УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 3
С. 350–375

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 539.3

О НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ФОРМЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И РАЗРУШЕНИИ КОМПОЗИТНЫХ ТЕСТ-ОБРАЗЦОВ В УСЛОВИЯХ ТРЁХТОЧЕЧНОГО ИЗГИБА

В.Н. Паймушин[1,2], *Д.В. Тарлаковский*[3,4], *С.А. Холмогоров*[1]

[1]*Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, г. Казань, 420111, Россия*

[2]*Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия*

[3]*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия*

[4]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

На основе линеаризованных непротиворечивых уравнений теории криволинейных стержней сформулирована задача об устойчивости прямых коротких и длинных тест-образцов из слоистых волокнистых композитов в условиях трёхточечного изгиба. Разработан численный метод решения сформулированной задачи на базе метода конечных сумм в варианте интегрирующих матриц. Показано, что разрушение композитных тест-образцов в условиях трёхточечного изгиба происходит по причине реализации неклассической сдвиговой формы потери устойчивости.

Ключевые слова: слоистый волокнистый композит, тест-образец, задача трёхточечного изгиба, численный метод конечных сумм, моделирование испытаний, сдвиговая форма потери устойчивости

Введение

В цикле ранее выполненных работ ([1, 2] и др.) было показано, что при малых деформациях использование соотношений классической геометрически нелинейной теории упругости, составленных в квадратичном приближении и считающихся во всей научной и учебной литературе абсолютно корректными, при некоторых видах нагружения приводит к появлению «ложных» бифуркационных решений. Для случая малых деформаций был построен непротиворечивый вариант, а также рассмотрены простейшие примеры его применения, связанные с редукцией двумерной нелинейной задачи деформирования полосы в виде стержня к одномерным уравнениям и последующим их использованием для выявления возможных форм потери устойчивости (ФПУ) при характерных видах нагружения. Из полученных результатов абсолютно новыми оказались результаты, связанные с исследованием ФПУ стержня при его равномерном сжатии в поперечном направлении и при чистом сдвиге [2]. Эти исследования были продолжены в работах [3–6] и др., в которых построены непротиворечивые уравнения теории тонких оболочек при малых деформациях и произвольных перемещениях, на их основе выявлены все возможные ФПУ цилиндрической оболочки при кручении; для прямолинейных и криволинейных стержней построены уточненные уравнения геометрически нелинейной теории при конечных перемещениях и линеаризованные уравнения теории упругой

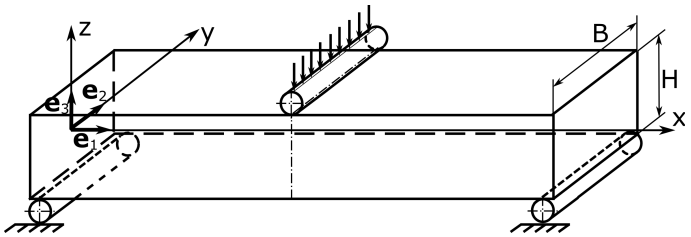

Рис. 1. Координатная система и схема нагружения тест-образца

устойчивости общего вида, на их основе проведены исследования всех возможных классических и неклассических ФПУ стержней при разных видах нагружения.

Настоящая статья посвящена постановке и численному решению задачи, связанной с испытанием на трёхточечный изгиб коротких и удлиненных тест-образцов из слоистых волокнистых композитов, имеющих прямоугольное поперечное сечение. Такие испытания регламентированы и другими существующими в настоящее время стандартами испытаний композитов [7–12]. Они проводятся с целью определения пределов прочности и модулей упругости первого рода при изгибе удлиненных тест-образцов, а также модулей поперечных сдвигов и пределов прочности на сдвиг при изгибе коротких тест-образцов. Результаты этих испытаний для углепластика, изготовленного из углеленты HS 180 REM с прямолинейными волокнами, были приведены в статье [13]. Ниже будет показано, что разрушение таких композитов при их испытаниях на трёхточечный изгиб происходит не по причине достижения напряжений сжатия предела прочности на сжатие (для удлиненных тест-образцов) и поперечных касательных напряжений пределов прочности на сдвиг (для коротких тест-образцов), а по причине реализации неклассической почти сдвиговой ФПУ тест-образцов в условиях поперечного изгиба. Качественно такие ФПУ в упрощенной постановке ранее были изучены в работах [2, 4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим тест-образец прямоугольного поперечного сечения из однонаправленного волокнистого композита, который, опираясь на концевые цилиндрические опоры, подвергается трёхточечному изгибу путём нагружения через жесткий штамп цилиндрической формы в середине образца (рис. 1).

При таком нагружении и закреплении образца, как показывают эксперименты (результаты будут приведены ниже), для длинных образцов при их плоском поперечном изгибе между приложенной силой P и прогибом образца линейная зависимость сохраняется практически вплоть до начала процесса его разрушения, а для коротких образцов такая зависимость является нелинейной. С целью уточненного описания процесса деформирования образца, следуя полученным ранее результатам [5], для вектора перемещений $\mathbf{U}$ произвольной точки $M(x, y, z)$ примем представление по модели Тимошенко

$$\mathbf{U} = U\mathbf{e}_1 + W\mathbf{e}_2 = (u + z\psi)\,\mathbf{e}_1 + (w + z\varphi)\,\mathbf{e}_3, \quad -H/2 \leqslant z \leqslant H/2, \tag{1}$$

где u, w – перемещения точек осевой линии в направлении осей x, z; ψ – угол поворота поперечного сечения $x = \text{const}$ вокруг оси y; φ – функция поперечного обжатия в направлении оси z.

Для определения деформаций удлинений η_1, η_3 и поперечного сдвига η_{13} будем использовать кинематические соотношения

$$\eta_1 = U_{,x} + W_{,x}^2/2, \quad \eta_2 = W_{,z} + W_{,z}^2/2, \quad \eta_{13} = W_{,x}\,(1 + W_{,z}) + U_{,z}\,(1 + U_{,x})\,, \tag{2}$$

которые составлены [1, 2] для случая малых деформаций и конечных перемещений в полном квадратичном приближении, и их использование не приводит к появлению «ложных» бифуркационных решений задач.

В соответствии с (1) и (2) указанные компоненты деформаций в дальнейшем будем определять одномерными соотношениями, составленными в приближении

$$\eta_1 = \varepsilon_1 + z\text{æ}_1, \quad \eta_3 = \varphi + \psi^2/2, \quad \eta_{13} = \gamma_{13} + z\text{æ}_{13}, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = u_{,x} + \frac{w_{,x}^2}{2}, \quad \gamma_{13} = w_{,x}\,(1+\varphi) + \psi\,(1+u_{,x})\,, \\ &\text{æ}_1 = \psi_{,x} + w_{,x}\varphi_{,x}, \quad \text{æ}_{13} = (1+\varphi)\,\varphi_{,x} + \psi\psi_{,x}. \end{aligned} \tag{4}$$

Напряжения, действующие на площадках $x = \text{const}$ в деформированном состоянии образца, обозначим через $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}$ и введем в рассмотрение приведенные к срединной плоскости $z = 0$ усилия и моменты, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} &Q_x = B\int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{11}\,dz, \quad Q_z = B\int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{13}\,dz, \quad T_z = B\int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{33}\,dz, \\ &M_y = B\int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{11} z\,dz, \quad S_{xz} = B\int\limits_{-H/2}^{H/2} \sigma_{13} z\,dz. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда, используя соотношения (3) и учитывая формулы (5), для вариации потенциальной энергии деформации рассматриваемого тела можно получить выражение

$$\delta\Pi = \int\limits_0^L \left(Q_x\delta\varepsilon_1 + Q_z\delta\gamma_{13} + T_z\delta\varepsilon_3 + M_y\delta\text{æ}_1 + S_{xz}\delta\text{æ}_{13}\right) dx. \tag{6}$$

В силу соотношений (4) выражение (6) преобразуется к виду

$$\delta\Pi = \int\limits_0^L \left(Q_x^*\delta u_{,x} + Q_z^*\delta w_{,x} + M_y^*\delta\psi_{,x} + S_{xz}^*\delta\varphi_{,x} + N_z^*\delta\psi + T_z^*\delta\varphi\right) dx, \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} &Q_x^* = Q_x + Q_z\psi, \quad Q_z^* = Q_z\,(1+\varphi) + Q_x w_{,x} + M_y\varphi_{,x}, \\ &M_y^* = M_y + S_{xz}\psi, \quad N_z^* = Q_z\,(1+u_{,x}) + T_z\psi + S_{xz}\psi_{,x}, \\ &S_{xz}^* = S_{xz}\,(1+\varphi) + M_y w_{,x}, \quad T_z^* = T_z + Q_z w_{,x} + S_{xz}\varphi_{,x}. \end{aligned} \tag{8}$$

В рамках принятой степени точности описания полей перемещений, деформаций и напряжений, формирующихся при нагружении образца, действующую на него нагрузку будем считать заданной в виде

$$X_3^+(x) = -Bp_0 f(x)\,, \quad (L/2 - c/2) \leqslant x \leqslant (L/2 + c/2)\,, \tag{9}$$

где c – длина зоны контакта нагружающего жесткого штампа с образцом, которую будем считать заданной, а функцию распределения контактных усилий примем в виде

$$f(x) = \cos\frac{\pi\,(x - L/2)}{c}. \tag{10}$$

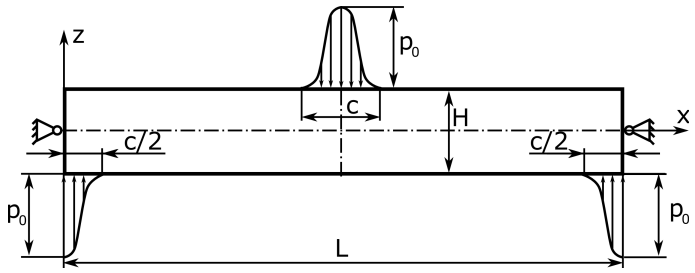

Рис. 2. Схема приложения внешней нагрузки

В дальнейшем будем считать, что при $x = 0, x = L$ на функцию w наложены кинематические связи

$$w(0) = w(L) = 0. \tag{11}$$

В силу принятых предположений можно считать, что на отрезках $0 \leq x \leq c/2$, $L - c/2 \leq x \leq L$ к образцу приложены погонные усилия (реакции опор, рис. 2), заданные в виде

$$\begin{aligned} X^-_{3(1)} &= \frac{Bp_0}{2} f_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant c/2, \\ X^-_{3(2)} &= \frac{Bp_0}{2} f_2(x), \quad L - c/2 \leqslant x \leqslant L, \\ f_1(x) &= \frac{\cos \pi x}{c}, \quad f_2(x) = \cos \pi (L - x). \end{aligned} \tag{12}$$

