ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 514.762

Р.Х. ИБРАГИМОВА

ДВИЖЕНИЯ НА КАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОРТОГОНАЛЬНУЮ И КАСАТЕЛЬНУЮ СТРУКТУРЫ

В [1] были изучены автоморфизмы произвольных расслоенных пространств, относительно которых инвариантна π-структура; найдено строение тензоров кривизны и кручения для расслоенного многообразия, допускающего максимальную группу автоморфизмов; рассмотрены автоморфизмы более специального типа, при которых сохраняется также и заданный объект линейной связности. В [2] рассматриваются три группы движений в касательном расслоении со специальной метрикой типа Сасаки: движения, сохраняющие расслоенную структуру; движения, состоящие из продолженных преобразований, и произвольные движения. Найдены максимальные размерности этих групп движений.

В данной работе изучаются движения на касательном расслоении с произвольной римановой метрикой, не вырождающейся на слоях, сохраняющие ортогональную и касательную структуры, в предположении, что метрическая связность является канонической, а распределения H и V J-изометричны. Вычисления проводятся относительно неголономного поля реперов. При этом используется аппарат теории автоморфизмов в расслоенных пространствах, построенный в [1].

Рассмотрим на касательном расслоении TM риманову метрику произвольной сигнатуры, не вырожденную на слоях. Задав любое (вообще говоря, неголономное) адаптированное к π-структуре поле реперов $\{e_A\}$ и сопряженное ему поле кореперов $\{\theta^A\}$: $\theta^A(e_B)=\delta^A_B$, будем иметь

$$d\sigma^2 = G_{AB}\theta^A\theta^B, \tag{1}$$

где

$$G_{AB}=\begin{pmatrix} G_1 & G_4\\ G_3 & G_2\end{pmatrix},\quad G_1=(G_{ij}),\quad G_2=(G_{\bar i\bar j}),\quad G_3=(G_{\bar i j}),\quad G_4=(G_{i\bar j}).$$

Пусть на TM задано произвольное векторное поле $v=v^Ae_A$, определяющее инфинитезимальное преобразование

$$X^{A'}=X^A+v^A\tau. \tag{2}$$

Преобразование (2) определяет движение, если оно сохраняет метрику, т. е. векторное поле v удовлетворяет уравнениям Киллинга

$$\underset{v}{D}G_{AB}=0. \tag{3}$$

Разобьем их на три группы

$$\underset{v}{D}G_{ij}=0,\quad \underset{v}{D}G_{\bar i\bar j}=0,\quad \underset{v}{D}G_{\bar i j}=0. \tag{4}$$

Пусть ∇ — метрическая связность с заданным тензором кручения [3], т. е. ∇ удовлетворяет условию $\nabla_C G_{AB}=0$. Тогда уравнения Киллинга (3) принимают вид

$$2v_{(AB)}=v_{AB}+v_{BA}=0,$$

где $v_{BA} = \nabla_A v_B + S_{BAC} v^C$, S — тензор кручения связности, $v_B = v^A G_{AB}$. Таким образом,

$$\nabla_B v_A = v_{AB} + S_{ACB} v^C. \tag{5}$$

Тензор кривизны касательного расслоения (TM, G) с произвольной римановой метрикой G, допускающего максимальную группу движений, обладает структурой

$$K^A_{BCD} = \theta^A_{BCD} + T^A_{BCD}, \tag{6}$$

где $\theta^A_{BCD} = \frac{Q}{N(N-1)}(\delta^A_D G_{BC} - \delta^A_C G_{BD})$ — тензор кривизны римановой связности,

$$\begin{aligned} &T^A_{BCD} = \nabla_C P^A_{BD} - \nabla_D P^A_{BC} + P^A_{MC} P^M_{BD} - P^A_{MD} P^M_{BC} - \tfrac{1}{2} P^A_{BM}(P^M_{CD} - P^M_{DC}), \\ &P_{ABC} = S_{ABC} + S_{BCA} - S_{CAB}, \\ &Q_{BC} = Q^A_{BCA} = K_{BC} + \nabla_F P^F_{BC} - \nabla_C P_B - P_F P^F_{BC} + P^F_{BM} P^M_{CF}, \quad P_B = P^M_{BM}, \end{aligned} \tag{7}$$

K_{BC} — тензор Риччи.

