Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №6, с. 44–55 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0058*

А.Ю. КУЗНЕЦОВА, Е.В. ПАТРИН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ C^*-АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ СЕМЕЙСТВОМ ЧАСТИЧНЫХ ИЗОМЕТРИЙ И МУЛЬТИПЛИКАТОРАМИ

Аннотация. В работе рассматривается C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов на гильбертовом пространстве квадратично суммируемых функций, заданных на некотором счетном множестве. Эта алгебра порождается алгеброй мультипликаторов, изоморфной алгебре всех ограниченных функций на данном множестве, и семейством операторов частичных изометрий, удовлетворяющих соотношениям, которые определяются заданным на множестве отображением. Показывается, что исследуемая алгебра является $\mathbb{Z}$-градуированной. Строится условное ожидание на отвечающую нулю подалгебру, с помощью которого доказывается ядерность исследуемой алгебры.

Ключевые слова: частичная изометрия, ядерная C^*-алгебра, условное ожидание, вполне положительное отображение.

УДК: 517.98

Введение

В данной работе предлагается конструкция C^*-алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, порожденной алгеброй мультипликаторов на гильбертовом пространстве $l^2(X)$, где X — некоторое счетное множество, и ассоциированной с заданным на X отображением φ. Данная алгебра порождается мультипликаторами и не более чем счетным семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, определяемых отображением $\varphi : X \longrightarrow X$.

Первым примером C^*-алгебры, порожденной изометриями, явилась алгебра Теплица, порожденная одним изометрическим оператором. В работах Дугласа, Мерфи, Дженга, Давидсона и Попеску исследовались C^*-алгебры, порожденные коммутативной полугруппой изометрий [1]–[4].

В работе В.А. Арзуманяна и А.М. Вершика [5] исследовалась алгебра, порожденная единственным полуунитарным оператором и мультипликаторами. Приведем и работу [6], где, кроме алгебры Арзуманяна–Вершика, исследовались и C^*-алгебры, которые возникают при рассмотрении накрывающих отображений $T : X \longrightarrow X$, где X — компактное пространство, см. также [7]–[9].

Кунц в [10] впервые начал исследовать алгебру $\mathfrak{O}_n$, порожденную конечным семейством некоммутирующих изометрий $U_1, U_2, \dots, U_n$, удовлетворяющих соотношению $U_1U_1^*+U_2U_2^*+\dots+U_nU_n^* = I$. В работах Кунца и Кригера, Пимзнера, Кумджана и других исследовались алгебры, порожденные различными семействами частичных изометрий [11]–[14].

В [15] рассматриваются расширения C^*-алгебр частичными изометриями, т. е. C^*-алгебра $\mathcal{B}$, порожденная некоторой $*$-алгеброй $\mathcal{A} \in B(H)$ и частичной изометрией $U \in B(H)$, индуцирующей эндоморфизм $\mathcal{A}$, при этом $\mathcal{A}$ является для $\mathcal{B}$ алгеброй коэффициентов (для

Поступила 29.06.2011

любого $A \in \mathcal{A}$ $UAU^*, U^*AU \in \mathcal{A}$ и $UA = UAU^*U$). Некоторые специальные алгебры такого вида возникают при исследовании интегрируемых физических систем [16], а также в квантовой оптике [17], [18].

В данной работе рассматривается C^*-подалгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ алгебры $B(l^2(X))$, порожденная алгеброй мультипликаторов, изоморфной алгебре ограниченных на X функций $C_b(X)$, и семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$U_1U_1^* + U_2U_2^* + \cdots + U_mU_m^* + \cdots = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_m + \cdots = Q,$$
$$U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \cdots + U_m^*U_m + \cdots = P_1 + P_2 + \cdots + P_m + \cdots = P,$$

где P и Q — проекторы, определенные отображением $\varphi : X \longrightarrow X$. Отметим, что если отображение φ инъективно, то алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ порождается мультипликаторами и единственным изометричным оператором U_1, при этом алгебра мультипликаторов является для $\mathfrak{M}_\varphi$ алгеброй коэффициентов.

В работах [19]–[22] рассматривалась C^*-алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$, порожденная конечным семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k=1}^m$, или оператором $T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X)$, который является их линейной комбинацией, $T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}\,U_2 + \cdots + \sqrt{m}\,U_m$. Предполагалось, что для любого элемента из X мощность прообраза при отображении φ не превосходит m.

В работе [23] вместо этого условия требовалась лишь конечность мощности прообраза любого элемента, и алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$ порождалась счетным семейством частичных изометрий.

