \varepsilon$, если $\|\eta_1 - \eta\|_{\mathbf{B}} < \delta$, $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$).

Определение 4. Будем говорить, что уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ $\mathbf{V}$-*устойчиво* (*локально*) *в окрестности решения* x_0 при $x_0(0) = \alpha_0$, если существует $\delta_0 = \delta(x_0) > 0$, для которого при каждой паре $\{\eta, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha - \alpha_0| \le \delta_0$, задача (3) имеет единственное решение $x \in \mathbf{V}$ и это решение непрерывно зависит от η и α (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, что $\|x_1 - x\|_{\mathbf{V}} < \varepsilon$, если $\|\eta_1 - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha_1 - \alpha_0| \le \delta_0$ и $\|\eta_1 - \eta\|_{\mathbf{B}} < \delta$, $|\alpha_1 - \alpha| < \delta$).

Замечание 3. Таким образом, например, $\mathbf{C}$-устойчивость ($\mathbf{C}_0$-устойчивость, $\mathbf{C}_\gamma$-устойчивость), как и локальная $\mathbf{C}$-устойчивость ($\mathbf{C}_0$-устойчивость, $\mathbf{C}_\gamma$-устойчивость), гарантируют устойчивость по Ляпунову либо в целом, либо локально соответственно.

Лемма 2. *Пусть пространства* $\mathbf{D}_0$ *и* $\mathbf{V}$ *таковы, что имеет место непрерывное вложение* $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{V}$, *оператор* $\mathcal{F}$ *непрерывно действует из пространства* $\mathbf{V}$ *в пространство* $\mathbf{B}$, *а уравнение* $\mathcal{L}x = f$ *с линейным оператором* $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathbf{D}_0$*-устойчиво. Тогда*

а) $\mathbf{V}$*-устойчивость и* $\mathbf{D}_0$*-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ *— понятия эквивалентные*;

б) $\mathbf{V}$*-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ *в окрестности решения* x_0 *и* $\mathbf{D}_0$*-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ *в окрестности решения* x_0 *— понятия эквивалентные.*

Доказательство. Из доказательства леммы 1 следует, что операторы $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$, $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}_0$, $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{D}_0$ ограничены. Далее, из непрерывности вложения $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{V}$ следует ограниченность оператора Коши $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$ и оператора $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{V}$.

а) Пусть уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво. Тогда ввиду вложения $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{V}$ при любых $\eta = \eta_0 \in \mathbf{B}$ и $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{R}^n$ решение $x_0 \in \mathbf{D}_0$ задачи (3) принадлежит пространству $\mathbf{V}$, причем другого решения $x \in \mathbf{V}$ задача (3) при $\eta = \eta_0$, $\alpha = \alpha_0$ иметь не может. При условии $\lim\limits_{k\to\infty} \|\eta_k - \eta_0\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k - \alpha_0| = 0$ из $\mathbf{D}_0$-устойчивости уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ и непрерывности вложения $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{V}$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{\mathbf{V}} \le d \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{\mathbf{D}_0} = 0$, где d — константа вложения $\mathbf{D}_0$ в $\mathbf{V}$.

Пусть уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ $\mathbf{V}$-устойчиво. Тогда при любых $\eta = \eta_0 \in \mathbf{B}$, $\alpha = \alpha_0 \in \mathbf{R}^n$ решение $x_0 \in \mathbf{V}$ задачи (3) принадлежит пространству $\mathbf{D}_0$, т. к. $x_0 = \mathcal{C}f_0 + \mathcal{X}\alpha_0$, где $f_0 = \mathcal{F}x_0 + \eta_0 \in \mathbf{B}$. При условии $\lim\limits_{k\to\infty} \|\eta_k - \eta_0\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k - \alpha_0| = 0$ из непрерывности операторов $\mathcal{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ и $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}_0$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{\mathbf{D}_0} \le \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{R}^n \to \mathbf{D}_0} \lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k - \alpha_0| + \|\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{D}_0} \lim\limits_{k\to\infty} (\|\mathcal{F}x_k - \mathcal{F}x_0\|_{\mathbf{B}} + \|\eta_k - \eta_0\|_{\mathbf{B}}) = 0$.