Вариация работы внешних сил (9), (12) на возможных перемещениях $\delta\left(w \pm \dfrac{H}{2}\varphi\right)$ будет равна

$$\delta A = \int_0^L (X_3 \delta w + t_3 \delta\varphi)\, dx, \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned} &X_3 = X_3^+, \quad t_3 = \frac{H}{2} X_3^+ \quad \text{при} \quad (L/2 - c/2) \leqslant x \leqslant (L/2 + c/2), \\ &X_3 = X^-_{3(1)}, \quad t_3 = -\frac{H}{2} X^-_{3(1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant c/2, \\ &X_3 = X^-_{3(2)}, \quad t_3 = -\frac{H}{2} X^-_{3(2)} \quad \text{при} \quad L - c/2 \leqslant x \leqslant L. \end{aligned} \tag{14}$$

После подстановки выражений (7), (13) в вариационное уравнение $\delta\Pi - \delta A = 0$ и его стандартных преобразований приходим к системе четырех дифференциальных уравнений равновесия

$$Q^*_{x,x} = 0, \quad Q^*_{z,x} + X_3 = 0, \quad M^*_{y,x} - N^*_z = 0, \quad S^*_{xz,x} - T^*_z + t_3 = 0, \tag{15}$$

для которых при $x = 0, x = L$ в дополнение к кинематическим граничным условиям (11) приходим к статическим граничным условиям

$$Q^*_x = 0, \quad M^*_y = 0, \quad S^*_{xz} = 0. \tag{16}$$

Возможны и другие варианты постановки задачи, практически эквивалентные сформулированной. В частности, при $x = 0$, $x = L$ решения уравнений (15) вместо (11) можно подчинить кинематическим граничным условиям

$$w(0) - \frac{H}{2}\varphi(0) = 0, \quad w(L) - \frac{H}{2}\varphi(L) = 0. \tag{17}$$

При этом, как нетрудно показать, в сечениях $x = 0$, $x = L$ вместо (15) на отрезках $0 \leqslant x \leqslant c/2$, $L - c/2 \leqslant x \leqslant L$ принимаются условия $X_3 = 0$, $t_3 = 0$.

В дальнейшем будем считать, что параметром нагружения является сила P, через которую входящая в (9), (12) величина p_0 будет находиться по формуле

$$p_0 = \frac{\pi P}{2cB}. \tag{18}$$

Тогда вместо описанных выше постановок задач необходима другая, когда в сечении $x = L/2$ формулируются условия симметрии, а распределенная нагрузка X_3 заменяется сосредоточенной:

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{L}{2}\right) = 0, \quad Q_z^*\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{P}{2}, \quad S_{xz}^*\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \tag{19}$$

2. Соотношения упругости

Испытания специальных тест-образцов из рассматриваемого композита, изготовленных в соответствии с существующими стандартами, показывают, что напряжения σ_{11} и σ_{33} с соответствующими деформациями η_1 и η_3 вплоть до разрушения допустимо связать соотношениями обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned} &\sigma_{11} = E_1^*(\eta_1 + \nu_{31}\eta_3), \quad \sigma_{33} = E_3^*(\eta_3 + \nu_{13}\eta_1), \\ &E_1^* = E_1/(1 - \nu_{13}\nu_{31}), \quad E_3^* = E_3/(1 - \nu_{13}\nu_{31}), \end{aligned} \tag{20}$$

где E_1, E_3, ν_{13}, $\nu_{31} = E_3\nu_{13}/E_1$ – найденные в [13] значения соответствующих модулей упругости первого рода и коэффициенты Пуассона.

Для установления вида физической зависимости $\sigma_{13} = \sigma_{13}(\eta_{13})$ в предположении о том, что она для рассматриваемого композита практически совпадает с зависимостью $\sigma_{12} = \sigma_{12}(\eta_{12})$, были проведены специальные эксперименты на растяжение прямоугольных перекрестно армированных образцов с углами укладки волокон $\alpha = \pm 45^\circ$ по отношению к направлению растяжения x. Образцы изготовлены из шести слоёв углеленты HS 180 REM, осреднённая толщина образцов $h = 1.15$ мм, ширина $b = 23.43$ мм, рабочая часть $l = 100$ мм. Методика такого эксперимента описана, например, в ASTM D3518/3518M-94 [9].

С целью вычисления модуля упругости E_x пакета симметрично уложенных композитных слоёв воспользуемся известной формулой [14]:

$$E_x = D_{11} - D_{12}^2/D_{22}, \tag{21}$$

в которой D_{11}, D_{12}, D_{22} – элементы матрицы жесткости $\mathbf{D}$ пакета слоёв. Матрица $\mathbf{D}$ определяется выражением $_n$

$$\mathbf{D} = \sum_{k=1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{D}_s \mathbf{H}_k h_k/h.$$

Здесь h_k – толщина слоя k; $\mathbf{H}_k$ – матрица, зависящая от углов укладки α_k данного слоя; $\mathbf{D}_s$ – матрица жесткости в осях ортотропии слоя:

$$H_k = \begin{pmatrix} \cos^2\varphi_k & \sin^2\varphi_k & 0.5\sin 2\varphi_k \\ \sin^2\varphi_k & \cos^2\varphi_k & -0.5\sin 2\varphi_k \\ -\sin 2\varphi_k & \sin 2\varphi_k & \cos 2\varphi_k \end{pmatrix},$$

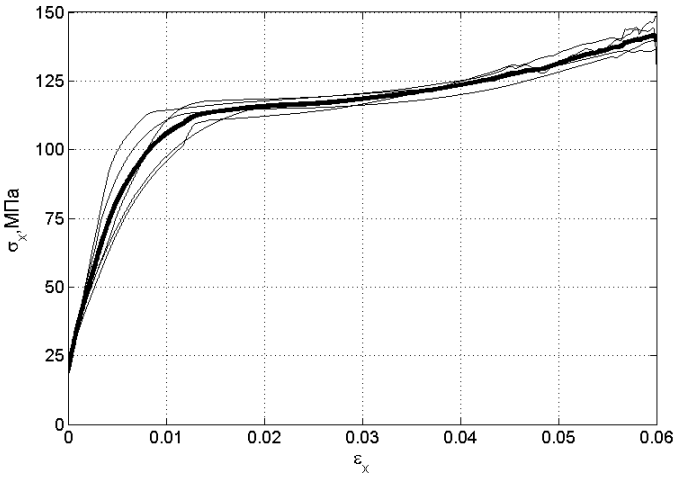

Рис. 3. Диаграммы растяжения тест-образцов $\pm 45^\circ$

$$D_s = \begin{pmatrix} E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & \nu_{21}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{pmatrix}.$$

При углах укладки $\alpha_k = \pm 45^\circ$ элементы D_{11}, D_{12}, D_{22} матрицы $\mathbf{D}$ имеют вид

$$D_{11} = D_{22} = a + G_{12}, \quad D_{12} = a - G_{12}, \tag{22}$$

где

$$a = (E_1 + E_2 + 2\nu_{12}E_2)/4(1-\nu_{12}\nu_{21}). \tag{23}$$

В этом случае выражение (21) для E_x имеет вид

$$E_x = 4aG_{12}/(a + G_{12}). \tag{24}$$

Отсюда следует формула для вычисления модуля сдвига композитного слоя

$$G_{12} = aE_x/(4a - E_x). \tag{25}$$

Модули упругости E_1, E_2 и коэффициент Пуассона ν_{12} предполагаются определёнными из экспериментов на растяжение монослоя в направлениях 0° и 90°, для рассматриваемого композита их значения приведены в [13].

Эксперименты на растяжение проводились на электромеханической универсальной испытательной машине. Полученные в результате эксперимента диаграммы $\sigma_x = f(\eta_x)$ оказались существенно нелинейными и негладкими. Такие машинные диаграммы $\sigma_x = f(\eta_x)$, которые аппроксимированы сглаживающими кубическими сплайнами и осреднены с помощью среднего арифметического значения, представлены на рис. 3. На нём тонкими линиями обозначены диаграммы для каждого из образцов, жирной линией – осреднённая диаграмма. Численным дифференцированием осреднённой диаграммы $\sigma_x = f(\eta_x)$ определён касательный модуль упругости E_x, а также построена зависимость $E_x = E_x(\eta_x)$.

При растяжении с напряжением σ_x в направлении оси x тест-образцов, у которых волокна расположены вдоль осей 1 и 2 под углами $\pm 45^\circ$, деформации ε_x и $\varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x$, замеряемые в процессе нагружения, формируются главным образом

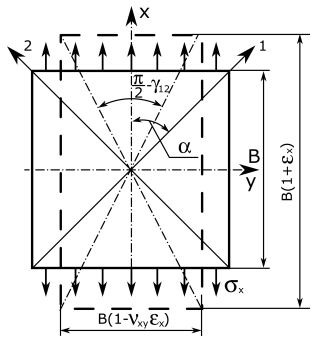

Рис. 4. Геометрическая картина деформации

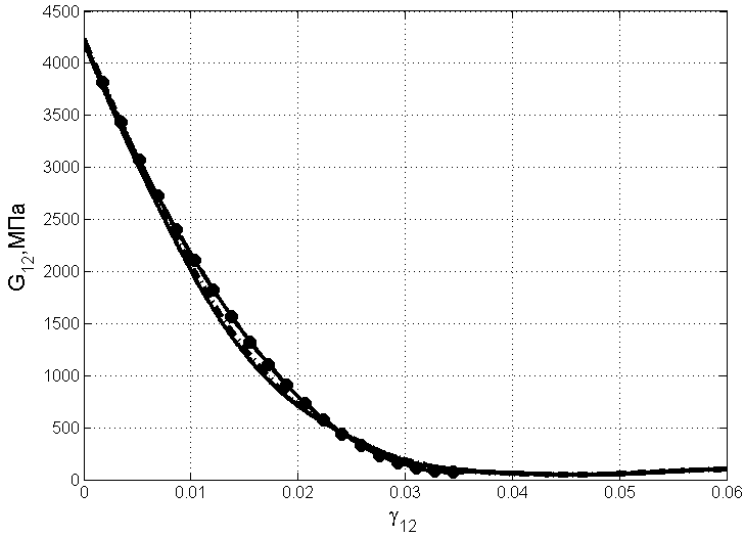

Рис. 5. Диаграмма $G_{12} = G_{12}(\gamma_{12})$ (сплошная линия – зависимость $G_{12} = \partial\tau_{12}/\partial\gamma_{12}$; штрихпунктирная линия – зависимость (25); штрихпунктирная линия с жирной точкой – квадратичная аппроксимация)

за счёт сдвиговой деформации γ_{12}, для определения которой (см. рис. 4) имеет место равенство

$$\frac{1-\nu_{xy}\varepsilon_x}{1+\varepsilon_x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma_{12}}{2}\right). \tag{26}$$

Из (26) при малых γ_{12} с точностью $\cos\dfrac{\gamma_{12}}{2}\approx 1,\ \sin\dfrac{\gamma_{12}}{2}\approx\dfrac{\gamma_{12}}{2}$ следует зависимость между γ_{12} и ε_x следующего вида:

$$\gamma_{12} = \frac{2\,(1+\nu_{xy})\,\varepsilon_x}{2+\varepsilon_x\,(1-\nu_{xy})}, \tag{27}$$

где ν_{xy} – коэффициент Пуассона, зависящий от деформации ε_x. С использованием затем соотношений (25), (27) и экспериментальной зависимости $\nu_{xy} = \nu_{xy}(\varepsilon_x)$ построена диаграмма $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$, изображенная на рис. 5 штрихпунктирной линией.