В этих работах оператор T_φ согласовывался с заданным на множестве X отображением φ как оператор, действующий на естественном базисе $\{e_x\}_{x\in X}$ по правилу $T_\varphi e_x = e_{\varphi(x)}$.

В данной работе удобно представить оператор T_φ как суперпозицию, $T_\varphi f = f \circ \varphi$, тогда сопряженный к T_φ оператор будет являться аналогом “оператора сдвига”, и на базисных векторах $T_\varphi^* e_x = e_{\varphi(x)}$. Некоторые свойства у алгебр $\mathfrak{A}_\varphi$ и $\mathfrak{M}_\varphi$ совпадают, и доказательства технических лемм переносятся почти без изменения (леммы 3.1, 3.2, следствие 3.1), но для удобства читателя и полноты изложения мы приводим их в данной работе.

В разделе 1 даются необходимые определения, приводятся основные свойства оператора T_φ и определяется алгебра $\mathfrak{A}_\varphi$. Доказательства всех приведенных утверждений можно найти в работах [20], [22], [23].

В разделе 2 определяется алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ и приводятся некоторые соотношения между операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и мультипликаторами $M_f : l^2(X) \longrightarrow l^2(X)$; $M_f g = fg$, где $f \in C_b(X)$, $C_b(X)$ — алгебра всех ограниченных функций на X.

В разделе 3 вводятся понятия монома в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ и его индекса, с помощью которых показывается, что исследуемая алгебра является $\mathbb{Z}$-градуированной.

В разделе 4 рассматривается ядерная подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$, порожденная мономами нулевого индекса. Показывается, что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ обладает блочной системой и подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является индуктивным пределом блочных подалгебр.

Основные результаты работы приведены в разделе 5. Показывается, что в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ существует условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$. С помощью построенного условного ожидания доказывается, что тензорное произведение алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ с произвольной C^*-алгеброй наследует градуировку и что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является ядерной.

Часть результатов была доложена на 23-й международной конференции по теории операторов, проходившей в Тимишоаре (Румыния) с 29.06 по 04.07 в 2010 г.

Авторы выражают благодарность Сурену Аршаковичу Григоряну за ценные замечания и внимание к данной работе.

1. Необходимые сведения

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ — отображение некоторого счетного множества в себя.

В данной работе везде предполагается, что на X отсутствуют *циклические* элементы, т. е. такие $x \in X$, что $\varphi^n(x) = x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $E_y = \{x \in X : \varphi(x) = y\}$ полный прообраз элемента $y \in X$, и пусть $\gamma(y) = \operatorname{card} E_y$. Очевидно, если $y_1 \neq y_2$, то $E_{y_1} \cap E_{y_2} = \varnothing$.

Элемент $y \in X$, для которого $\gamma(y) = 0$, назовем *φ-начальным* (или просто *начальным*). Предполагается, что $\operatorname{card} E_y < \infty$ для любого $y \in X$.

Элементы $x_1, x_2 \in X$ назовем *φ-эквивалентными в k-м порядке*, если $\varphi^k(x_1) = \varphi^k(x_2)$. Для каждого k множество X можно представить в виде объединения, $X = \bigcup\limits_{y \in X} E_y^k$, где $E_y^k = \{x \in X : \varphi^k(x) = y\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Полагаем $E_y^0 = \{y\}$, $E_y^1 = E_y$. Очевидно, если $y_1 \neq y_2$, то $E_{y_1}^k \cap E_{y_2}^k = \varnothing$.

Семейство функций $\{e_x\}_{x \in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $l^2(X) = \Big\{ f : X \to \mathbb{C} : \sum\limits_{x \in X} |f(x)|^2 < \infty \Big\}$.

При каждом фиксированном k гильбертово пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы конечномерных подпространств,

$$l^2(X) = \bigoplus_{y \in X} l^2(E_y^k).$$

Отображения φ индуцирует оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Так как на базисных элементах выполняются равенства

$$(T_\varphi e_y)(x) = e_y(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{для всех } \; x \in E_y; \\ 0, & \text{если } \; x \notin E_y, \end{cases}$$

то

$$T_\varphi e_y = \begin{cases} \sum\limits_{x \in E_y} e_x, & \text{если } \; E_y \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если } \; E_y = \varnothing. \end{cases}$$

В [23] показано, что оператор T_φ является замкнутым. Если же мощность прообраза ограничена в совокупности, то оператор T_φ, очевидно, является ограниченным на $l^2(X)$. Оператор, сопряженный к T_φ, вычисляется по формуле

$$(T_\varphi^* f)(y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in E_y} f(x), & \text{если } \; E_y \neq \varnothing; \\ 0, & \text{если } \; E_y = \varnothing. \end{cases}$$

Легко видеть, что на базисных элементах $T_\varphi^* e_x = e_{\varphi(x)}$.