Доказательство утверждения б) производится аналогично, если рассматривать только такие пары $\{\eta, \alpha\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, которые удовлетворяют неравенствам $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \le \delta_0$, $|\alpha - \alpha_0| \le \delta_0$. $\square$

Замечание 4. В условиях леммы 2 $\mathbf{V}$-устойчивость ($\mathbf{D}_0$-устойчивость) уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta$ гарантирует, что множество $\mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B})$ всех решений x этого уравнения при всех $\eta \in \mathbf{B}$ совпадает с множеством $\mathbf{D}_0$. Действительно, при доказательстве п. а) показано, что $\mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B}) \subseteq \mathbf{D}_0$. Вложение $\mathbf{D}(\mathcal{L} - \mathcal{F}, \mathbf{B}) \supseteq \mathbf{D}_0$ очевидно.

Лемма 3. *В условиях леммы* 2

а) *корректная разрешимость уравнения* $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ *в пространстве* $\mathbf{V}$ *гарантирует* $\mathbf{D}_0$*-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$;

б) *корректная разрешимость уравнения* $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ *в пространстве* $\mathbf{V}$ *при* $\|g - g_0\|_{\mathbf{V}} \le \delta_0$, *где* $g_0 \in \mathbf{D}_0$, $\delta_0 > 0$, *гарантирует* $\mathbf{D}_0$*-устойчивость уравнения* $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ *в некоторой окрестности решения* x_0 *при* $x_0(0) = \alpha_0 = g_0(0)$, $\eta_0 = \mathcal{L}g_0$.

Доказательство. а) Пусть уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$. Тогда при любом $g \in \mathbf{D}_0$ решение x этого уравнения принадлежит пространству $\mathbf{D}_0$, т. к. $x \in \mathbf{V}$, $\mathcal{F}x \in \mathbf{B}$ и $\mathcal{C}\mathcal{F}x \in \mathbf{D}_0$.

Возьмем элементы $\eta_0 \in \mathbf{B}$ и $\alpha_0 \in \mathbf{R}^n$, тогда элемент $g_0 = \mathcal{C}\eta_0 + \mathcal{X}\alpha_0 \in \mathbf{D}_0$. Решение x_0 уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g_0$ принадлежит пространству $\mathbf{D}_0$, поэтому x_0 является решением задачи $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$, $x(0) = \alpha_0$.

Пусть $\{\eta_k, \alpha_k\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \|\eta_k - \eta_0\|_{\mathbf{B}} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} |\alpha_k - \alpha_0| = 0$, $g_k = \mathcal{C}\eta_k + \mathcal{X}\alpha_k$, $k \in \mathbf{Z}_+$, тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|g_k - g_0\|_{\mathbf{D}_0} = 0$ ввиду $\mathbf{D}_0$-устойчивости линейного уравнения $\mathcal{L}x = f$.

Из непрерывности вложения $\mathbf{D}_0 \subseteq \mathbf{V}$ и корректной разрешимости уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ в пространстве $\mathbf{V}$ получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \|g_k - g_0\|_{\mathbf{V}} = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{\mathbf{V}} = 0$. Далее из непрерывности операторов $\mathcal{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ и $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{D}_0$ имеем $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{\mathbf{D}_0} \leq \|\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{D}_0} \lim\limits_{k\to\infty} \|\mathcal{F}x_k - \mathcal{F}x_0\|_{\mathbf{B}} + \lim\limits_{k\to\infty} \|g_k - g_0\|_{\mathbf{D}_0} = 0$.