Видно, что на начальном этапе нагружения при $\eta_{12} = 0$ касательный модуль сдвига $G_{12} = 4200$ МПа. Затем на участке до $\eta_{12} = 0.017$ он резко убывает и достигает практически нулевого значения ($G_{12} = 47$ МПа) при $\eta_{12} = 0.044$. После

этого происходит рост G_{12} почти по линейному закону до значения $G_{12} = 288$ МПа. Далее происходит разрушение образца.

Следует отметить, что диаграмма $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ может быть получена также и непосредственно из диаграммы $\sigma_x = f(\eta_x)$ (рис. 3), если её перестроить в осях σ_{12} и γ_{12}, проведя замену переменных, определённую равенствами $\sigma_{12} = \sigma_x/2$ и (27). Последующее численное дифференцирование функции, задающей такую диаграмму в соответствии с равенством $G_{12} = \partial\sigma_{12}/\partial\eta_{12}$ приводит к плоской диаграмме $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$, график которой изображён на рис. 5 сплошной линией, которая практически совпадает с диаграммой, график которой показан штрихпунктирной линией.

Для модулей поперечных сдвигов G_{13} и G_{12}, определённых в работе [13] согласно с существующим стандартам [7–10], были найдены значения $G_{13} = = 1310$ МПа и $G_{12} = 1120$ МПа, которые находятся в диапазоне $G_{12} = 4100$ МПа и $G_{12} = 47$ МПа. Такое большое различие найденных значений свидетельствует об отмеченной в [13] некорректности методики их определения по существующим стандартам. Более того, полученная диаграмма $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ (рис. 5) косвенно указывает и на слабую связь между микроволокнами, имеющими диаметр $d_{\text{в}} \sim 5 - 8$ мк, в то время как в исходном полуфабрикате (ровинге) средний диаметр пучка волокон составляет величину порядка $d_{\text{п}} \sim 0.1$ мм. Следствием такой слабой связи между микроволокнами, обусловленной слабой возможностью проникания (фильтрации) связующего в пучок волокон в процессе технологического процесса изготовления композита, по-видимому, и является отсутствие даже начального участка диаграммы $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ с постоянным значением $G_{12} \sim 4200$ МПа при малых значениях η_{12}, хотя для отдельно взятого связующего в его затвердевшем состоянии (после полимеризации) при малых значениях сдвиговых деформаций соответствующий модуль сдвига G_c является величиной постоянной.

Введем на диаграмме $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ в рассмотрение точки $(G_0, 0), (G_*, \gamma_*)$ и (G_p, γ_p), имеющие координаты $G_{12} = G_0,\ \eta_{12} = 0,\ G_{12} = G_*,\ \eta_{12} = \gamma_*$ и $G_{12} = = G_p,\ \eta_{12} = \gamma_p$. Значение G_* отвечает найденному в [13] предельному напряжению сжатия образца, численно равному осреднённому модулю поперечного сдвига композита при потере устойчивости образца по чисто сдвиговой форме (по этому значению G_* на диаграмме определяется соответствующее значение сдвиговой деформации $\eta_{12} = \gamma_*$), а значения G_p и γ_p являются экстремальными на диаграмме и соответствуют началу разрушения образца. Таким образом, для аналитического представления функции $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ допустимо использование аппроксимационной формулы

$$G_{12} = G_0 + G^{(1)}\eta_{12} + G^{(2)}\eta_{12}^2, \tag{28}$$

в которой

$$\begin{aligned} G^{(1)} &= \frac{G_*\gamma_p^2 - G_p\gamma_*^2}{\gamma_*\gamma_p\left(\gamma_p - \gamma_*\right)} - \frac{G_0\left(\gamma_* + \gamma_p\right)}{\gamma_*\gamma_p}, \\ G^{(2)} &= \frac{G_*\gamma_p - G_p\gamma_*}{\gamma_*\gamma_p\left(\gamma_* - \gamma_p\right)} + \frac{G_0}{\gamma_*\gamma_p}. \end{aligned} \tag{29}$$

Построенная квадратичная аппроксимация (28) зависимости $G_{12} = G_{12}(\eta_{12})$ также приведена на рис. 5 в виде линии с круглыми маркерами.

Поскольку $G_{12} = \partial\sigma_{12}/\partial\eta_{12}$, в рамках аппроксимации (28) зависимость между касательным напряжением σ_{12} и сдвиговой деформацией γ_{12} будет иметь вид

$$\sigma_{12} = G_0\eta_{12} + \frac{G^{(1)}}{2}\,\eta_{12}^2 + \frac{G^{(2)}}{3}\,\eta_{12}^3. \tag{30}$$

Более упрощенной является аппроксимация диаграммы $G_{12} = G_{12}(\gamma)$ зависимостью

$$G_{12} = \begin{cases} G_0 - \dfrac{(G_0 - G_*)}{\gamma_*}\,\eta_{12} & \text{при } \ 0 \le \eta_{12} \le \gamma_*, \\ G_* & \text{при } \ \eta_{12} \ge \gamma_*, \end{cases} \tag{31}$$

которой соответствует физическая зависимость

$$\sigma_{12} = \begin{cases} G_0\eta_{12} - \dfrac{(G_0 - G_*)}{2\gamma_*}\,\eta_{12}^2 & \text{при } \ 0 \leqslant \eta_{12} \leqslant \gamma_*, \\ G_*\eta_{12} & \text{при } \ \eta_{12} \geqslant \gamma_*. \end{cases} \tag{32}$$

В предположении о справедливости равенств $G_{12} = G_{13}$ из соотношений (3), (5), (32) получим зависимости

$$\begin{gathered} Q_x = B_1(\varepsilon_1 + \nu_{31}\varepsilon_3), \quad T_z = B_3(\varepsilon_3 + \nu_{13}\varepsilon_1), \quad M_y = D_1\text{æ}_1, \\ B_1 = BHE_1^*, \quad B_3 = BHE_3^*, \quad D_1 = \frac{B_1H^2}{2}, \end{gathered} \tag{33}$$

$$Q_z = \begin{cases} HBG_0\left\{\gamma_{13}\left[1 - \dfrac{(1 - G_*/G_0)}{2\gamma_*}\right] + \dfrac{(1 - G_*/G_0)\,H^2}{24\gamma_*}\text{æ}_{13}^2\right\} & \text{при } \gamma_{13} \leqslant \gamma_*, \\ HBG_*\gamma_{13} & \text{при } \gamma_{13} > \gamma_*, \end{cases} \tag{34}$$

$$S_{xz} = \begin{cases} \dfrac{BH^3G_0}{12}\text{æ}_{13}\left[1 - \dfrac{(1 - G_*/G_0)}{\gamma_*}\gamma_{13}\right] & \text{при } \ \gamma_{13} \leqslant \gamma_*, \\ \dfrac{BH^3G_*}{12} & \text{при } \ \gamma_{13} > \gamma_*, \end{cases} \tag{35}$$

причём (34), (35) должны иметь место в силу практически точного выполнения условия $|\gamma_{13}| \gg |z\text{æ}_{13}|$ в задачах рассматриваемого класса.

При использовании зависимости (30) вместо (34) и (35) будут иметь место более точные соотношения вида

$$\begin{aligned} Q_z &= BH\left[G_0\gamma_{13} + \frac{G^{(1)}}{2}\left(\gamma_{13}^2 + \frac{H^2}{12}\text{æ}_{13}^2\right) + \frac{G^{(2)}}{3}\left(\gamma_{13}^3 + \frac{H^2}{4}\gamma_{13}\text{æ}_{13}^2\right)\right], \\ S_{xz} &= \frac{BH^3}{12}\left[G_0\text{æ}_{13} + G^{(1)}\gamma_{13}\text{æ}_{13} + G^{(2)}\text{æ}_{13}\left(\gamma_{13}^2 + \frac{2H^2}{15}\text{æ}_{13}^2\right)\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

3. Линеаризованные уравнения нейтрального равновесия

Предположим, что при некотором значении силы P найдено решение сформулированной задачи (в первом или во втором варианте), то есть найдены функции $u^0,\ w^0,\ \psi^0,\ \varphi^0,\ Q_x^0,\ Q_z^0,\ M_y^0,\ S_{xz}^0$ и T_z^0. Считая, что при таком значении силы P возможна бифуркация решения нелинейной задачи, и принимая для бесконечно малых приращений искомых неизвестных прежние обозначения, составим линеаризованные в окрестности найденного решения уравнения нейтрального равновесия

$$Q_{x,x}^* = 0, \quad Q_{z,x}^* = 0, \quad M_{y,x}^* - N_z^* = 0, \quad S_{xz}^* - T_z^* = 0, \tag{37}$$

где в отличие от (8)

$$\begin{gathered} Q_x^* = Q_x + Q_z^0\psi, \quad Q_{,z}^* = Q_z + Q_z^0\varphi + \varphi^0Q_z + Q_x^0w_{,x} + w_{,x}^0Q_x + M_y^0\varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0M_y, \\ M_y^* = M_y + S_{xz}^0\psi + \psi^0S_{xz}, \end{gathered}$$

$$N_z^* = Q_z + Q_z^0 u_{,x} + u_{,x}^0 Q_z + T_z^0 \psi + \psi^0 T_z + S_{xz}^0 \psi_{,x} + \psi_{,x}^0 S_{xz}, \tag{38}$$
$$S_{xz}^* = S_{xz} + S_{xz}^0 \varphi + \varphi S_{xz} + M_y^0 w_{,x} + w_{,x}^0 M_y,$$
$$T_z^* = T_z + Q_z^0 w_{,x} + w_{,x}^0 Q_z + S_{xz}^0 \varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0 S_{xz},$$

а величины $\varepsilon_1,\ \varepsilon_3,\ æ_1,\ \gamma_{13},\ æ_{13}$, в отличие от (4), определяются по формулам

$$\varepsilon_1 = u_{,x} + w_{,x}^0 w_{,x}, \quad \varepsilon_3 = \varphi + \psi^0 \psi,$$
$$\gamma_{13} = w_{,x} + w_{,x}^0 \varphi + \varphi^0 w_{,x} + \psi + \psi^0 u_{,x} + u_{,x}^0 \psi, \quad æ_1 = \psi_{,x} + w_{,x}^0 \varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0 w_{,x}, \tag{39}$$
$$æ_{13} = \varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0 \varphi + \varphi^0 \varphi_{,x} + +\psi^0 \psi_{,x} + \psi_{,x}^0 \psi.$$

Для составленной системы уравнений (37) в торцевых сечениях образца формулируются однородные граничные условия

$$\begin{aligned} &Q_x^* = 0 \quad \text{при} \quad \delta u \neq 0, \quad Q_z^* = 0 \quad \text{при} \quad \delta w \neq 0, \\ &M_y^* = 0 \quad \text{при} \quad \delta \psi \neq 0, \quad S_{xz}^* = 0 \quad \text{при} \quad \delta \phi \neq 0. \end{aligned} \tag{40}$$