Множество X представляется в виде дизъюнктного объединения подмножеств

$$X_k = \{y \in X : \operatorname{card} E_y = k\}.$$

Гильбертово пространство $l^2(X)$ можно представить в виде прямой суммы взаимно ортогональных подпространств,

$$l^2(X) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} l^2(X_k).$$

Если $X_k = \varnothing$, то полагаем $l_2(X_k) = \{0\}$. Отметим, что $T_\varphi^* T_\varphi f = kf$ для всех $f \in l^2(X_k)$.

Поэтому $T_\varphi^* T_\varphi = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} kP_k$, где P_k — проектор из $l^2(X)$ на $l^2(X_k)$.

Аналогично
$$l^2(X) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}_+} l_k^2,$$
где $l_k^2 = \{f \in l^2(X) : T_\varphi T_\varphi^* f = kf\}$ для всех $k \neq 0$, и l_0^2 определяется как ортогональное дополнение ко всем остальным l_k^2.

Следовательно, $T_\varphi T_\varphi^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} kQ_k$, где Q_k — ортопроектор на l_k^2. Заметим, что в общем случае проекторы P_k и Q_k не коммутируют друг с другом.

В пространстве $l^2(X_k)$ ортонормированным базисом является семейство функций $\{e_x\}_{x\in X_k}$, а в пространстве l_k^2 при $k \neq 0$ ортонормированный базис образует семейство функций $\{g_y\}_{y\in X_k}$, где $g_y = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x\in E_y} e_x$.

Определим оператор частичной изометрии U_k, $k \neq 0$, полагая
$$U_k e_y = \begin{cases} g_y, & \text{если } \ y \in X_k; \\ 0, & \text{если } \ y \notin X_k. \end{cases}$$
Соответственно
$$U_k^* g_y = \begin{cases} e_y, & \text{если } \ y \in X_k; \\ 0, & \text{если } \ y \notin X_k. \end{cases}$$
Тогда оператор $T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \dots + \sqrt{m}U_m + \cdots$. Заметим, что $U_k = \frac{1}{\sqrt{k}} Q_k T_\varphi$ для всех k и выполняются равенства
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} U_k U_k^* = \sum_{k\in\mathbb{N}} Q_k = Q : l^2(X) \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} l_k^2,$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} U_k^* U_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} P_k = P : l^2(X) \longrightarrow \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} l^2(X_k).$$

Пусть $\mathfrak{A}_\varphi$ — равномерно замкнутая C^*-подалгебра алгебры всех ограниченных операторов на $l^2(X)$, порожденная этим семейством частичных изометрий. Если φ таково [19], [20], что существует конечная точная верхняя грань множества мощностей прообразов элементов из X, то спектры операторов $T_\varphi T_\varphi^*$ и $T_\varphi^* T_\varphi$ — конечные множества, и операторы P_k и Q_k принадлежат алгебре $\mathfrak{A}_\varphi$.

Мономом [21], [22] в алгебре $\mathfrak{A}_\varphi$ назовем любое конечное произведение определенных выше операторов частичных изометрий и сопряженных к ним, не равное тождественно нулю. *Индексом* монома будем называть разность между числом операторов из множества $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и числом операторов из множества $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, участвующих в его представлении. В [22] показано, что индекс монома не зависит от его представления в виде произведения. Подалгебру, порожденную мономами нулевого индекса, обозначим через $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$.

2. Мультипликаторы

Пусть $C_b(X)$ — алгебра всех ограниченных функций на X. Каждая функция f из $C_b(X)$ порождает оператор (мультипликатор)
$$M_f : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad M_f g = fg,$$
где $g \in l^2(X)$, и $(M_f)^* = M_{\overline{f}}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ C^*-подалгебру $B(l^2(X))$, порожденную всеми мультипликаторами и операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Лемма 2.1. *Для любой функции f из $C_b(X)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство*
$$U_k M_f = M_{f\circ\varphi} U_k, \quad \text{где} \quad f \circ \varphi \in C_b(X).$$

Доказательство. Рассмотрим действие оператора $U_k M_f$ на базисных элементах,
$$U_k M_f e_y = U_k f(y) e_y = \begin{cases} f(y) \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x \in E_y} e_x, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y = k; \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y \neq k. \end{cases}$$

С другой стороны,
$$M_{f\circ\varphi} U_k e_y = \begin{cases} M_{f\circ\varphi} \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x \in E_y} e_x, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y = k; \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y \neq k. \end{cases}$$