б) Пусть уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$ при $g \in \mathbf{V}$, $\|g - g_0\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$, где $g_0 \in \mathbf{D}_0$, $\delta_0 > 0$. Как показано в п. а), при всех таких $g \in \mathbf{D}_0$ решение x уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ принадлежит пространству $\mathbf{D}_0$. Возьмем элементы $\eta \in \mathbf{B}$, $\alpha \in \mathbf{R}^n$ так, чтобы выполнялись неравенства $\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \leq \delta_0/(2d)$, $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta_0/(2d)$, где d — константа вложения $\mathbf{D}_0$ в $\mathbf{V}$. Тогда для элементов $g = \mathcal{C}\eta + \mathcal{X}\alpha$ имеем $\|g - g_0\|_{\mathbf{V}} \leq d\|g - g_0\|_{\mathbf{D}_0} = d(\|\eta - \eta_0\|_{\mathbf{B}} + |\alpha - \alpha_0|) \leq \delta_0$. Для таких элементов g уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$ и каждое его решение x является решением задачи Коши (3). Непрерывную зависимость по норме $\mathbf{D}_0$ решения x этой задачи можно показать аналогично тому, как это сделано в п. а). □

Замечание 5. Если выполнены условия леммы 2, то в случае корректной разрешимости уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ в пространстве $\mathbf{V}$ множество $\mathfrak{M}$ всех решений этого уравнения при всех $g \in \mathbf{D}_0$ совпадает с множеством $\mathbf{D}_0$. Действительно, в п. а) доказательства леммы 2 показано, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{D}_0$. Вложение $\mathfrak{M} \supseteq \mathbf{D}_0$ очевидно.

Справедливо следующее обобщение теоремы 2 из [7] и теоремы 5 из [9].

Теорема 3. *Пусть пространство $\mathbf{D}_0$ непрерывно вложено в пространство $\mathbf{V}$, уравнение $\mathcal{L}x = f$ с линейным оператором $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ $\mathbf{D}_0$-устойчиво, а оператор $\mathcal{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ обладает свойством: $\mathcal{F}(0) = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$\|\mathcal{F}x_2 - \mathcal{F}x_1\|_{\mathbf{B}} \leq k\|x_2 - x_1\|_{\mathbf{V}} \tag{9}$$

при всех $\|x_1\|_{\mathbf{V}} \leq \delta$, $\|x_2\|_{\mathbf{V}} \leq \delta$. Тогда уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ локально $\mathbf{D}_0$-устойчиво в окрестности тривиального решения.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 следует, что операторы $\mathcal{L} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$, $\mathcal{C} : \mathbf{B} \to \mathbf{V}$, $\mathcal{X} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{V}$ ограничены. Повторяя схему доказательства теоремы 3, получим, что уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$ при $g \in \mathbf{V}$, $\|g\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда в силу утверждения б) леммы 3 уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ локально $\mathbf{D}_0$-устойчиво в окрестности тривиального решения. □

Лемма 4. *Пусть линейное уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{V}$-устойчиво. Тогда*

а) *корректная разрешимость уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ в пространстве $\mathbf{V}$ гарантирует $\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$;*

б) *корректная разрешимость уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ в пространстве $\mathbf{V}$ при $\|g - g_0\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$, где $g_0 = \mathcal{C}\eta_0 + \mathcal{X}\alpha_0$, $\eta_0 \in \mathbf{B}$, $\alpha_0 \in \mathbf{R}^n$, $\delta_0 > 0$, гарантирует $\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_0$ в некоторой окрестности решения x_0 при $x_0(0) = \alpha_0$.*

Доказательство. $\mathbf{V}$-устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ означает, что оператор Коши $\mathcal{C}$ действует из пространства $\mathbf{B}$ в пространство $\mathbf{V}$ и ограничен, а столбцы фундаментальной матрицы X уравнения принадлежат пространству $\mathbf{V}$. Обозначим $\varsigma = \|\mathcal{C}\|_{\mathbf{B}\to\mathbf{V}} + \|\mathcal{X}\|_{\mathbf{R}^n\to\mathbf{V}}$.

а) Пусть уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$. Рассмотрим последовательность задач $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_i$, $x(0) = \alpha_i$ при $\{\eta_i, \alpha_i\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{Z}_+$. Тогда $g_i = \mathcal{C}\eta_i + \mathcal{X}\alpha_i \in \mathbf{V}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \|g_i - g_0\|_{\mathbf{V}} = 0$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \|\eta_i - \eta_0\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{i\to\infty} |\alpha_i - \alpha_0| = 0$. Решение x_i уравнения $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g_i$ существует, единственно, причем $x_i \in \mathbf{V}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x_0\|_{\mathbf{V}} = 0$ при $\lim\limits_{i\to\infty} \|g_i - g_0\|_{\mathbf{V}} = 0$. Элементы x_i и g_i связаны равенством $x_i = \mathcal{C}(\mathcal{F}x_i + \eta_i) + \mathcal{X}\alpha_i$, поэтому элемент x_i является решением задачи $\mathcal{L}x = f_i$, $x(0) = \alpha_i$ при $f_i = \mathcal{F}x_i + \eta_i$. Более того, $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x_0\|_{\mathbf{V}} = 0$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \|\eta_i - \eta_0\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{i\to\infty} |\alpha_i - \alpha_0| = 0$.