Рассмотрим на касательном расслоении TM с произвольной метрикой (1) движения, относительно которых инвариантна заданная ортогональная π-структура [3].

Выберем в качестве горизонтального распределения распределение ${}^{\perp}H$, ортогональное слоям, т. е. ${}^{\perp}H \perp V$. В этом случае на TM определяется π-структура, которую будем называть [3] ортогональной. Задание этой структуры сводится к заданию аффинора F, матрица которого в произвольном адаптированном к π-структуре поле реперов $\{e_A\}$ имеет вид

$$F = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix}, \quad E_1 = (\delta^i_j), \quad E_2 = (\delta^{\bar{i}}_{\bar{j}}) = (\delta^i_j).$$

Аффинор F сохраняет скалярное произведение, т. е. $(Fu, Fv) = (u, v)$, где u, v — произвольные векторные поля на TM, и метрический тензор в адаптированном репере $\{e_A\}$ имеет компоненты

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

т. е. $G_{i\bar{j}} = 0$. Как известно [1], преобразования (2) сохраняют слои тогда и только тогда, когда векторное поле v является проектируемым, т. е. в адаптированном репере $v^i = v^i(x^k)$.

Теорема 1. *Если проектируемое векторное поле v является движением метрики* (8), *то оно сохраняет горизонтальное распределение* ${}^{\perp}H$.

Доказательство. Пусть проектируемое в. п. v есть движение, ${}^{\perp}H$ — горизонтальное распределение, ортогональное слоям. Тогда в адаптированном репере $G_{i\bar{j}} = 0$ и второе из уравнений (4) дает $G_{\bar{r}\bar{j}} v^{\bar{r}}_i = 0$, откуда в силу невырожденности блока $G_2 = (G_{\bar{r}\bar{j}})$ следует $v^{\bar{r}}_i = 0$, что равносильно [4] условию $\underset{v}{D} F^A_B = 0$. $\square$

Для инвариантности заданной π-структуры относительно преобразования (2) необходимо и достаточно выполнения условия [1]

$$\underset{v}{D} F^A_B = 0. \tag{9}$$

Это условие в адаптированном репере для проектируемого векторного поля v запишется в виде

$$\nabla_v F^A_B - F^C_B v^A_C + F^A_C v^C_B = 0.$$

Если связность вполне приводима, т. е. $\nabla_v F^A_B = 0$, то $F^A_C v^C_B = F^C_B v^A_C$. Тогда в адаптированном репере матрица v_{AB} имеет вид

$$v_{AB} = \begin{pmatrix} v_{ij} & 0 \\ 0 & v_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где блоки кососимметричны, что эквивалентно соотношениям $v_{(ij)} = 0$, $v_{(\bar{i}\,\bar{j})} = 0$. Поэтому наряду с $N = 2n$ неизвестными компонентами векторного поля $v^A(v^i, v^{\bar{i}})$ рассмотрим также $n(n-1)/2 + n(n-1)/2 = n(n-1)$ кососимметричных компонент v_{ij}, $v_{\bar{i}\,\bar{j}}$. Порядок группы движений (TM, G) с метрикой (8), относительно которых инвариантна заданная π-структура, не превосходит, следовательно, числа $r = n(n-1) + 2n = n(n+1)$.

Итак, справедлива

Теорема 2. *Порядок группы проектируемых движений касательного расслоения* (TM, G) *с метрикой* (8) *не превосходит числа* $r = n(n+1)$.