Поэтому при $\operatorname{card} E_y = k$ получим
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x \in E_y} M_{f\circ\varphi} e_x = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x \in E_y} f(\varphi(x)) e_x = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x \in E_y} f(y) e_x = f(y) \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x \in E_y} e_x. \qquad \square$$

Заметим, что из леммы 2.1 сразу следует, что для любой функции f из $C_b(X)$
$$M_f U_k^* = U_k^* M_{f\circ\varphi}.$$

Лемма 2.2. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ существует такое линейное отображение*
$$\psi_k : C_b(X) \longrightarrow C_b(X), \quad \text{что} \quad \forall\, f \ \text{из} \ C_b(X)$$
$$M_{\psi_k(f)} = U_k^* M_f U_k.$$

Доказательство. Опять рассмотрим действие оператора $U_k^* M_f U_k$ на базисных элементах. Имеем
$$U_k^* M_f U_k e_y = \begin{cases} U_k^* M_f \frac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x \in E_y} e_x, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y = k; \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y \neq k, \end{cases} =$$
$$= U_k^* \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{x \in E_y} f(x) e_x = \left(\frac{1}{k} \sum_{x \in E_y} f(x) \right) e_y, \quad \text{если} \quad \operatorname{card} E_y = k.$$

Полагая
$$\psi_k(f)(y) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum\limits_{x \in E_y} f(x), & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y = k; \\ 0, & \text{если} \quad \operatorname{card} E_y \neq k, \end{cases}$$
получим $U_k^* M_f U_k = M_{\psi_k(f)}$.

Если $f = 1$, то $U_k^* U_k = P_k$, и $\psi_k(1)$ совпадает с индикатором χ_k множества X_k. $\square$

3. Градуировка алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$

Покажем, что на алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ можно ввести градуировку. Как и в [21], [22], определим для этого понятие монома и его индекса. *Элементарным мономом* алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовем любой элемент из множества $\{M_f\}_{f \in C_b(X)} \bigcup \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}} \bigcup \{U_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$. Если элементарный моном принадлежит множеству $\{M_f\}_{f \in C_b(X)}$, то его индекс будем считать равным 0, а если элементарный моном принадлежит множеству $\{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ или $\{U_k^*\}_{k \in \mathbb{N}}$, то его индекс будем считать равным 1 или -1 соответственно.

Мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовем любое конечное произведение элементарных мономов, не равное тождественно нулю. Индексом монома V $(\operatorname{ind} V)$ назовем сумму индексов элементарных мономов, участвующих в его представлении. Очевидно, один и тот же моном V может иметь различные представления. *Длиной* монома V $(\mathrm{d}(V))$ назовем наименьшее число операторов частичной изометрии (элементарных мономов из множества $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}\bigcup\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$), участвующих в его представлении.

Лемма 3.1. *Пусть моном V представлен в виде произведения l сомножителей из семейства $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и s сомножителей из семейства $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$. Тогда для любого $p\geq s$ моном V отображает пространство $l^2(E_y^p)$ в пространство $l^2(E_y^{p-s+l})$, и Ve_y принадлежит гильбертовому пространству $l^2\big(E^{p+l}_{\varphi^s(y)}\big)$.*

Доказательство. Пусть $U_k^*e_x\neq 0$ для некоторого e_x из $l^2(E_y^k)$. Тогда $U_k^*e_x=\frac{1}{\sqrt{k}}e_{\varphi(x)}$. Поскольку $x\in E_y^p$, то $\varphi(x)\in E_y^{p-1}$ и U_k^* отображает $l^2(E_y^p)$ в $l^2(E_y^{p-1})$ для всех $k\in\mathbb{N}$. То же можно сказать и про операторы вида $M_fU_k^*$ и $U_k^*M_f$.

Аналогично, если $U_ke_x\neq 0$, то $U_ke_x=g_x\in l^2(E_y^{p+1})$, и U_k (равно как $M_fU_k^*$ и $U_k^*M_f$) отображает $l^2(E_y^p)$ в $l^2(E_y^{p+1})$ для всех $k\in\mathbb{N}$.