б) Пусть уравнение $x = \mathcal{C}\mathcal{F}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$ при $g \in \mathbf{V}$, $\|g - g_0\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$, где $\delta_0 > 0$ и $g_0 = \mathcal{C}\eta_0 + \mathcal{X}\alpha_0$, $\{\eta_0, \alpha_0\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$. Рассмотрим последовательность задач $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_i$, $x(0) = \alpha_i$ при $\{\eta_i, \alpha_i\} \in \mathbf{B} \times \mathbf{R}^n$, $\|\eta_i - \eta_0\|_{\mathbf{B}} \leq \varepsilon/\varsigma$, $|\alpha_i - \alpha_0| \leq \varepsilon/\varsigma$, $i \in \mathbf{Z}_+$. Тогда $g_i = \mathcal{C}\eta_i + \mathcal{X}\alpha_i \in \mathbf{V}$, $\|g_i - g_0\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$. Кроме того, $\lim\limits_{i\to\infty} \|g_i - g_1\|_{\mathbf{V}} = 0$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \|\eta_i - \eta_1\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{i\to\infty} |\alpha_i - \alpha_1| = 0$. Повторяя рассуждения п. a), получаем, что решение x_i уравнения $x = \mathcal{CF}x + g_i$ является решением задачи $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x + \eta_i$, $x(0) = \alpha_i$, причем $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_i - x_1\|_{\mathbf{V}} = 0$, если $\lim\limits_{i\to\infty} \|\eta_i - \eta_1\|_{\mathbf{B}} = \lim\limits_{i\to\infty} |\alpha_i - \alpha_1| = 0$. $\square$

Имеет место другой вариант обобщения теоремы 2 из [7] и теоремы 6 из [9].

Теорема 4. *Пусть линейное уравнение $\mathcal{L}x = f$ $\mathbf{V}$-устойчиво, а оператор $\mathcal{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{B}$ обладает свойством: $\mathcal{F}(0) = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|x_i\|_{\mathbf{V}} \leq \delta$, $i = 1, 2$, имеет место неравенство (9). Тогда уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ локально $\mathbf{V}$-устойчиво в некоторой окрестности тривиального решения.*

Доказательство. Повторяя схему доказательства теоремы 3, установим, что уравнение $x = \mathcal{CF}x + g$ корректно разрешимо в пространстве $\mathbf{V}$ при $g \in \mathbf{V}$, $\|g\|_{\mathbf{V}} \leq \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$. Тогда в силу утверждения а) леммы 4 уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ локально $\mathbf{V}$-устойчиво в некоторой окрестности тривиального решения. $\square$

Для установления локальной $\mathbf{D}_0$-устойчивости в окрестности решения уравнения $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ на основе теоремы 3 следует разложить оператор $\mathcal{F} : \mathbf{D}_0 \to \mathbf{B}$ на сумму вида $\mathcal{F} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{F}_1$, где $\mathcal{F}_1$ удовлетворяет условиям теоремы. Если при этом уравнение $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = f$ окажется $\mathbf{D}_0$-устойчивым, то локальная $\mathbf{D}_0$-устойчивость в окрестности решения нелинейного уравнения будет установлена.

Обозначим $\mathcal{L}_1 x \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}'(x_0)x$, $\mathcal{F}_1 x = \mathcal{F}x - \mathcal{L}_1 x$. Тогда уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ можно записать в виде

$$(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = \mathcal{F}_1 x$$

и в качестве линейного приближения можно брать уравнение $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = f$.

Рассмотрим простые примеры применения этой схемы.