Уравнения (9) являются следствием уравнений Киллинга для метрики (8). Уравнения Киллинга (4) в силу соотношения (9) принимают вид

$$\underset{v}{D} G_{ij} = 0, \quad \underset{v}{D} G_{\bar{i}\,\bar{j}} = 0. \tag{11}$$

Что касается уравнений $\underset{v}{D} G_{i\bar{j}} = 0$, то они удовлетворяются тождественно. Следовательно, имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы однопараметрическая группа автоморфизмов ортогональной* π*-структуры была движением, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее векторное поле* v *удовлетворяло дифференциальным уравнениям* (11).

В дальнейших рассуждениях для упрощения вычислений ограничимся рассмотрением канонической связности, удовлетворяющей условиям [3]

$$\nabla F = 0, \quad \nabla J = 0, \quad P_{ijk} = 0, \quad P_{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}} = 0.$$

Выясним строение тензоров кривизны и кручения этой связности. Так как связность каноническая, то для формы кривизны Ω этой связности имеем $\Omega^i_{\bar{j}} = 0$, $\Omega^{\bar{i}}_j = 0$, $\Omega^i_j = \Omega^{\bar{i}}_{\bar{j}}$, т. е. тензор кривизны обладает отличными от нуля компонентами

$$K^m_{jei} = K^{\overline{m}}_{\overline{j}ei}, \quad K^m_{je\bar{i}} = K^{\overline{m}}_{\overline{j}e\bar{i}}, \quad K^m_{j\bar{e}\bar{i}} = K^{\overline{m}}_{\overline{j}\bar{e}\bar{i}}. \tag{12}$$

Учитывая эти соотношения, согласно (6) для тензора кривизны K^A_{BCD} канонической связности получаем отличные от нуля компоненты

$$K^m_{jei} = Q^m_{jei} + T^m_{jei}, \quad K^m_{je\bar{i}} = Q^m_{je\bar{i}} + T^m_{je\bar{i}}, \quad K^m_{j\bar{e}\bar{i}} = Q^m_{j\bar{e}\bar{i}} + T^m_{j\bar{e}\bar{i}}, \tag{13}$$

где согласно (7)

$$\begin{aligned}
T^m_{jei} &= P^m_{\bar{r}j} P^{\bar{r}}_{ei} - P^m_{\bar{r}i} P^{\bar{r}}_{j\bar{e}} - P^m_{j\bar{r}} (P^{\bar{r}}_{ei} - P^{\bar{r}}_{ie}), \\
T^m_{je\bar{i}} &= \nabla_e P^m_{j\bar{i}} - P^m_{re} P^r_{j\bar{i}} - P^m_{\bar{r}e} P^{\bar{r}}_{j\bar{i}} - P^m_{\bar{r}i} P^{\bar{r}}_{je} - \tfrac{1}{2} P^m_{j\bar{r}} (P^{\bar{r}}_{e\bar{i}} - P^{\bar{r}}_{\bar{i}e}), \\
T^m_{j\bar{e}\bar{i}} &= \nabla_{\bar{e}} P^m_{j\bar{i}} - \nabla_{\bar{i}} P^m_{j\bar{e}} + P^m_{c\bar{e}} P^c_{j\bar{i}} - P^m_{c\bar{i}} P^c_{j\bar{e}}, \\
Q^m_{jei} &= \tfrac{Q}{n(n-1)} (\delta^m_i G_{je} - \delta^m_e G_{ji}).
\end{aligned}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Тензор кривизны канонической связности касательного расслоения* (TM, G) *с метрикой* (8), *допускающего максимальную группу движений, сохраняющих ортогональную* π*-структуру, имеет вид* (13).