Таким образом, если в представлении монома V имеется l сомножителей из семейства $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и s сомножителей из семейства $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, то он отображает пространство $l^2(E_y^p)$ в пространство $l^2(E_y^{p-s+l})$. Для завершения доказательства заметим, что из определения множества E_y^p следует, что пространство $l^2(E_y^{p-s+l})$ является подпространством $l^2\big(E^{p+l}_{\varphi^s(y)}\big)$. Поэтому Ve_y принадлежит $l^2\big(E^{p+l}_{\varphi^s(y)}\big)$. ☐

Лемма 3.2. *Индекс монома не зависит от его представления в виде произведения.*

Доказательство. Пусть моном V имеет разные представления с l_1 сомножителями из множества $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, s_1 сомножителями из множества $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, l_2, s_2 сомножителями соответственно. Тогда по лемме 3.1 этот моном переводит $l^2(E_y^p)$ в пространство $l^2(E_y^{p-s_1+l_1})$ с одной стороны, и в пространство $l^2(E_y^{p-s_2+l_2})$ с другой. Отсюда $-s_1+l_1=-s_2+l_2$. Таким образом, индексы монома совпадают. ☐

Следствие 3.1. Моном V индекса 0 отображает пространство $l^2(E_y^p)$ в себя при всех $p\geq \mathrm{d}\,(V)/2$.

Доказательство. Если моном V длины $\mathrm{d}\,(V)$ имеет индекс 0, то в его представлении количество операторов частичной изометрии и сопряженных к ним совпадает. Поэтому согласно лемме 3.1 подпространство $l^2(E_y^p)$ является инвариантным для этого монома при всех $p>\mathrm{d}\,(V)/2$. ☐

Отметим, что если V_1 и V_2 — два монома, и $V_1V_2\neq 0$, то

$$\operatorname{ind} V_1V_2=\operatorname{ind} V_1+\operatorname{ind} V_2.$$

Пусть $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$ — операторное пространство в $\mathfrak{M}_\varphi$, порожденное мономами индекса n.

Лемма 3.3. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что линейные комбинации мономов плотны в $\mathfrak{M}_\varphi$. Из определения индекса монома сразу следует

$$\mathfrak{M}_{\varphi,n}\mathfrak{M}_{\varphi,s}\subset\mathfrak{M}_{\varphi,n+s}.$$

Докажем, что $\mathfrak{M}_{\varphi,n} \cap \mathfrak{M}_{\varphi,s} = \{0\}$, если $n \neq s$. Допустим, что пересечение не нулевое и $n \neq s$. Это значит, существуют такие элементы A, $A' = \sum\limits_{i=1}^{n'} \alpha_i V_i' \in \mathfrak{M}_{\varphi,n}$ и $A'' = \sum\limits_{j=1}^{n''} \alpha_j V_j'' \in \mathfrak{M}_{\varphi,s}$, т.е. A' является линейной комбинацией мономов индекса n, а A'' — линейной комбинацией мономов индекса s, что

$$\|A - A'\| < \varepsilon/2 \quad \text{и} \quad \|A - A''\| < \varepsilon/2 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Не теряя общности, предположим, что $n = 0$. С одной стороны,

$$\|A' - A''\| \leq \|A - A'\| + \|A - A''\| \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, найдется такой элемент e_y, что подпространство $l^2(E_y^p)$ по лемме 3.1 при достаточно большом p является инвариантным для оператора $A' = \sum\limits_{i=1}^{n'} \alpha_i V_i'$, а оператор $A'' = \sum\limits_{j=1}^{n''} \alpha_j V_j''$ по лемме 3.1 переводит его в ортогональное подпространство $l^2(E_y^{p+s})$. Поскольку $A \neq 0$, то в $l^2(E_y^p)$ найдется такой элемент e_x, что $Ae_x \neq 0$, а значит, и $A'e_x \neq 0$, и $A''e_x \neq 0$. Отсюда $\|A' - A''\|$ не может быть меньше ε. Пришли к противоречию. □

Следствие 3.2. Пусть элемент $A \in \mathfrak{M}_\varphi$ представляется в виде конечной суммы $A = \sum\limits_k A_k$, где $A_k \in \mathfrak{M}_{\varphi,k}$. Тогда $\|A_k\| \leq \|A\|$.

Доказательство. Рассмотрим действие оператора A на произвольном элементе $f \in l^2(X)$ единичной нормы. Не ограничивая общности, считаем, что f содержится в некотором $l^2(E_y^p)$ и p достаточно велико. Доказываемое утверждение следует из взаимной ортогональности подпространств $l^2(E_y^{p+k})$. □

4. Блочные подалгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$

Рассмотрим в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$, порожденную мономами индекса 0. Сперва отметим следующий простой факт.