Пример 2. В скалярном уравнении

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f(x[t-\vartheta], \dot{x}[t-\tau]), \quad t \geq 0, \\ x(\xi) = \dot{x}(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi < 0, \end{gathered} \tag{10}$$

ϑ, τ — положительные постоянные, функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbf{R}^2$, причем $f(0,0) \equiv 0$. Обозначим $h(t) = t - \vartheta$, $g(t) = t - \tau$, $\mathcal{L}x = \dot{x}$, $\mathcal{F}x = \mathcal{N}_f(x_h, \dot{x}_g)$, $p = -f_u(0,0)$, $q = f_v(0,0)$, где $\mathcal{N}_f(y,z) \equiv f(y,z)$ — оператор Немыцкого, порожденный функцией $f(\cdot,\cdot)$, $f_u(u,v) \equiv \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}$, $f_v(u,v) \equiv \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}$. Выберем модельное уравнение $\mathcal{L}_0 x \equiv \dot{x} + x = z$ и пространство $\mathbf{B} = \mathbf{L}^\infty$. В указанных предположениях оператор $\mathcal{N}_f$ действует из некоторого шара с центром в нуле пространства $\mathbf{L}^\infty \times \mathbf{L}^\infty$ в пространство $\mathbf{L}^\infty$ и непрерывно дифференцируем в этом шаре ([14], гл. X, § 1, 1.10, сс. 385, 386). Тогда оператор $\mathcal{F}$ действует из некоторого шара с центром в нуле пространства $\mathbf{D}_0$ в пространство $\mathbf{L}^\infty$ и непрерывно дифференцируем в этом шаре, причем $\mathcal{L}_1 x \equiv \mathcal{F}'(0)x = -px_h + q\dot{x}_g$. Уравнение (10) можно записать в виде $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = \mathcal{F}_1 x$, где $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = \dot{x} - q\dot{x}_g + px_h$, $\mathcal{F}_1 x = \mathcal{F}x - \mathcal{L}_1 x$.

В силу признаков из [15], [16] достаточным условием $\mathbf{C}$-устойчивости линейного уравнения $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = \eta$ является выполнение (при $\omega = e^{-1}$, $\sigma(\omega) = 1$) неравенств $|q| < 1$, $p > 0$ и

$$(1-q)|p\vartheta + (q-1)/e| + p|q|\tau < 1 - 3|q| + q^2.$$

Тогда в этих предположениях из теоремы 3 следует локальная $\mathbf{D}_0$-устойчивость уравнения $(\mathcal{L} - \mathcal{L}_1)x = \mathcal{F}_1 x$ (и уравнения (10)) в окрестности тривиального решения.

Пример 3. В системе уравнений модели "хищник–жертва", учитывающей внутривидовую борьбу в популяциях [17],

$$\begin{aligned}
\dot N_1(t) &= \Big(\varepsilon_1 + \int_{t-\tau_1}^{t} N_2(s)d_sK_1(t-s) - \beta_1 N_1(t)\Big)N_1(t),\\
\dot N_2(t) &= \Big(-\varepsilon_2 + \int_{t-\tau_2}^{t} N_1(s)d_sK_2(t-s) - \beta_2 N_2(t)\Big)N_2(t), \quad t \geq 0, \\
N_1(\xi) &= \widetilde N_1(\xi), \quad N_2(\xi) = \widetilde N_2(\xi), \ \text{ если } \ \xi < 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

N_1 и N_2 — численности жертв и хищников соответственно; константы ε_1, ε_2, τ_1, τ_2, β_1, β_2 положительны; $\widetilde N_1 : [-\tau_2, 0] \to [0,\infty)$, $\widetilde N_2 : [-\tau_1, 0] \to [0,\infty)$ — кусочно–непрерывные функции; $K_1 : [0,\tau_1] \to \mathbf{R}$, $K_2 : [0,\tau_2] \to \mathbf{R}$ — неубывающие ограниченные функции. Обозначим $k_1 = K_1(\tau_1) - K_1(0)$, $k_2 = K_2(\tau_2) - K_2(0)$.