По принятому предположению функции $u^0, w^0, \ldots, T_z^0$, входящие в соотношения (38), (39), найдены путём решения уравнений (15) при сформулированных для них граничных условиях и параметре нагрузки, совпадающем с бифуркационным. Поэтому для входящих в зависимости (38) усилий Q_x, T_z и моментов M_y должны быть использованы линеаризованные физические соотношения

$$\begin{aligned} Q_x &= B_1 \left[u_{,x} + w_{,x}^0 w_{,x} + \nu_{31} \left(\varphi + \psi^0 \psi \right) \right], \\ T_z &= B_3 \left[\varphi + \psi^0 \psi + \nu_{13} \left(u_{,x} + w_{,x}^0 w_{,x} \right) \right], \\ M_y &= D_1 \left(\psi_{,x} + w_{,x}^0 \varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0 w_{,x} \right), \end{aligned} \tag{41}$$

совпадающие по виду с соотношениями (33), а для усилия Q_z и момента S_{xz} – соотношения вида

$$\begin{aligned} Q_z &= HBG_* \left(w_{,x} + \psi + w_{,x}^0 \varphi + \varphi^0 w_{,x} + \psi^0 u_{,x} + u_{,x}^0 \psi \right), \\ S_{xz} &= \frac{BH^3 G_*}{12} \left(\varphi_{,x} + \varphi_{,x}^0 \varphi + \varphi^0 \varphi_{,x} + \psi^0 \psi_{,x} + \psi_{,x}^0 \psi \right). \end{aligned} \tag{42}$$

4. Численное решение сформулированных задач методом конечных сумм

Для матричной записи основных соотношений линеаризованной задачи введём в рассмотрение векторы неизвестных

$$\{U\} = (w, \psi, u, \varphi)^T, \quad U \in \Re^{4,1}, \tag{43}$$
$$\{dU\} = (w', \psi', u', \varphi')^T, \quad dU \in \Re^{4,1}, \tag{44}$$
$$\{T\} = (Q_x, T_z, M_y, Q_z, S_{xz})^T, \quad T \in \Re^{5,1}, \tag{45}$$
$$\{Q\} = \left(Q_x^*, Q_z^*, M_y^*, N_z^*, S_{xz}^*, T_z^*\right)^T, \quad Q \in \Re^{6,1}. \tag{46}$$

Здесь и далее $\Re^{m,n}$ – m,n-мерное линейное пространство всех вещественных матриц размером m, n. Тогда физические соотношения (41) и обобщённые усилия и моменты (38) в матричной форме запишутся в виде

$$\begin{aligned} \{T\} &= \left([A] + \left[A^0\right] \right) \{U\} + \left([B] + \left[B^0\right] \right) \{dU\}, \\ \{Q\} &= \left([E] + \left[E^0\right] \right) \{T\} + \left[T_U^0\right] \{U\} + \left[T_{dU}^0\right] \{dU\}, \end{aligned} \tag{47}$$

где $[A]$, $\left[A^0\right], [B]$, $\left[B^0\right] \in \Re^{5,4}, [E], \left[E^0\right] \in \Re^{6,5}, \left[T_U^0\right], \left[T_{dU}^0\right] \in \Re^{6,5}$ – матрицы с функциональными коэффициентами, равными сомножителям при компонентах векторов $\{U\}$, $\{dU\}$, $\{T\}$, $\{Q\}$ в выражениях (41), (38). Используя (47), линеаризованные уравнения нейтрального равновесия (37) представим в матричном виде

$$\frac{d}{dx}\left([dD]\{Q\}\right) + [D]\{Q\} = \{0\}, \tag{48}$$

где $[dD]$ и $[D] \in \Re^{4,6}$ – матрицы с функциональными коэффициентами, равными сомножителям при компонентах вектора Q в уравнениях (37). После подстановки (43)–(47) в (48) и ряда преобразований равенство (48) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}\left[\left([\bar{\mu}] + p[\bar{\mu}_p] + p^2\left[\bar{\mu}_{p^2}\right]\right)\{U\} + \left([d\bar{\mu}] + p[d\bar{\mu}_p] + p^2\left[d\bar{\mu}_{p^2}\right]\right)\{dU\}\right] + \\ &+\left[\left([\eta] + p[\eta_p] + p^2\left[\eta_{p^2}\right]\right)\{U\} + \left([d\eta] + p[d\eta_p] + p^2\left[d\eta_{p^2}\right]\right)\{dU\}\right] = \{0\}, \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\begin{aligned} &[\bar{\mu}] = -[\mu], \quad [\bar{\mu}_p] = -[\mu_p], \\ &[d\bar{\mu}] = -[d\mu], \quad [d\bar{\mu}_p] = -[d\mu_p], \quad \left[\bar{\mu}_{p^2}\right] = -\left[\mu_{p^2}\right], \\ &\left[d\bar{\mu}_{p^2}\right] = -\left[d\mu_{p^2}\right], \quad [\mu] = [dD][E][A], \\ &[\mu_p] = [dD]\left([E]\left[A^0\right] + \delta\left[E^0\right][A] + \left[T_U^0\right]\right), \quad \left[\mu_{p^2}\right] = [dD]\left[E^0\right]\left[A^0\right], \\ &[d\mu] = [dD][E][B], \\ &[d\mu_p] = [dD]\left([E]\left[B^0\right] + \left[E^0\right][B] + \left[T_{dU}^0\right]\right), \quad \left[d\mu_{p^2}\right] = [dD]\left[E^0\right]\left[B^0\right], \\ &[\eta] = [D][E][A], \quad [\eta_p] = [D]\left([E]\left[A^0\right] + \left[E^0\right][A] + \left[T_U^0\right]\right), \\ &\left[\eta_{p^2}\right] = [D]\left[E^0\right]\left[A^0\right], \quad [d\eta] = [D][E][B], \\ &[d\eta_p] = [D]\left([E]\left[B^0\right] + \left[E^0\right][B] + \left[T_{dU}^0\right]\right). \end{aligned} \tag{50}$$

Проинтегрируем (49) по $x \in [x, L_K]$, сводя его к равенству

$$\begin{aligned} &\{C\} + \left[\left([\bar{\mu}] + p[\bar{\mu}_p] + p^2\left[\bar{\mu}_{p^2}\right]\right)\{U\} + \left([d\bar{\mu}] + p[d\bar{\mu}_p] + p^2\left[d\bar{\mu}_{p^2}\right]\right)\{dU\}\right] + \\ &+\int_x^{L_к}\left[\left([\eta] + p[\eta_p] + p^2\left[\eta_{p^2}\right]\right)\{U\} + \left([d\eta] + p[d\eta_p] + p^2\left[d\eta_{p^2}\right]\right)\{dU\}\right]dx = \{0\}, \end{aligned} \tag{51}$$

где вектор $\{C\} = (c_i,\ i \in \{1,2,3,4\})$, $\{C\} \in \Re^{4,1}$, есть вектор неизвестных статических констант интегрирования. Этот вектор определяется соотношением

$$\{C\} = \left[\left([\mu] + p[\mu_p] + p^2\left[\mu_{p^2}\right]\right)\{U\} + \left([d\mu] + p[d\mu_p] + p^2\left[d\bar{\mu}_{p^2}\right]\right)\{dU\}\right]\Big|_{x=L_K}. \tag{52}$$

В матричном уравнении (51) выполним замену по правилу

$$\{U\} = \int_0^x \{dU\}\,dx + \{k\}, \tag{53}$$

где $\{k\} = (k_i = U_i|_{x=0},\ i = \{1,2,3,4\})$, $\{k\} \in \Re^{4,1}$ – вектор с компонентами, равными неизвестным кинематическим константам интегрирования. С учётом (53) уравнение (51) перепишется в виде

$$\{C\} + \left[\left([\bar{\mu}] + p\,[\bar{\mu}_p] + p^2\,[\bar{\mu}_{p^2}]\right)\left(\int_0^x \{dU\}\,dx + \{k\}\right) + \right.$$
$$\left. + \left([d\bar{\mu}] + p\,[d\bar{\mu}_p] + p^2\,[d\bar{\mu}_{p^2}]\right)\{dU\}\right] +$$
$$+ \int_x^{L_к}\left[\left([\eta] + p\,[\eta_p] + p^2\,[\eta_{p^2}]\right)\left(\int_0^x \{dU\}\,dx + \{k\}\right) + \right.$$
$$\left. + \left([d\eta] + p\,[d\eta_p] + p^2\,[d\eta_{p^2}]\right)\{dU\}\right]dx = \{0\}. \tag{54}$$

Для матричного представления граничных условий введём в рассмотрение вектор $\{R\} = (r_i,\ i \in \{1,2,3,4\})$, $\{R\} \in \Re^{4,1}$, по формуле

$$\{R\} = \left[[\mu]\{U\} + [d\mu]\{dU\} + p\left([\mu_p]\{U\} + [d\mu_p]\{dU\}\right) + \right.$$
$$\left. + p^2\left(\left[\mu_{p^2}\right]\{U\} + \left[d\mu_{p^2}\right]\{dU\}\right)\right]. \tag{55}$$

Обозначим матрицы, у которых отличными от нуля могут быть только диагональные компоненты $l_{ii}^0,\ l_{ii}^{L_K},\ i \in \{1,2,3,4\}$ через $l_0,\ l_K$. Значения диагональных элементов этих матриц определяются видом граничных условий: если перемещение или угол поворота на торце $x = 0$ или $x = L_K$ зафиксированы, то значение соответствующего элемента $l_{ii}^0,\ l_{ii}^{L_K},\ i \in \{1,2,3,4\}$ равно нулю, в противном случае оно равно единице. Единичную матрицу обозначим через $[E] \in \Re^{4,4}$. С учётом введённых обозначений граничные условия можно представить в комбинированной матричной форме

$$\begin{aligned} &([E] - [l_0])\{k\} + [l_0]\{R\}|_{x=0} = 0, \\ &([E] - [l_K])\{U\}|_{x=L_K} + [l_K]\{C\} = 0, \end{aligned} \tag{56}$$

где учено, что $\{U\}|_{x=0} = \{k\}$, $\{R\}|_{x=L_K} = \{C\}$, $\{U\}|_{x=L_K} = \int_0^{L_K}\{dU\}dx + \{k\}$.

Численное решение уравнений (54), (56) методом механических квадратур требует замены входящих в них интегральных операторов конечномерными с использованием тех или иных квадратурных формул относительно дискретных узловых значений искомых неизвестных. Такой метод в литературе получил название метода интегрирующих матриц. Один из его вариантов предложен в [15]. В соответствии с этим методом на отрезке $[0,\ L_к]$ построим сетку $\omega = \{x_1 = 0 < x_2 < x_3 \cdots < x_{n-1} < x_n = L_K\}$ и введём в рассмотрение множество $A = \{1,2,\ldots,4n\}$, необходимое для нумерации компонент соответствующих матриц. В качестве неизвестных дискретизированной задачи будем рассматривать вектор $\{dU_n\},\ \{dU_n\} \in A$, состоящий из искомых неизвестных в узлах сетки. Тогда столбец компонент вектора перемещений и углов поворота, производные которых образуют вектор неизвестных, обозначим как $\{U_n\},\ \{U_n\} \in A$.