Тензор кручения канонической связности кроме заданных условий $P_{ijk} = 0$, $P_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0$ удовлетворяет условиям, вытекающим из соотношений (12),

$$
\begin{gathered}
T^{m}_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}} = 0, \quad T^{\overline{m}}_{jei} = 0, \quad T^{\overline{m}}_{\bar{j}ei} = 0, \quad T^{\overline{m}}_{j\bar{e}\bar{i}} = 0, \quad T^{m}_{\bar{j}e\bar{i}} = Q^{m}_{\bar{j}e\bar{i}}, \\
T^{\overline{m}}_{je\bar{i}} = -Q^{\overline{m}}_{je\bar{i}}, \quad T^{\overline{m}}_{\bar{j}e\bar{i}} - T^{m}_{jei} = Q^{m}_{jei}, \quad \nabla_r T^{m}_{\bar{j}\bar{e}i} = 0, \\
T^{\overline{m}}_{\bar{j}e\bar{i}} = T^{\overline{m}}_{je\bar{i}}, \quad T^{m}_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}} - T^{\overline{m}}_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}} = Q^{\overline{m}}_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}}, \quad \nabla_{\bar{r}} T^{m}_{\bar{j}\bar{e}i} = 0, \\
P^{\bar{k}}_{\bar{r}m}(P^{\bar{r}}_{ke}\delta^{m}_{i} - P^{\bar{r}}_{ki}\delta^{m}_{e}) = 0, \quad P^{r}_{\bar{k}\overline{m}}(P^{k}_{r\bar{i}}\delta^{\overline{m}}_{\bar{e}} - P^{k}_{r\bar{e}}\delta^{\overline{m}}_{\bar{i}} = 0,
\end{gathered}
\tag{14}
$$

где различные компоненты тензора T^{A}_{BCD} вычисляются согласно (7), а

$$
Q^{\overline{m}}_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}} = \frac{1}{n-1}(\delta^{\overline{m}}_{\bar{i}}\widetilde{Q}_{\bar{j}\bar{e}} - \delta^{\overline{m}}_{\bar{e}}\widetilde{Q}_{\bar{j}\,\bar{i}}), \quad \widetilde{Q}_{\bar{j}\bar{e}} = Q^{\overline{m}}_{\bar{j}\bar{e}\,\overline{m}}.
$$

Итак, справедлива

Теорема 5. *Тензор кручения канонической связности касательного расслоения* (TM, G) *с метрикой* (8)*, допускающего максимальную группу движений, сохраняющих ортогональную* π*-структуру, удовлетворяет условиям* (14)*.*

В частности, если каноническая связность ∇ риманова, то $P = 0$, $T = 0$. Тогда $K_{AB} = Q_{AB} = 0$, т. е. $K^{D}_{ABC} = 0$. В этом случае [3] касательное расслоение TM, допускающее вполне приводимую риманову связность, тривиально и поэтому является прямым произведением двух римановых пространств с метриками $G_{ij}(x^k)$, $G_{\bar{i}\bar{j}}(x^k)$. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 6. *Тензор кривизны канонической римановой связности касательного расслоения* (TM, G) *с метрикой* (8)*, допускающего максимальную группу движений, сохраняющих ортогональную* π*-структуру, равен нулю.*

Особенностью касательного расслоения является наличие изоморфизма векторных подрасслоений

$$
J : {}^{\perp}H \to V,
$$

определяемое аффинором касательной структуры J ($J^2 = 0$), матрицей которого в индуцированных координатах будет

$$
J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad E = (\delta^{i}_{j}); \quad \mathrm{Ker}\,(J) = \mathrm{Im}\,(J) = V(TM).
$$

Рассмотрим на касательном расслоении (TM, G) с метрикой (8) движения, сохраняющие кроме того и касательную структуру. Необходимым и достаточным условием инвариантности касательной структуры относительно преобразования (2) является равенство

$$
\underset{v}{D} J^{A}_{B} = 0. \tag{15}
$$

Для проектируемого векторного поля v условия (15) принимают вид

$$
\nabla_v J^{A}_{B} + J^{A}_{C} v^{C}_{B} - J^{C}_{B} v^{A}_{C} = 0.
$$

Так как связность каноническая, то $\nabla_v J^{A}_{B} = 0$. Поэтому $J^{A}_{C} v^{C}_{B} = J^{C}_{B} v^{A}_{C}$. Тогда в адаптированном репере $v_{ij} = v_{\bar{i}\bar{j}}$ и матрица (10) принимает вид