Найдем условия устойчивости нетривиального положения равновесия

$$N_1^0 = \frac{\varepsilon_1\beta_2 + \varepsilon_2 k_1}{\beta_1\beta_2 + k_1k_2}, \quad N_2^0 = \frac{\varepsilon_1 k_2 - \varepsilon_2\beta_1}{\beta_1\beta_2 + k_1k_2}$$

при $\widetilde N_1(\xi) \equiv N_1^0$, $\widetilde N_2(\xi) \equiv N_2^0$. Заметим, что $N_2^0 > 0$ при $\varepsilon_1 k_2 > \varepsilon_2\beta_1$. Будем предполагать выполненным это неравенство. Введя новые функции $x_1(t) = N_1(t) - N_1^0$, $x_2(t) = N_2(t) - N_2^0$, $\varphi_1(\xi) = \widetilde N_1(\xi) - N_1^0$, $\varphi_2(\xi) = \widetilde N_2(\xi) - N_2^0$, получим систему

$$\begin{aligned}
\dot x_1(t) &= (-\gamma_1 + a_1(t))x_1(t) + \int_{h_1(t)}^{t} x_2(s)d_sr_1(t-s) + \mathcal{F}_1(x_1,x_2)(t) + \eta_1(t),\\
\dot x_2(t) &= (-\gamma_2 + a_2(t))x_2(t) - \int_{h_2(t)}^{t} x_1(s)d_sr_2(t-s) + \mathcal{F}_2(x_1,x_2)(t) + \eta_2(t), \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $\gamma_1 = \beta_1 N_1^0$, $\gamma_2 = \beta_2 N_2^0$; $a_1(t) = \int\limits_{h_1^-(t)}^{0} \varphi_2(s)d_sK_1(t-s)$, $a_2(t) = \int\limits_{h_2^-(t)}^{0} \varphi_1(s)d_sK_2(t-s)$; $h_1^-(t) = \min\{t-\tau_1, 0\}$, $h_2^-(t) = \min\{t-\tau_2, 0\}$, $h_1(t) = \max\{t-\tau_1, 0\}$, $h_2(t) = \max\{t-\tau_2, 0\}$; $r_1(t) = N_1^0K_1(t)$, $r_2(t) = N_2^0K_2(t)$, $p_1 = N_1^0k_1$, $p_2 = N_2^0k_2$;

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1(x_1,x_2)(t) &= x_1(t)\Big(\int_{h_1(t)}^{t} x_2(s)d_sK_1(t-s) - \beta_1x_1(t)\Big),\\
\mathcal{F}_2(x_1,x_2)(t) &= -x_2(t)\Big(\int_{h_2(t)}^{t} x_1(s)d_sK_2(t-s) + \beta_2x_2(t)\Big);
\end{aligned}$$

$\eta_1(t) = \int\limits_{h_1^-(t)}^{0} \varphi_2(s)d_sr_1(t-s)$, $\eta_2(t) = -\int\limits_{h_2^-(t)}^{0} \varphi_1(s)d_sr_2(t-s)$. Обозначим $x = \mathrm{col}\{x_1, x_2\}$, $\eta = \mathrm{col}\{\eta_1, \eta_2\}$, $\mathcal{F}x = \mathrm{col}\{\mathcal{F}_1(x_1,x_2), \mathcal{F}_2(x_1,x_2)\}$;

$$(\mathcal{L}_0x)(t) = \begin{pmatrix}\dot x_1(t)\\ \dot x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix},$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \mathcal{R}$, $\mathcal{R}x = \mathrm{col}\{\mathcal{R}_1(x_1,x_2), \mathcal{R}_2(x_1,x_2)\}$, где

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1(x_1,x_2)(t) &= a_1(t)x_1(t) + \int_{h_1(t)}^{t} x_2(s)d_sr_1(t-s),\\
\mathcal{R}_2(x_1,x_2)(t) &= -a_2(t)x_2(t) - \int_{h_2(t)}^{t} x_1(s)d_sr_2(t-s).
\end{aligned}$$