Введём матричные аналоги интегральных операторов

$$[I_n] = (j_{jk},\, j,\, k \in A), \quad [I_n^*] = (j_{jk}^*, j,\, k \in A), \quad [I_n]\,,\ [I_n^*] \in \Re^{A,A}. \tag{57}$$

Эти матрицы являются блочно-диагональными матрицами, им соответствуют интегрирующие матрицы $[I]\,, [I^*] \in \Re^{n,n}$ в качестве блоков. Интегрирующие матрицы являются аналогами интегральных операторов

$$\int\limits_0^x (\cdots)\, dx \Rightarrow [I]\,, \quad \int\limits_x^{L_K} (\cdots)\ dx = [I^*]. \tag{58}$$

С учётом введённых величин зависимость (53) примет вид

$$\{U_n\} = [I_n]\,\{dU_n\} + [E_n]\,\{k\}\,, \tag{59}$$

где $[E_n] \in \Re^{A,4}$ – четырехблочно-диагональная матрица с ненулевыми единичными столбцами в качестве блоков. Систему уравнений нейтрального равновесия (37), матричная форма которой определяется равенством (54), после замены соответствующих интегральных операторов их матричными аналогами, некоторых преобразований и приведения подобных слагаемых запишем в дискретном матричном виде

$$\big[[Z]\,\{dU\} + [Y]\,\{k\} + [E_n]\,\{C\}\big] + p\big[[Z_p]\,\{dU\} + [Y_p]\,\{k\}\big] + \\ + p^2\big[\big[Z_{p^2}\big]\,\{dU\} + \big[Y_{p^2}\big]\,\{k\}\big] = \{0\}\,, \tag{60}$$

где

$$\begin{aligned}
&[Z] = [\bar\mu]\,[I_n] + [d\bar\mu] + [I_n^*]\,[\eta]\,[I_n] + [I_n^*]\,[d\eta]\,,\\
&[Y] = [\bar\mu]\,[E_n] + [I_n^*]\,[\eta]\,[E_n]\,,\\
&[Z_p] = [\bar\mu_p]\,[I_n] + [d\bar\mu_p] + [I_n^*]\,[\eta_p]\,[I_n] + [I_n^*]\,[d\eta_p]\,,\\
&[Y_p] = [\bar\mu_p]\,[E_n] + [I_n^*]\,[\eta_p]\,[E_n]\,,\\
&\big[Z_{p^2}\big] = \big[\bar\mu_{p^2}\big]\,[I_n] + \big[d\bar\mu_{p^2}\big] + [I_n^*]\,\big[\eta_{p^2}\big]\,[I_n] + [I_n^*]\,\big[d\eta_{p^2}\big]\,,\\
&\big[Y_{p^2}\big] = \big[\bar\mu_{p^2}\big]\,[E_n] + [I_n^*]\,\big[\eta_{p^2}\big]\,[E_n]\,.
\end{aligned} \tag{61}$$

Для дискретизации граничных условий введём в рассмотрение матрицы $[E_{1n}] \in \Re^{4,A}$ с ненулевыми элементами $e_{11}^{1n} = e_{n+1}^{1n} = \cdots = e_{3n+1}^{1n} = 1$, четырехблочно-диагональную матрицу $[I_{1n}] \in \Re^{4,A}$, у которой компонентами блоков-строк являются коэффициенты квадратуры Гаусса на $[0,\ L_K]$. Тогда граничные условия (56) в дискретной матричной форме определяются соотношениями

$$\big[[R]\,\{k\} + [L]\,\{dU\}\big] + p\big[[R_p]\,\{k\} + [L_p]\,\{dU\}\big] + \\ + p^2\big[\big[R_{p^2}\big]\,\{k\} + \big[L_{p^2}\big]\,\{dU\}\big] = \{0\} \quad \text{при} \ \ x = 0; \tag{62}$$

$$\big[[M]\,\{dU\} + [N]\,\{k\} + [S]\,\{C\}\big] = \{0\} \quad \text{при} \ \ x = L_K,$$

где

$$\begin{aligned}
&[R] = [E] - [l_0] + [l_0]\,[\mu_0]\,, [L] = [l_0]\,[d\mu_0]\,[E_{1n}]\,,\\
&[R_p] = [l_0]\,[\mu_{0p}]\,, [L_p] = [l_0]\,[d\mu_{0p}]\,[E_{1n}]\,,\\
&\big[R_{p^2}\big] = [l_0]\,\big[\mu_{0p^2}\big]\,, \big[L_{p^2}\big] = [l_0]\,\big[d\mu_{0p^2}\big]\,[E_{1n}]\,,\\
&[M] = ([E] - [l_{\text{к}}])\,[I_{1n}]\,, [N] = [E] - [l_{\text{к}}]\,, [S] = [l_{\text{к}}]\,.
\end{aligned} \tag{63}$$

В (63) компоненты матриц $[\mu_0]$, $[d\mu_0]$, $[\mu_{0p}]$, $[d\mu_{0p}]$, $\left[\mu_{0p^2}\right]$, $\left[d\mu_{0p^2}\right] \in \Re^{4,4}$ равны значениям функциональных коэффициентов представления (49) в узле $x = 0$.

Объединив (60) и (62) в одну матричную систему, получим

$$\left([A] + p\,[B] + p^2\,[C]\right)\{X\} = \{0\}\,, \tag{64}$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} Z & Y & E_n \\ L & R & 0 \\ M & N & S \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} Z_p & Y_p & 0 \\ L_p & R_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} Z_{p^2} & Y_{p^2} & 0 \\ L_{p^2} & R_{p^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \{X\} = \begin{bmatrix} dU \\ k \\ C \end{bmatrix}.$$

Если в соотношениях (38), (41) отбросить деформационные параметрические слагаемые, то матричная система (64) примет вид

$$([A] + p\,[B])\{X\} = \{0\}\,. \tag{65}$$

Решение матричной системы (64) находится итерационным способом:

$$([\mathbf{A}] + p_{(k)}\left[\,[\mathbf{B}] + p_{(k-1)}\,[\mathbf{C}]\,\right])\{\mathbf{X}\} = \{0\}\,, \tag{66}$$

где k – номер итерации. В первом приближении $(k = 1)$ матричная система (64) примет вид

$$([\mathbf{A}] + p_{(1)}\,[\mathbf{B}])\{\mathbf{X}\} = \{0\}\,, \tag{67}$$

и её найденное собственное значение $p_{(1)}$ подставляется в (66). Итерации выполняются до тех пор, пока погрешность $\triangle = |(p_{(k)} - p_{(k-1)})/p_{(k)}|$ не станет меньше заданной точности.

5. Численное исследование возможных ФПУ тест-образцов при трёхточечном изгибе

Программная реализация в среде MatLab разработанного численного метода решения сформулированной задачи позволила исследовать устойчивость равновесия тест-образцов в условиях как осевого сжатия напряжением $\sigma_{11} = -p$, так и трёхточечного изгиба усилием P. При этом решение задачи о начальном (докритическом) НДС образца ищется в линейной постановке, предполагающей выполнение равенства $G_{13} = G_{12} = G_*$ в процессе нагружения образца вплоть до его разрушения из-за потери устойчивости.

При осевом сжатии образца проведено исследование устойчивости его равновесия для двух вариантов формулировки граничных условий в сечениях $x = 0$ и $x = L$ – шарнирного опирания, предполагающего выполнение условия $M_y^0 = 0$, и защемления, предполагающего отсутствие поворотов торцевых сечений в процессе нагружения (то есть при $\psi = 0$). Расчёты выполнены для тест-образцов, имеющих, как и при проведении натурных экспериментов, квадратное поперечное сечение ($B = H = 9$ мм) при варьировании длины образца L в пределах 15 до 100 мм. Для этих тест-образцов, выполненных из однонаправленного волокнистого композита с использованием углеленты HS 180 REM в соответствии с полученными экспериментальными данными и описанными в статье [13], приняты следующие значения упругих характеристик: $E_1 = 131000$ МПа, $E_1 = E_2 = 5900$ МПа, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.29$, $G_{12} = G_{13} = 459$ МПа. При этом, как было установлено в работе [13], значение $G_{13} = 459$ МПа равно критическому напряжению осевого сжатия –

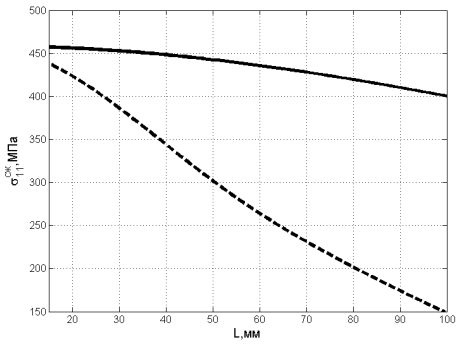

Рис. 6. Зависимости критической сжимающей нагрузки от длины тест-образца для жёсткого защемления (сплошная линия) и шарнирного опирания (штриховая линия)

$\sigma_{11}^0 = \sigma_{11}^* = 459$ МПа, при достижении которого происходит разрушение образца по чисто сдвиговой форме.

На рис. 6 представлены полученные теоретические зависимости σ_{11}^* от длины образца L для отмеченных выше двух вариантов формулировки граничных условий в сечениях $x = 0$ и $x = L$. Как и следовало ожидать, в случае шарнирного опирания торцевых сечений критическое напряжение меньше критического напряжения, соответствующего условиям $\psi(0) = 0,\ \psi(L) = 0$. Важно отметить, что при малых значениях L в обоих случаях форма потери устойчивости близка к чисто сдвиговой ($\psi \neq 0,\ u \approx w \approx \varphi \approx 0$), а по мере увеличения L она переходит к изгибно-сдвиговой форме. Найденное в случае защемления торцевых сечений теоретическое значение $\sigma_{11}^* \approx G_{13} \approx 459$ МПа практически точно совпадает с экспериментальным значением.

При проведении численного моделирования испытания тест-образцов на трёхточечный изгиб их длина L, как и при проведении физических экспериментов, принята равной 170 мм для длинных образцов и 50 мм для коротких. Высота H и ширина B поперечного сечения образцов, как и при сжатии, приняты равными 9 мм. В сечении $x = 0$ приняты граничные условия шарнирного опирания (16), дополненные условиями (11), а в сечении $x = L/2$ – граничные условия симметрии вида (19).

При действии в сечении $x = L/2$ сосредоточенной нагрузки $Q_z^* = -P/2$ в тест-образце формируется докритическое НДС, характеризующееся основными не нулевыми параметрами $w^0,\ \psi^0,\ M_y^0,\ Q_z^0$, практически полностью совпадающими с решениями, соответствующими классической и уточненной теориям изгиба балок. Установлено, что при формировании такого докритического НДС в тест-образцах (как длинных, так и коротких) реализуется неклассическая чисто сдвиговая ФПУ, характеризующаяся ненулевым значением функции угла поворота поперечного сечения ($\psi \neq 0,\ w = 0,\ u = 0,\ \varphi = 0$). С целью иллюстрации на рис. 7 приведён график функции ψ для длинных образцов. Видно, что она постоянна на всей длине образца за исключением зоны краевого эффекта, распространяющегося на участке 82 мм $\leqslant x \leqslant L/2$. Следует отметить, что используемый численный метод позволяет весьма точно описать решения полученного вида, имеющие большие градиенты изменения на весьма коротких участках. Так, например, для описания функции ψ на указанном интервале производится значительное сгущение сетки: интервал 0 мм $\leqslant x \leqslant$ 82 мм разбит на 80 сечений, в то время как интервал 82 мм $\leqslant x \leqslant L/2$ – на 90 сечений. Остальные функции в возмущённом состоянии не приводятся, так как имеют нулевое значение, не приводится также график функции для коротких образцов, имеющий такой же вид, что и на рис. 7.