$$
v_{AB} = \begin{pmatrix} v_{ij} & 0 \\ 0 & v_{ij} \end{pmatrix},
$$

где блоки кососимметричны в силу уравнений $v_{(AB)} = 0$, которые эквивалентны соотношению $v_{(ij)} = 0$ и поэтому $v_{ij} = v_{[ij]}$. Тогда наряду с $N = 2n$ неизвестными компонентами векторного поля $v^{A}(v^{i}, v^{\bar{i}})$ рассмотрим еще $n(n-1)/2$ кососимметричных компонент v_{ij}. Таким образом, порядок группы движений на касательном расслоении (TM, G) с метрикой (8), относительно которых инвариантны ортогональная и касательная структуры, не превосходит числа

$$r = 2n + n(n-1)/2 = (n^2 + 3n)/2. \tag{16}$$

Итак, имеет место

Теорема 7. *Порядок группы движений на касательном расслоении (TM, G) с метрикой (8), сохраняющих π-структуру и касательную структуру J, не превосходит числа $r = (n^2 + 3n)/2$.*

Рассмотрим пример. Если касательное расслоение TM является евклидовым пространством E^{2n}, то для евклидовой метрики $G_{AB} = \delta_{AB}$ уравнения Киллинга (3) имеют вид $\partial_A v_B + \partial_B v_A = 0$. В этом случае задача нахождения движений на (TM, G), сохраняющих ортогональную π-структуру и касательную структуру J, сводится к интегрированию системы уравнений

$$\partial_{\bar{i}} v_{\bar{j}} = \partial_i v_j, \quad \partial_i v_j + \partial_j v_i = 0, \quad \partial_{\bar{i}} v_j = 0, \quad \partial_i v_{\bar{j}} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$v_{\bar{i}} = c_{ij} x^j + c_{\bar{i}}, \quad c_{ij} = -c_{ji}, \quad v_i = c_{ij} x^j + c_i, \quad v_i = v_i(x^k), \quad v_{\bar{i}} = v_{\bar{i}}(x^{\bar{k}}).$$

Таким образом, решение данной системы зависит от $2n$ произвольных постоянных c_i, $c_{\bar{i}}$ и $n(n-1)/2$ независимых элементов кососимметричной матрицы c_{ij}, т. е. максимальный порядок группы таких движений точно равен числу в (16).

Выясним строение тензоров кривизны и кручения канонической связности. Учитывая (12), из соотношений (6) получим для тензора кривизны K^A_{BCD} канонической связности отличные от нуля компоненты

$$K^m_{jei} = Q^m_{jei} + T^m_{jei}, \quad K^m_{j\bar{e}i} = Q^m_{j\bar{e}i} + T^m_{j\bar{e}i}, \quad K^m_{j\bar{e}\bar{i}} = Q^m_{j\bar{e}\bar{i}} + T^m_{j\bar{e}\bar{i}}, \tag{17}$$

где T^m_{jei}, $T^m_{j\bar{e}i}$, $T^m_{j\bar{e}\bar{i}}$ выражаются согласно (7),

$$\begin{aligned}
Q^m_{jei} &= \frac{Q}{n(n-1)}(\delta^m_i G_{je} - \delta^m_e G_{ji}),\\
Q^m_{j\bar{e}i} &= \frac{1}{n}\{(\delta^m_i \tilde{\tilde{Q}}_{je} - \delta^m_e \widehat{Q}_{ji}) + (T^{\overline{m}}_{\bar{j}\bar{e}i} - T_{\bar{j}\bar{e}i\cdot}{}^{\overline{m}} - T_{\bar{j}i\cdot}{}^{\overline{m}}{}_{\bar{e}}) - (T_{j\bar{e}i\cdot}{}^m - T^m_{ji\bar{e}} - T_{jei\cdot}{}^{\overline{m}})\},\\
\tilde{\tilde{Q}}_{AB} &= Q^m_{ABm},\\
Q^m_{j\bar{e}\bar{i}} &= \frac{1}{n}\{(\delta^{\overline{m}}_{\bar{i}} \widehat{Q}_{j\bar{e}} - \delta^{\overline{m}}_{\bar{e}} \widehat{Q}_{j\bar{i}}) + (T_{\bar{j}\bar{e}\cdot}{}^{\overline{m}}{}_i - T^{\overline{m}}_{\bar{j}\,i\bar{e}} + T_{\bar{j}\,\bar{i}\bar{e}\cdot}{}^m) - (T_{ij\bar{e}\cdot}{}^{\overline{m}} - T^m_{ji\bar{e}} + T_{je\cdot}{}^{\overline{m}}{}_{\bar{i}})\},\\
\widehat{Q}_{AB} &= Q^m_{AB\overline{m}}.
\end{aligned}$$