Тогда систему (12) можно записать в виде матричного уравнения $(\mathcal{L}x)(t) = (\mathcal{F}x)(t) + \eta(t)$, $t \geq 0$, где оператор $\mathcal{F}$ непрерывно действует из пространства $\mathbf{C}$ непрерывных и ограниченных вектор-функций $x : [0,\infty) \to \mathbf{R}^2$ в пространство $\mathbf{L}^\infty$ измеримых и ограниченных в существенном вектор-функций $z : [0,\infty) \to \mathbf{R}^2$. Более того, оператор $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{L}^\infty$ непрерывно дифференцируем по Фреше в любой точке $x \in \mathbf{C}$ и $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}'(0) = 0$. Укажем условия $\mathbf{C}$-устойчивости линейного уравнения $\mathcal{L}x = f$. Тогда в силу теоремы 4 нелинейное уравнение $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$ будет также локально $\mathbf{C}$-устойчивым в некоторой окрестности тривиального решения.

Оператор Коши $\mathcal{W}$ модельного уравнения $\mathcal{L}_0 x = z$ определен равенством

$$(\mathcal{W}z)(t) = \int_0^t W(t,s)z(s)\,ds,$$

где

$$W(t,s) = \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2(t-s)} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, оператор $\mathcal{W}$ действует из пространства $\mathbf{L}^\infty$ в пространство $\mathbf{C}$ и ограничен. Поэтому банахово пространство $\mathbf{D}_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}^\infty)$ совпадает с банаховым пространством $\mathbf{W}$. В частности, норма $\|x\|_{\mathbf{D}_0} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|\mathcal{L}_0 x\|_{\mathbf{L}^\infty} + |x(0)|$ в пространстве $\mathbf{D}_0$ эквивалентна норме $\|x\|_{\mathbf{W}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x\|_{\mathbf{C}} + \|\dot{x}\|_{\mathbf{L}^\infty}$ в пространстве $\mathbf{W}$. Оператор $\mathcal{R}$ ($\mathcal{G} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{W}\mathcal{R}$) действует из пространства $\mathbf{C}$ в пространство $\mathbf{L}^\infty$ (в пространство $\mathbf{C}$) и ограничен. В силу замечания 4 и теоремы 4 [1] однозначная разрешимость уравнения $x = \mathcal{G}^b x + g$ в пространстве $\mathbf{C}^b \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbf{C} : x(t) \equiv 0 \text{ на } [0,b]\}$ для некоторого $b > 0$ гарантирует $\mathbf{C}$-устойчивость ($\mathbf{D}_0$-устойчивость) уравнения $\mathcal{L}x = f$.

Определим норму $|\alpha|$ элемента $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha_1, \alpha_2\} \in \mathbf{R}^2$ равенством

$$|\alpha| = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\},$$

норму $\|x\|_{\mathbf{C}^b}$ элемента $x \in \mathbf{C}^b$ — равенством

$$\|x\|_{\mathbf{C}^b} = \Big|\mathrm{col}\Big\{\sup_{t\ge b}|x_1(t)|, \sup_{t\ge b}|x_2(t)|\Big\}\Big|.$$

Тогда $\|\mathcal{G}\|_{\mathbf{C}^b \to \mathbf{C}^b} < 1$, если $b > \max\{\tau_1, \tau_2\}$, $p_1 < \gamma_1$, $p_2 < \gamma_2$.

Итак, из теоремы 4 (теоремы 3) следует, что система (12) локально $\mathbf{C}$-устойчива ($\mathbf{D}_0$-устойчива) в некоторой окрестности тривиального решения, если $k_1 < \beta_1$, $k_2 < \beta_2$.

Покажем, что в условиях $k_1 < \beta_1$, $k_2 < \beta_2$ система (11) локально $\mathbf{C}_\gamma$-устойчива в окрестности положения равновесия $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$ для некоторого $\gamma > 0$.