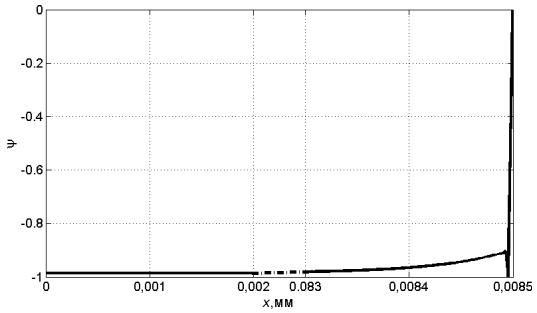

Рис. 7. Сдвиговая форма потери устойчивости тест-образца

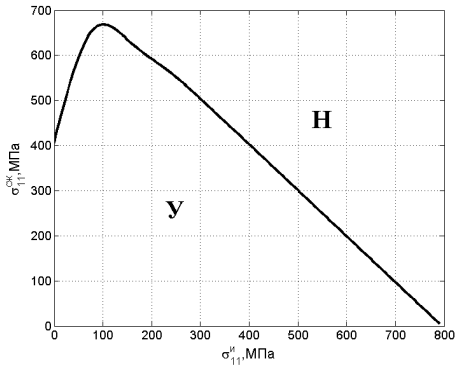

Рис. 8. Предельная поверхность при сжатии с изгибом

Критическая нагрузка $P^*_{\text{д}}$, соответствующая реализации сдвиговой ФПУ длинных образцов и найденная с помощью решения задачи при условиях симметрии (19) в сечении $x = L/2$ и условиях (16), (11) в сечении $x = 0$, оказалась равной $P^*_{\text{д}} = 2172\ \ H$. При такой нагрузке в точках граничной плоскости $z = H/2$ формируются сжимающие напряжения, изменяющиеся вдоль оси x по линейному закону от нуля в сечении $x = 0$ до $\sigma_{11}^{*(\text{д})} = 795$ МПа в сечении $x = L/2$, а критические значения касательных напряжений $\sigma_{13}^{*(\text{д})}$ постоянны по координате x и равны $\sigma_{13}^{*(\text{д})} = 14$ МПа. Для коротких образцов критическая нагрузка оказалась равной $P^*_{\text{к}} = 7287\ \ H$, а указанные выше сжимающие нормальные и касательные напряжения соответственно равны $\sigma_{11}^{*(\text{к})} = 796$ МПа и $\sigma_{13}^{*(\text{к})} = 48$ МПа.

Таким образом, исходя из анализа полученных результатов, следует сформулировать вывод о том, что в рамках принятой степени точности сформулированной задачи потеря устойчивости образца при его трёхточечном изгибе почти по чисто сдвиговой форме происходит при достижении практически одного и того же максимального критического значения напряжения σ^*_{11}, не зависящего от длины образца L.

На рис. 8 представлены результаты решения задачи о потере устойчивости образца с шарнирно опертыми краями $x = 0$, $x = L$ при одновременном осевом сжатии напряжением $\sigma^0_{11} = -\sigma^{\text{сж}}_{11}$ и изгибающей нагрузкой P, формирующей в сечении $x = L/2$ максимальное напряжение сжатия $\sigma_{11}^{*(\text{и})}$.

На рис. 8 значение $\sigma_{11}^{*(\text{и})} = 795$ МПа является критическим, соответствующим потере устойчивости образца при его поперечном изгибе, а напряжение $\sigma^{\text{сж}}_{11} \approx 406$ МПа – критическим напряжением, соответствующим чистому осевому

сжатию (для образца с $L = 50$ мм). Приведенная на рис. 8 кривая является границей, разделяющей области устойчивых состояний равновесия (область У) и неустойчивых состояний (область Н).

Важно отметить, что при рассмотренном комбинированном виде нагружения образца в интервале 125 МПа $\leqslant \sigma_{11}^{*(\text{и})} \leqslant$ 795 МПа суммарное напряжение $\sigma_{11}^{\Sigma} = \sigma_{11}^{\text{сж}} + \sigma_{11}^{\text{и}} \approx 800$ МПа остается неизменным и его следует считать критическим напряжением, при достижении которого происходит разрушение образца по причине потери устойчивости структуры композита почти по сдвиговой форме.

Решения рассматриваемой задачи устойчивости при трёхточечном изгибе образца получены также в случае действия на участке $c = 2$ мм распределённой нагрузки (10) при удовлетворении граничным условиям (13). Результаты решения задачи в такой постановке практически не отличаются от результатов, описанных выше: минимальной критической нагрузке $P_{\text{д}}^{*} = 2145\ H$ для длинных образцов соответствует также почти чистая сдвиговая ФПУ, а для коротких образцов при реализации той же ФПУ критическая нагрузка равна $P_{\text{к}}^{*} = 7368\ H$.

6. Результаты испытаний тест-образцов на трёхточечный изгиб и их анализ

Для проведения испытаний на трёхточечный изгиб были изготовлены тест-образцы из углеленты HS 180 REM, размеры поперечного сечения которых, как и при проведении численных экспериментов, в среднем были равны $H = B = 9$. Длинные и короткие образцы были изготовлены соответственно длиной 60 и 200 мм.

Испытания проводились на электромеханической универсальной испытательной машине. Применялось стандартное приспособление для проведения испытаний на трёхточечный изгиб, конструкция которого позволяет регулировать расстояние L между опорными роликами: оно устанавливалось $L = 170$ мм для длинных образцов и $L = 50$ мм для коротких. Схема такого приспособления так же, как и методика испытаний, приведены в существующих стандартах испытаний на трёхточечный изгиб (например, в ASTM D790-03 2005 [10], ГОСТ 32659-2014 [12], РД 50-675-88 [8], ОСТ 1 90199-75 [7], ASTM 2344/D2344M-00 2005 [11]). В приспособлении были установлены опорные и нагружающий ролики диаметром 10 мм. Изгибающая нагрузка к образцу прикладывалась посредством перемещения траверсы машины с постоянной скоростью 2 мм/мин (кинематическое нагружение), при этом одновременно происходила запись данных с канала датчика нагрузки и положения траверсы машины.

Структура тест-образцов является многослойной: монослои углеленты расположены в плоскости xOy (см. рис. 1). Поэтому на трёхточечный изгиб были испытаны образцы в двух плоскостях – xOz и xOy. На рис. 9 и 10 приведены диаграммы «изгибающая нагрузка – прогиб» для длинных образцов, изгибающая нагрузка для которых прикладывалась соответственно в плоскостях xOz (1–3) и xOy (1–2).

Видно, что на диаграммах испытаний в обеих плоскостях имеются характерные линейные участки, заканчивающиеся локальными максимальными значениями $P_{\text{д}}^{*}$, после прохождения которых наблюдается падение величины изгибающей нагрузки. На нелинейных участках диаграмм происходит увеличение нагрузки до максимальных величин $P_{\text{д}}^{**}$, при достижении которых происходит разрушение образца расслоением по сечениям $z = 0$, начинающимся с торцевых сечений. Точки, соответствующие обеим нагрузкам, отмечены на диаграммах маркерами. В приведённых ниже таблицах приняты следующие обозначения: $w_{\text{д}}^{**}$ – прогиб, соответствующий максимальной нагрузке в сечении $L/2$; $\sigma_{11(\text{д})}^{*}, \sigma_{11(\text{д})}^{**}$ – максимальные нормальные напряжения сжатия в сечении $L/2$ соответственно при нагрузках $P_{\text{д}}^{*}$ и $P_{\text{д}}^{**}$, вычисленные по формуле классической теории поперечного изгиба балок;

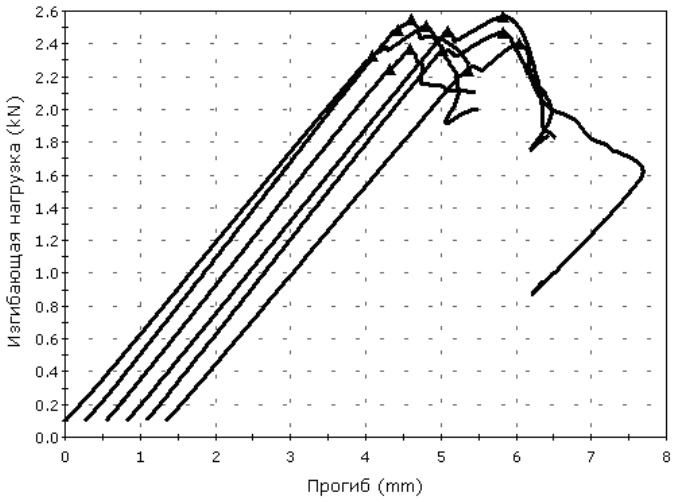

Рис. 9. Диаграммы изгиба длинных тест-образцов в плоскости xOy

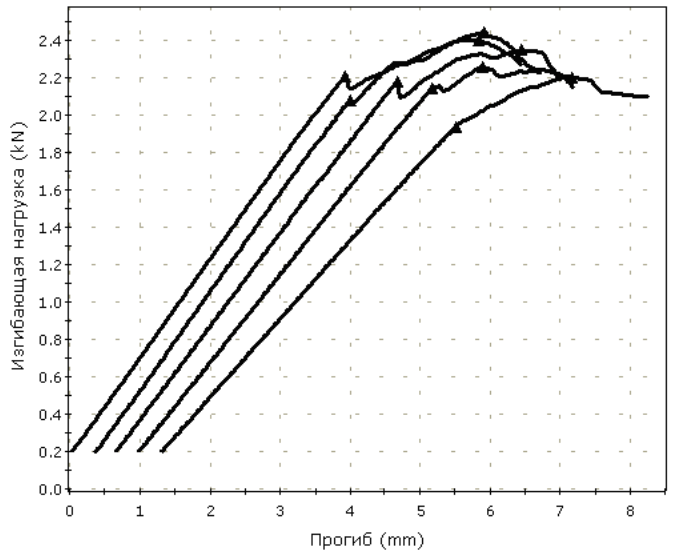

Рис. 10. Диаграммы изгиба длинных тест-образцов в плоскости xOz

$\sigma^{*}_{13(\text{д})}$, $\sigma^{**}_{13(\text{д})}$, $\sigma^{*}_{12(\text{д})}$, $\sigma^{**}_{12(\text{д})}$ – касательные напряжения в сечении $L/2$ соответственно при нагрузках $P^{*}_{\text{д}}$ и $P^{**}_{\text{д}}$, вычисленные по формуле Журавского.