Итак, справедлива

Теорема 8. *Тензор кривизны канонической связности касательного расслоения (TM, G) с метрикой (8), допускающего максимальную группу движений, сохраняющих ортогональную π-структуру и касательную структуру, имеет вид (17).*

Тензор кручения канонической связности кроме заданных условий $P_{ijk} = 0$, $P_{\bar{i}\,\bar{j}\,\bar{k}} = 0$ удовлетворяет условиям, вытекающим из соотношений (12),

$$\begin{gathered}
T^{\overline{m}}_{jei} = 0, \quad T^{\overline{m}}_{je\bar{i}} = 0, \quad T^{\overline{m}}_{j\bar{e}\bar{i}} = 0, \quad T^m_{\bar{j}ei} = 0, \quad T^m_{\bar{j}e\bar{i}} = 0,\\
T^m_{\bar{j}\bar{e}\bar{i}} = 0, \quad \widehat{T}_{\bar{i}\bar{e}} = \widetilde{T}_{i\bar{e}}, \quad \widehat{T}_{\bar{e}k} = \overset{*}{T}_{k\bar{e}}, \quad \widehat{T}_{ki} = \tilde{\tilde{T}}_{\bar{k}\,\bar{i}}, \quad \widehat{T}_{\bar{e}i} = \widehat{T}_{\bar{i}e},\\
\overset{*}{T}_{ei} = \tilde{\tilde{T}}_{\bar{e}i}, \quad \tilde{\tilde{T}}_{\bar{i}e} = \tilde{\tilde{T}}_{\bar{e}i}, \quad \widetilde{T}_{e\bar{i}} = \widetilde{T}_{i\bar{e}}, \quad \widehat{T}_{\bar{e}\bar{i}} = \widehat{T}_{\bar{i}\bar{e}},
\end{gathered} \tag{18}$$

где $\widetilde{T}_{AB} = T^{\overline{m}}_{AB\overline{m}}$, $\tilde{\tilde{T}}_{AB} = T^m_{ABm}$, $\widehat{T}_{AB} = T^m_{AB\overline{m}}$, $\overset{*}{T}_{AB} = T^{\overline{m}}_{ABm}$, а компоненты T^A_{BCD} выражаются согласно (7). Отсюда следует

Теорема 9. *Тензор кручения канонической связности на касательном расслоении* (TM, G) *с метрикой* (8)*, допускающем максимальную группу движений, сохраняющих ортогональную* π*-структуру и касательную структуру, удовлетворяет условиям* (18).

Литература

1. Шапуков Б.Н. *Автоморфизмы расслоенных пространств* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1982, вып. 14. – С. 97–108.
2. Паньженский В.И. *О движениях в касательном расслоении с метрикой Сасаки.* – Пенз. гос. пед. ин-т. – Пенза, 1989. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 10.02.89, № 1194-В89.
3. Ибрагимова Р.Х., Шапуков Б.Н. *Метрические расслоения и некоторые их приложения* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1990, вып. 20. – С. 44–58.
4. Ибрагимова Р.Х. *Движения на касательных расслоениях со специальной метрикой* // Дифференц. геометрия. – Саратов, 1985, вып. 8. – С. 17–22.

Алмаатинский университет
(*Казахстан*)

Поступила
22.12.1995