Лемма 4.1. *C^*-подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ совпадает с C^*-алгеброй, порожденной C^*-подалгеброй $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$ алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ и алгеброй $C_b(X)$.*

Доказательство. Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что любой моном нулевого индекса алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ можно представить в виде произведения мономов нулевого индекса алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$ и мультипликаторов. □

Напомним некоторые определения. *Блочной системой* ([24], V.4.1.1) в алгебре всех ограниченных операторов на некотором гильбертовом пространстве H называется семейство попарно ортогональных проекторов конечного ранга $\{Q_i\}$, удовлетворяющее свойству $\sum\limits_i Q_i = I$. Оператор $T \in B(H)$ называется *блочно-диагональным* относительно блочной системы $\{Q_i\}$, если $T = \sum\limits_i Q_i T Q_i$, т.е. $Q_i T Q_j = 0$ при $i \neq j$. Оператор T называется *блочно-диагонализуемым*, если он является блочно-диагональным относительно некоторой блочной системы.

C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *лиминальной* (или CCR-алгеброй), если для любого ее неприводимого представления π на гильбертовом пространстве H выполняется $\pi(\mathfrak{A}) \subseteq K(H)$, где $K(H)$ — алгебра компактных операторов ([24], V.1.3.1).

Напомним, что $l^2(X) = \bigoplus\limits_{y\in X} l^2(E_y^k)$, причем каждое $l^2(E_y^k)$ является конечномерным пространством, инвариантным для мономов индекса 0 и длины d $\leq k/2$, что вытекает из следствия 3.1.

Пусть $\chi_{y,k}$ — индикатор множества E_y^k. Тогда оператор $P_{y,k} := M_{\chi_{y,k}} \in \mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является проектором на подпространство $l^2(E_y^k)$. Таким образом, при любом фиксированном k алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ содержит блочную систему $\{P_{y,k}\}_{y\in X}$, и любой моном нулевого индекса является блочно-диагонализуемым.

Пусть $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)}$ — C^*-алгебра, порожденная мономами нулевого индекса, в представлении которых участвуют частичные изометрии из конечного семейства $\{U_k\}_{k=1}^s$. Тогда имеем цепочку вложенных друг в друга C^*-алгебр,

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(1)} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(2)} \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)} \subset \cdots ,$$

и

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0} = \overline{\bigcup_{s=1}^{\infty}} \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)}.$$

Каждую подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)}$ в свою очередь представим в виде

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}} \mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s),n},$$

где $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s),n}$ — C^*-алгебра, порожденная мономами нулевого индекса, имеющими в своем представлении операторы частичной изометрии из множества $\{U_k\}_{k=1}^s$ длиной не больше $2n$.

Лемма 4.2. *Каждая C^*-подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s),n}$ является ядерной.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный моном V нулевого индекса и длины $2n$ из алгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s),n}$. Согласно следствию 3.1 V является блочно-диагональным относительно блочной системы $\{P_{y,n}\}_{y\in X}$. Таким образом, V можно представить в виде прямой суммы, $V = \bigoplus\limits_{y\in X} V_y$, где $V_y = P_{y,n} V P_{y,n}$ — сужение V на подпространство $l^2(E_y^n)$ размерностью n_y, которая не превышает $\max\{\gamma(y)\}^n$, где $y \in E_y^n$. Заметим, что если $\max\{\gamma(y)\} > s$, то сужение V на $l^2(E_y^n)$ равно нулю (по построению операторов U_k), и можно считать, что размерность подпространства $l^2(E_y^n)$ не превышает s^n.

Отсюда алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s),n}$ изоморфна прямой сумме полных матричных алгебр $\bigoplus\limits_{y\in X} M_{n_y}(\mathbb{C})$, т. е. является лиминальной и, следовательно, ядерной [25]. □

Теорема 4.1. *C^*-алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ ядерна.*

Доказательство. Каждая C^*-алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}^{(s)}$ является ядерной как индуктивный предел ядерных алгебр, поэтому ядерной является и алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$. □

5. Условное ожидание в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$

Напомним, что *условным ожиданием* из C^*-алгебры $\mathfrak{A}$ в C^*-подалгебру $\mathfrak{B}$ называется такое вполне положительное сжимающее отображение $\theta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$, что $\theta(B) = B$ и $\theta(B_1 A B_2) = B_1 \theta(A) B_2$ для любых $B, B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{A}$ ([26], [24]). Другими словами, условное ожидание является проектором единичной нормы из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$. Ж. Томияма в [27] доказал, что верно и обратное утверждение (см. также [28], [24]).