Из анализа результатов, приведённых в табл. 1 и 2, видно, что критические нагрузки $P^{*}_{\text{д}}$, $P^{**}_{\text{д}}$, полученные при испытании длинных образцов в двух разных плоскостях, а также соответствующие им нормальные и касательные напряжения отличаются друг от друга не более чем на 6–10%. Сравнивая же экспериментальные результаты с результатами численного моделирования ($P^{*}_{\text{д}} = 2172$ Н, $\sigma^{*}_{11(\text{д})} = 795$ МПа, $\sigma^{*}_{13(\text{д})} = 14$ МПа), можно убедиться в том, что они отличаются друг от друга не более чем на 3%. Следует отметить, что из двух полученных экспериментальных значений $P^{*}_{\text{д}}$ и $P^{**}_{\text{д}}$ критической следует считать нагрузку $P^{*}_{\text{д}}$, так как при достижении этого значения, по-видимому, и происходит потеря устойчивости тест-образца по сдвиговой форме, а последующее увеличение изгибающего

Табл. 1

Результаты экспериментов на изгиб длинных тест-образцов в плоскости xOz

№	$P^{*}_{\text{д}}$, кН	$P^{**}_{\text{д}}$, кН	$w^{**}_{\text{д}}$, мм	$\sigma^{*}_{11(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{**}_{11(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{*}_{13(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{**}_{13(\text{д})}$, МПа
1	2.328	2.507	4.805	770.66	830.04	20.65	22.24
2	2.489	2.550	4.349	807.31	827.17	21.68	22.21
3	2.247	2.370	4.060	747.47	788.61	19.85	20.94
4	2.477	2.568	5.027	827.52	857.68	22.05	22.86
5	2.358	2.471	4.762	787.59	825.50	20.99	21.99
6	2.239	2.401	4.699	761.79	816.98	20.24	21.70
Среднее	2.356	2.478	4.417	783.72	824.33	20.91	21.99

Табл. 2

Результаты экспериментов на изгиб длинных тест-образцов в плоскости xOy

№	$P^{*}_{\text{д}}$, кН	$P^{**}_{\text{д}}$, кН	$w^{**}_{\text{д}}$, мм	$\sigma^{*}_{11(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{**}_{11(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{*}_{12(\text{д})}$, МПа	$\sigma^{**}_{12(\text{д})}$, МПа
1	2.203	2.401	5.844	739.83	806.29	20.00	21.80
2	2.078	2.440	5.591	679.95	798.21	18.56	21.79
3	2.177	2.345	5.809	723.89	779.98	19.61	21.12
4	2.145	2.258	4.934	749.60	788.80	19.88	20.93
5	1.938	2.200	5.886	732.96	832.05	18.63	21.15
Среднее	2.108	2.329	5.613	725.25	801.07	19.34	21.36

Табл. 3

Результаты экспериментов на изгиб коротких тест-образцов в плоскости xOz

№	$P^{*}_{\text{к}}$, кН	$P^{**}_{\text{к}}$, кН	$w^{**}_{\text{к}}$, мм	$\sigma^{*}_{11(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{**}_{11(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{*}_{13(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{**}_{13(\text{к})}$, МПа
1	3.374	7.040	0.092	338.40	706.13	30.63	63.90
2	3.334	7.281	1.496	324.12	707.89	29.27	63.93
3	3.174	6.793	1.406	327.64	701.20	29.59	63.32
4	3.604	7.228	1.542	361.97	725.84	32.57	65.33
5	3.447	7.301	1.441	345.80	732.34	31.19	66.06
6	3.345	7.303	1.582	338.11	738.16	30.67	66.95
Среднее	3.380	7.158	1.260	339.34	718.59	30.65	64.91

усилия связано же с нелинейным процессом окончательного разрушения образца. Критическое значение касательного напряжения $\sigma^{*}_{13(\text{д})} = 14$ МПа, найденное в результате численного моделирования трёхточечного изгиба, является осреднённым по высоте образца касательным напряжением. При аппроксимации закона распределения σ_{13} по z квадратичной параболой найденное осреднённое значение следует умножить на 1.5. Определяемое таким образом значение касательных напряжений практически совпадает с экспериментальным значением $\sigma^{*}_{13(\text{д})} = 20.91$ МПа.

Проанализируем далее результаты испытаний на трёхточечный изгиб коротких тест-образцов ($L = 50$ мм). Диаграммы их нагружения в плоскостях xOz и xOy приведены на рис. 11 и 12. Они, в отличие от диаграмм нагружения для длинных образцов, характеризуются отсутствием локальной максимальной нагрузки и наличием лишь коротких участков линейной зависимости между и замеряемым прогибом.

Результаты проведенных испытаний коротких образцов сведены в табл. 3 и 4, в которых величины с верхним индексом «*» соответствуют окончанию линейных участков на диаграммах нагружения.

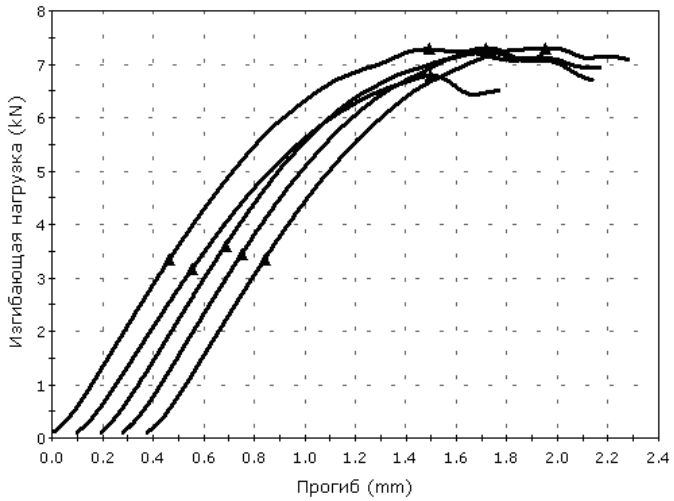

Рис. 11. Диаграммы изгиба коротких тест-образцов в плоскости xOy

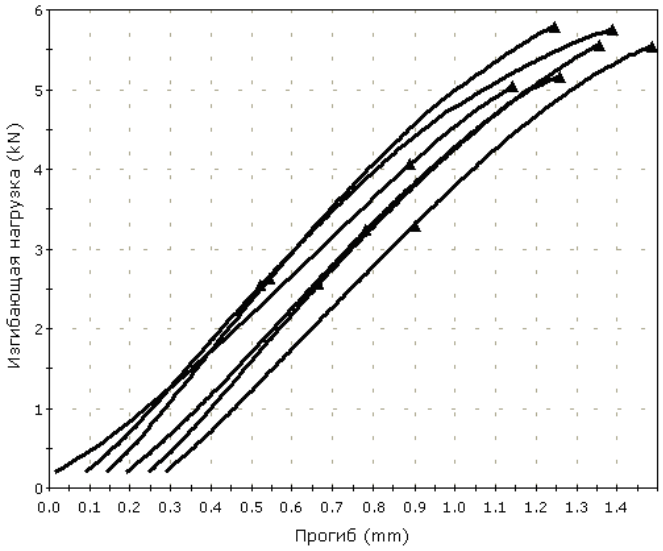

Рис. 12. Диаграммы изгиба коротких тест-образцов в плоскости xOz

Проведенный анализ полученных результатов показывает, что критическая нагрузка, найденная при численном моделировании ($P^*_{\text{к}} = 7287$ Н, $\sigma^*_{11(\text{к})} = 796$ МПа, $\sigma^*_{13(\text{к})} = 48$ МПа), совпадает с нагрузкой $P^{**}_{\text{к}}$, найденной путём испытаний в плоскости xOz, с точностью 2%. Соответствующие им значения нормальных и касательных напряжений также характеризуются хорошим совпадением со значениями, найденными численным методом на основе предложенной теоретической модели.

Отметим, что все приведенные выше результаты численного моделирования были получены при сохранении в линеаризованных уравнениях возмущенного равновесия всех введенных в рассмотрение параметрических слагаемых. Однако не все они одинаково влияют на реализующуюся ФПУ образца при изгибе. В частности, в этих уравнениях без потери точности и содержательности могут быть

Табл. 4

Результаты экспериментов на изгиб коротких тест-образцов в плоскости xOy

№	$P^{*}_{\text{к}}$, кН	$P^{**}_{\text{к}}$, кН	$w^{**}_{\text{к}}$, мм	$\sigma^{*}_{11(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{**}_{11(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{*}_{12(\text{к})}$, МПа	$\sigma^{**}_{12(\text{к})}$, МПа
1	4.059	5.040	1.143	566.73	703.82	43.47	53.98
2	2.545	5.757	1.332	306.88	694.12	25.47	57.61
3	2.634	5.785	1.132	285.68	627.45	25.06	55.03
4	3.235	5.159	1.089	383.81	611.99	32.24	51.41
5	2.558	5.562	1.130	267.34	581.27	23.79	51.73
6	3.297	5.545	1.206	348.89	586.70	30.84	51.87
Среднее	3.055	5.475	1.172	359.89	634.22	30.14	53.61

Табл. 5

Значения критического усилия P^{*}

	$Q^0_x = 0$	$Q^0_z = 0$	$M^0_y = 0$	$S^0_{xz} = 0$
$P^{*}_{\text{д}}$, Н	2141.76	2141.48	17584.51	2141.77
$P^{*}_{\text{к}}$, Н	7287.22	7284.03	236044.70	7287.22

отброшены «деформационные» параметрические слагаемые, имеющие сомножители w^0, u^0, ψ^0, ϕ^0. Из «силовых» факторов главными параметрическими в уравнениях являются слагаемые, содержащие сомножитель M^0_y. Данный вывод следует из приведённых в табл. 5 значений критического усилия P^{*}, которые получены при отбрасывании в уравнениях соответствующих слагаемых.

Видно, что на P^{*} докритические силовые факторы Q^0_x, Q^0_z, S^0_{xz} оказывают абсолютно несущественное влияние, а их удержание и отбрасывание M^0_y в уравнениях приводит к многократному увеличению критических значений P^{*}.

7. Дополнительные замечания и выводы

Известно, что для стержней, относящихся к классу тонких, учет поперечного сдвига в задачах изгиба приводит к незначительному уточнению зависимости между изгибающей нагрузкой и прогибом. Такие экспериментальные зависимости (см. рис. 9, 10), полученные для длинных образцов с параметром $H_0 = B_0 = B/L \sim$ $\sim 1/15$, оказались линейными вплоть до нагрузки $P^{*}_{\text{д}}$, являющейся критической, так как зависимости $\sigma_{11} = \sigma_{11}(\eta_1)$ для исследуемого композита являются линейными вплоть до его разрушения. В отличие от этих результатов, для коротких образцов, имеющих параметр $H_0 = B_0 = B/L \sim 1/5$, зависимости, приведенные на рис. 11, 12, являются сугубо нелинейными, что объясняется главным образом сильной нелинейной зависимостью $\sigma_{13} = \sigma_{13}(\gamma_{13})$ (см. рис. 5) и существенным влиянием поперечных сдвигов на вид зависимости между нагрузкой $P_{\text{к}}$ и прогибом. В силу этого более строгое и корректное исследование рассматриваемых проблем требует решения сформулированных задач в геометрически и физически нелинейной постановках с использованием неупрощённых физических соотношений (28), (36). В то же время их решение даже в упрощённой линеаризованной постановке, основанной на использовании линеаризованных соотношений (42) (в них величина G_{*} считается не зависящей от уровня сдвиговых деформаций и в соответствии с результатами статьи [13] устанавливается экспериментальным путём на основе испытаний тест-образцов на сжатие), приводит к результатам, практически точно совпадающим с данными натурных экспериментов.