Действительно, пусть $\gamma_1 > p_1$, $\gamma_2 > p_2$, тогда найдется такое положительное число γ, что $\gamma_1 - \gamma > p_1$, $\gamma_2 - \gamma > p_2$. Оператор $\mathcal{R}$ действует из пространства $\mathbf{C}_\gamma$ в пространство $\mathbf{L}_\gamma^\infty$, т. к. для $x \in \mathbf{C}_\gamma$, $x(t) = e^{-\gamma t}y(t)$, $y \in \mathbf{C}$, $y(t) \in \mathbf{R}^2$, имеем $\|\mathcal{R}x\|_{\mathbf{L}_\gamma^\infty} \le L\|x\|_{\mathbf{C}_\gamma}$, где

$$L = \max\Big\{\operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge 0}|a_1(t)| + p_1 e^{\gamma\tau_1}, \operatorname*{vrai\,sup}_{t\ge 0}|a_2(t)| + p_2 e^{\gamma\tau_2}\Big\}.$$

Аналогично можно показать действие и непрерывность операторов $\mathcal{W} : \mathbf{L}_\gamma^\infty \to \mathbf{C}_\gamma$, $\mathcal{F} : \mathbf{C}_\gamma \to \mathbf{L}_\gamma^\infty$. Условие однозначной разрешимости уравнения $x = \mathcal{W}\mathcal{R}x + g$ в пространстве $\mathbf{C}_\gamma$ имеет вид $p_1 < \gamma_1 - \gamma$, $p_2 < \gamma_2 - \gamma$. Тогда из теоремы 4 (теоремы 3) следует, что система (12) локально $\mathbf{C}_\gamma$-устойчива ($\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}_\gamma^\infty)$-устойчива) в окрестности тривиального решения. Поэтому система (11) локально $\mathbf{C}_\gamma$-устойчива ($\mathbf{D}(\mathcal{L}_0, \mathbf{L}_\gamma^\infty)$-устойчива) в окрестности положения равновесия $N_1 = N_1^0$, $N_2 = N_2^0$ при $k_1 < \beta_1$, $k_2 < \beta_2$ и $0 < \gamma < \min\{(\beta_1 - k_1)/N_1^0, (\beta_2 - k_2)/N_2^0\}$.

Замечание 6. В статье [17] условие асимптотической устойчивости по начальным функциям нетривиального положения равновесия $\{N_1^0, N_2^0\}$ уравнения (11) имеет вид $N_1^0 k_1 + N_2^0 k_2 < 2\min\{N_1^0\beta_1, N_2^0\beta_2\}$. Это условие совпадает с полученными нами условиями в отдельных случаях. В общем случае условия пересекаются, но не совпадают.

Литература

1. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 6. – С. 3–16.
2. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Stability of solutions of the equations with aftereffect* // Funct. Different. Equat. – 1998. – V. 5. – № 1–2. – P. 39–55.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
4. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatullina L.F. *Introduction to the theory of linear functional differential equations.* – Atlanta: World Federation Publ. Company, 1995. – 172 p.
5. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Mem. Different. Equat. and Mathem. Physics. – Tbilisi: Publ. House GCI, 1996. – V. 8. – P. 1–102.
6. Азбелев Н.В., Малыгина В.В. *Об устойчивости тривиального решения нелинейных уравнений с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 72–85.
7. Азбелев Н.В., Ермолаев М.Б., Симонов П.М. *К вопросу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению* // Изв. вузов. Математика. – 1995. № 10. – С. 3–9.
8. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Исследование устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений с последействием по линейному приближению* // Некоторые пробл. фундам. и прикл. матем. – М.: МФТИ(ГУ), 1998. – С. 4–14.
9. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость и асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Междунар. конгресс "Нелинейный анализ и его приложения": Тр. конгресса. – М.: ЦИУНД при ИМАШ РАН. – 1999. – С. 658–673.
10. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
11. Хатсон В.К.Л., Пим Дж.С. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 432 с.
12. Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1716–1723.
13. Малыгина В.В. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 5. – С. 72–85.
14. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
15. Гусаренко С.А. *Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально–дифференциальных уравнений* // Функц.–дифференц. уравнения. – Пермь: Пермск. политехн. ин-т., 1987. – С. 30–40.
16. Гусаренко С.А. *Об ограниченности оператора Коши* // Функц.–дифференц. уравнения. – Пермь: Пермск. политехн. ин-т. – 1992. – С. 111–122.
17. Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. *Об устойчивости системы хищник–жертва* // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 11. – С. 57–64.

Пермский государственный технический университет,

Пермский государственный университет

Поступила
24.05.1999