Лемма 5.1. *В алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ существует условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$.*

Доказательство. Определим отображение
$$\mathcal{P} : \mathfrak{M}_\varphi \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0},$$
полагая на всюду плотном множестве $\mathcal{P}\Big(\sum\limits_{k=-n}^{n} A_k\Big) = A_0$, где $A_k \in \mathfrak{M}_{\varphi,k}$, $A_0 \in \mathfrak{M}_{\varphi,0}$, и продолжая по непрерывности. Из следствия 3.2, так как единица, т. е. M_1, содержится в $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$, получаем $\|\mathcal{P}\| = 1$. □

Теорема 5.1. *Алгебра $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — произвольная C^*-алгебра, является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная C^*-алгебра. Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B}$. Пусть H — некоторое гильбертово пространство и
$$\pi : \mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B} \longrightarrow B(H)$$
— точное представление. Обозначим $\pi(\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B})$ через $\mathfrak{M}_\varphi \bigodot_\pi \mathfrak{B}$ и замыкание $\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B}$ в π-норме через $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes_\pi \mathfrak{B}$. Запишем $\mathfrak{M}_\varphi = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n}$. Это означает, что суммы вида $\sum\limits_{n=-m}^{m} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}_{\varphi,n}$, плотны в $\mathfrak{M}_\varphi$. Тогда
$$\pi\Big(\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B}\Big) = \pi\bigg(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigodot \mathfrak{B}\bigg) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigodot_\pi \mathfrak{B}.$$
Сначала докажем, что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_\pi \mathfrak{B}$ является градуированной. Действительно, $(\mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B})(\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B}) \subset \mathfrak{M}_{\varphi,n+s} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B}$, поскольку $\mathfrak{M}_{\varphi,n}\mathfrak{M}_{\varphi,m} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,n+m}$. Также очевидно, что $(\mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B}) = \{0\}$. Докажем, что и
$$\Big(\mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigotimes_\pi \mathfrak{B}\Big) \cap \Big(\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigotimes_\pi \mathfrak{B}\Big) = \{0\}.$$
Для простоты предположим, что $n = 0$, и рассмотрим $\mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes_\pi \mathfrak{B} \cap \mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigotimes_\pi \mathfrak{B}$. На алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ определено условное ожидание $\mathcal{P} : \mathfrak{M}_\varphi \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0}$ (лемма 5.1), которое является вполне положительным отображением. Пусть I — тождественное отображение на $\mathfrak{B}$. Отображение
$$\mathcal{P} \otimes I : \mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigodot \mathfrak{B}$$
тоже является вполне положительным и расширяется до вполне положительного отображения на $\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_\pi \mathfrak{B}$, также обозначаемого $\mathcal{P} \otimes I$, что следует из теоремы Стайнспринга ([24], II.6.9.7, II.9.7.3). Следующая диаграмма иллюстрирует вышеприведенные рассуждения:
$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{M}_\varphi \bigodot \mathfrak{B} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_{\varphi,n} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_\pi \mathfrak{B} \\
{\scriptstyle \mathcal{P}\otimes I}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathcal{P}\otimes I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}\otimes I} \\
\mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigodot \mathfrak{B} & \xrightarrow{\ \pi\ } & \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigodot\limits_\pi \mathfrak{B} & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes\limits_\pi \mathfrak{B}.
\end{array}$$

Очевидно, подпространство $\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigodot\limits_{\pi} \mathfrak{B}$ лежит в ядре отображения $\mathcal{P} \otimes I$. Но у непрерывного отображения ядро замкнуто, следовательно, его замыкание $\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigotimes\limits_{\pi} \mathfrak{B}$ тоже лежит в ядре отображения $\mathcal{P} \otimes I$. Отсюда

$$\Big(\mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes_{\pi} \mathfrak{B}\Big) \cap \Big(\mathfrak{M}_{\varphi,m} \bigotimes_{\pi} \mathfrak{B}\Big) = \{0\}.$$

Таким образом, алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes\limits_{\pi} \mathfrak{B}$ является $\mathbb{Z}$-градуированной, значит, градуированной будет и алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B}$. □

Теорема 5.2. *C^*-алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi}$ ядерна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}$ — произвольная C^*-алгебра. Допустим, что

$$\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\min} \mathfrak{B} \neq \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\max} \mathfrak{B}.$$

Алгебраическое тензорное произведение $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigodot \mathfrak{B}$ является всюду плотным множеством как для алгебры $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes\limits_{\min} \mathfrak{B}$, так и для $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B}$, и

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i \Big\|_{\max} \geq \Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i \Big\|_{\min}$$

для любого $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i$ из $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigodot \mathfrak{B}$. Поэтому тождественное отображение

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i$$

расширяется до сюрьективного *-гомоморфизма

$$\Phi : \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\max} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\min} \mathfrak{B}.$$

Поскольку

$$\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\min} \mathfrak{B} \neq \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\max} \mathfrak{B},$$

ядро $\ker \Phi$ отображения Φ есть нетривиальный идеал J алгебры $\mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B}$.