В свете полученных результатов следует сформулировать вывод о важности корректного определения модуля сдвига для формирования исходных данных линеаризованной задачи устойчивости. С помощью разработанного численного

Табл. 6

Результаты сравнений теоретических значений $P^*_{\text{д}}$ и $P^*_{\text{к}}$ с экспериментальными значениями $P^{**}_{\text{д}}$ и $P^{**}_{\text{к}}$

γxy	G^*_{13}, МПа	$P^*_{\text{д}}$, кН	$P^*_{\text{к}}$, кН	$\lvert\Delta^*_{\text{д}}\rvert$, %	$\lvert\Delta^*_{\text{к}}\rvert$, %
0	4226	19.715	66.959	732	835
0.001	3299	15.391	52.288	549	630
0.002	2423	11.306	38.416	377	437
0.003	1667	7.778	26.462	228	270
0.004	1091	5.091	17.319	115	142
0.005	686	3.201	10.891	35	52
0.0057	507	2.365	8.049	0	12
0.0059	455	2.123	7.224	10	1
0.006	420	1.960	6.668	17	7
0.007	238	1.110	3.776	53	47

метода решения линеаризованной задачи устойчивости прямолинейного стержня проведён вычислительный эксперимент, в котором, задавая различные значения модуля сдвига G_{13} (рис. 5), анализировалось изменение значений критических нагрузок $P^*_{\text{д}}$ и $P^*_{\text{к}}$. При совпадении теоретических значений $P^*_{\text{д}}$ и $P^*_{\text{к}}$ с экспериментальными значениями $P^{**}_{\text{д}}$ и $P^{**}_{\text{к}}$ считалось, что модуль сдвига G^*_{13} косвенно определён. Результаты таких сравнений представлены в табл. 6, где $|\Delta^*|$ – абсолютная разница между значениями критической нагрузки, найдённой экспериментальным и численным методами.

В то же время при $G^*_{13} = 4226$ МПа (значения G^*_{13} модулей сдвига таких порядков и определяются в рамках известных стандартов для всех используемых в промышленности современных композитов) отмечённого совпадения вообще не наблюдается. Результаты численного эксперимента подтверждаются результатами проведённого эксперимента на сжатие. При сжатии образцов, изготовленных из той же углеленты, разрушающие нормальные напряжения для образцов в среднем оказались равными $\sigma^*_{11} = 459$ МПа, которые в соответствии с результатами работы [13] равны модулю сдвига $G_{12} = G_{13}$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-38-50033, 16-38-60068).

Литература

1. *Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396, № 4. – С. 492–495.

2. *Паймушин В.Н., Шалашилин В.И.* О геометрически нелинейных уравнениях теории безмоментных оболочек с приложениями к задачам о неклассических формах потери устойчивости цилиндра // Прикл. матем. и механика. – 2006. – Т. 70. № 1. – С. 100–110.

3. *Паймушин В.Н.* Крутильные, изгибные и изгибно-крутильные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при комбинированных видах нагружения // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 3. – С. 125–136.

4. *Паймушин В.Н.* Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней // Прикл. матем. и механика. – 2007. – Т. 71, Вып. 5. – С. 855–893.

5. *Паймушин В.Н., Полякова Н.В.* Непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях и линеаризованные задачи устойчивости // Прикл. матем. и механика. – 2009. – Т. 73. Вып. 2. – С. 303–324.

6. *Паймушин В.Н., Полякова Н.В.* Об устойчивости кольца, находящегося под действием постоянного по периметру погонного крутящего момента // Прикл. матем. и механика. – 2011. – Т. 75, Вып. 6. – С. 997–1009.

7. ОСТ 1-90199-75, Материалы полимерные композиционные. Метод определения прочности при сдвиге путём испытания на изгиб. – М., 1975.

8. РД 50-675-88, Расчёты и испытания на прочность в машиностроении. Материалы композиционные. Методы испытаний на межслоевой сдвиг. – М., 1989. – 10 с.

9. ASTM D3518 / D3518M-13, Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a ±45° Laminate. – West Conshohocken, PA: ASTM Int., 2013. – doi: 10.1520/D3518_D3518M.

10. ASTM D790-15e2, Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials. – West Conshohocken, PA: ASTM Int., 2015. – doi: 10.1520/D0790-15E02.

11. ASTM D2344 / D2344M-16, Standard Test Method for Short-Beam Strength of Polymer Matrix Composite Materials and Their Laminates. – West Conshohocken, PA: ASTM Int., 2016. – doi: 10.1520/D2344_D2344M-16.

12. ГОСТ 32659-2014. Композиты полимерные. Методы испытаний. Определение кажущегося предела прочности при межслойном сдвиге методом испытания короткой балки. – М.: Стандартинформ, 2014. – 19 с.

13. *Каюмов Р.А., Луканкин С.А., Паймушин В.Н., Холмогоров С.А.* Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 112–132.

14. *Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г.* Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 263 с.

15. *Даутов Р.З., Паймушин В.Н.* О методе интегрирующих матриц решения краевых задач для обыкновенных уравнений четвёртого порядка // Изв. вузов. Матем. – 1996. – № 10. – С. 13–25.

Поступила в редакцию
29.06.16

Паймушин Виталий Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прочности конструкций; главный научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *vpajmushin@mail.ru*

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: *tdvhome@mail.ru*

Холмогоров Сергей Андреевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева

ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия

E-mail: *hkazan@yandex.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 3, pp. 350–375

On Non-Classical Buckling Mode and Failure of Composite Laminated Specimens under the Three-Point Bending

V.N. Paimushin[a,b**], *D.V. Tarlakovskii*[c,d**], *S.A. Kholmogorov*[a***]

[a] *Tupolev Kazan National Research Technical University, Kazan, 420111 Russia*
[b] *Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia*
[c] *Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*
[d] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

E-mail: **vpajmushin@mail.ru*, ***tdvhome@mail.ru*, ****hkazan@yandex.ru*

Received June 29, 2016

Abstract

On the basis of linearized equations of the theory of curvilinear bars, the buckling problem of rectilinear short and long laminated fiber reinforced specimens under the three-point bending conditions has been formulated. Using the method of finite sums in the variant of integrating matrices, a numerical method for solving the above problem has been developed. It has been shown that the failure of the composite specimens under the three-point bending conditions occurs due to the implementation of non-classical shear buckling mode.

Keywords: layered composite, specimen, three-point bending problem, finite sum method, mechanical test simulation, shear buckling mode

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 16-38-50033 and 16-38-60068).

Figure Captions

Fig. 1. The coordinate system and loading pattern of the specimen.

Fig. 2. The scheme of external load application.

Fig. 3. The diagrams of tension of specimens $\pm 45^\circ$.

Fig. 4. The geometric pattern of strain.

Fig. 5. The diagram $G_{12} = G_{12}(\gamma_{12})$ (solid line – the dependence $G_{12} = \partial\tau_{12}/\partial\gamma_{12}$; dash-dot line – the dependence (25); dash-dot line with a bold dot – quadratic approximation.

Fig. 6. The dependencies of the critical compression load on the specimen length for rigid fixing (solid line) and hinge support (dashed line).

Fig. 7. The shear buckling of the specimen.

Fig. 8. The limiting surface in bending compression.

Fig. 9. The bending diagram of long specimens in the plane xOy.

Fig. 10. The bending diagrams of long specimens in the plane xOz.

Fig. 11. The bending diagrams of short specimens in the plane xOy.

Fig. 12. The bending diagrams of short specimens in the plane xOz.

References

1. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Consistent variant of continuum deformation theory in the quadratic approximation. *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, no. 6, pp. 374–377.

2. Paimushin V.N., Shalashilin V.I. Geometrically non-linear equations in the theory of momentless shells with applications to problems on the non-classical forms of loss of stability of a cylinder. *J. Appl. Math. Mech.*, 2006, vol. 70. no. 1, pp. 91–101.

3. Paimushin V.N. Torsional, flexural, and torsional-flexural buckling modes of a cylindrical shell under combined loading. *Mech. Solids*, 2007, vol. 42, no. 3, pp. 437–446. doi: 10.3103/S0025654407030120.

4. Paimushin V.N. Problems of geometric non-linearity and stability in the mechanics of thin shells and rectilinear columns. *J. Appl. Math. Mech.*, 2007, vol. 71, no. 5, pp. 772–805. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2007.11.012.

5. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The consistent equations of the theory of plane curvilinear rods for finite displacements and linearized problems of stability. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 220–236. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.04.012.

6. Paimushin V.N., Polyakova N.V. The stability of a ring under the action of a linear torque, constant along the perimeter. *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 691–699. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.01.009.

7. Industrial Standard 1-90199-75. Polymeric composition materials. Method for determining strength while shifting during bending test. Moscow, 1975. (In Russian)

8. Ruling Document 50-675-88. Calculations and tests for strength in machine engineering. Composition materials. Methods of tests for interlaminar shear. Moscow, 1989. 10 p. (In Russian)

9. ASTM D3518 / D3518M-13, Standard Test Method for In-Plane Shear Response of Polymer Matrix Composite Materials by Tensile Test of a $\pm 45^\circ$ Laminate. West Conshohocken, PA, ASTM Int., 2013. doi: 10.1520/D3518_D3518M.

10. ASTM D790-15e2, Standard Test Methods for Flexural Properties of Unreinforced and Reinforced Plastics and Electrical Insulating Materials. West Conshohocken, PA, ASTM Int., 2015. doi: 10.1520/D0790-15E02.

11. ASTM D2344 / D2344M-16, Standard Test Method for Short-Beam Strength of Polymer Matrix Composite Materials and Their Laminates. West Conshohocken, PA, ASTM Int., 2016. doi: 10.1520/D2344_D2344M-16.

12. State Standard 32659-2014. Polymer composites. Test methods. Determination of apparent interlaminar shear strength by short-beam method. Moscow, Standartinform, 2014. 19 p. (In Russian)

13. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Identification of mechanical properties of fiber-reinforced composites. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 112–132. (In Russian)

14. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. Design of Multilayered Plates and Shells of Composite Materials. Moscow, Mashinostroenie, 1984. 263 p. (In Russian)

15. Dautov R.Z., Paimushin V.N. On the method of integrating matrices in solving boundary-value problems for ordinary differential equations of the fourth order. *Izv. VUZov, Mat.*, 1996, no. 10, pp. 13–25. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования:*** *Паймушин В.Н., Тарлаковский Д.В., Холмогоров С.А.* О неклассической форме потери устойчивости и разрушении композитных тест-образцов в условиях трёхточечного изгиба // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 3. – С. 350–375. ⟩

⟨ ***For citation:*** Paimushin V.N., Tarlakovskii D.V., Kholmogorov S.A. On non-classical buckling mode and failure of composite laminated specimens under the three-point bending. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 3, pp. 350–375. (In Russian) ⟩