Согласно ([24], II.9.7.1, II.9.7.3) отображение

$$\mathcal{P} \otimes I : \mathfrak{M}_{\varphi} \bigodot \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigodot \mathfrak{B}$$

является вполне положительным и расширяется как до вполне положительного отображения

$$\mathcal{P} \otimes I : \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\min} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes_{\min} \mathfrak{B},$$

так и до вполне положительного отображения

$$\mathcal{P} \otimes I : \mathfrak{M}_{\varphi} \bigotimes_{\max} \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes_{\max} \mathfrak{B}.$$

По теореме 4.1 алгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ ядерна. Таким образом, имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B} & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{M}_\varphi \bigotimes\limits_{\min} \mathfrak{B} \\
{\scriptstyle \mathcal{P}\otimes I}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{P}\otimes I} \\
\mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B} & = & \mathfrak{M}_{\varphi,0} \bigotimes\limits_{\min} \mathfrak{B}.
\end{array}$$

Рассмотрим произвольный элемент $C \neq 0 \in J$. По теореме 5.1 этот элемент имеет вид $C = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} C_k$, где $C_k \in \mathfrak{M}_{\varphi,k} \bigotimes\limits_{\max} \mathfrak{B}$. Поскольку $C \neq 0$, то найдется хотя бы один $C_j \neq 0$. Рассмотрим $C_j^* C \in J$. Чтобы диаграмма была коммутативна, элемент, лежащий в ядре отображения Φ, должен лежать и в ядре отображения $\mathcal{P} \otimes I$. Отсюда получаем

$$\mathcal{P} \otimes I\biggl(C_j^*\biggl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k\biggr)\biggr) = C_j^* C_j > 0.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $\ker\Phi = 0$ и гомоморфизм Φ является изоморфизмом, т. е. алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ ядерна. □

Добавим, что в алгебре $\mathfrak{A}_\varphi$, которая тоже, очевидно, является градуированной, можно аналогичным способом построить условное ожидание на подалгебру $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$.

Литература

[1] Davidson K.R., Popescu G. *Noncommutative disc algebras for semigroups*, Can. J. Math. **50** (2), 290–311 (1998).
[2] Douglas R.G. *On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128**, 143–152 (1972).
[3] Jang S.Y. *Generalized Toeplitz algebra of a certain non-amenable semigroup*, Bull. Korean Math. Soc. **43** (2), 331–341 (2006).
[4] Murphy G.J. *Generalized Toeplitz algebra of a certain non-amenable semigroup*, J. Oper. Theory **18**, 303–326 (1987).
[5] Арзуманян В.А., Вершик А.М. *Фактор-представления скрещенного произведения коммутативной C^*-алгебры и полугруппы ее эндоморфизмов*, ДАН СССР **238** (3), 513–516 (1978).
[6] Exel R., Vershik A. *C^*-algebras of irreversible dynamical systems*, arXiv:math/0203185v1[math.OA] (2002).
[7] Arzumanian V., Vershik A. *Star algebras associated with endomorphisms*, in "Operator algebras and group repr.," Proc. of 1980 – OAGR Conf. 1 (Pitman, 1984), p. 17–27.
[8] Deaconu V. *Groupoids associated with endomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. **347**, 1779–1786 (1995).
[9] Renault J. *Cuntz-like algebras*, in "Operator theoretical methods," Proceedings of the 17th international conference on operator theory (Timisoara, Romania, 2000), p. 371–386.
[10] Cuntz J. *On the simple C^*-algebras generated by isometries*, Comn. Math. Phys. **57**, 173–185 (1977).
[11] Cho I., Jorgensen P. *C^*-algebras generated by partial isometries*, J. Appl. Math. Comput. **26**, 1–48 (2008).
[12] Cuntz J., Krieger W. *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (3), 251–268 (1980).
[13] Kumjian A. *On certain Cuntz–Pimsner algebras*, arXiv:math.OA/0108194 v1 (2001).
[14] Exel R., Laca M., Quigg J. *Partial dynamical systems and C^*-algebras generated by partial isometries*, arXiv:funct-an/9712007.
[15] Лебедев А.В., Одзиевич А. *Расширения C^*-алгебр частичными изометриями*, Матем. сб. **195** (7), 37–70 (2004).
[16] Odzijewicz A. *Quantum algebras and q-special functions related to coherent states maps of the disc*, Comn. Math. Phys. **6192**, 183-215 (1998).
[17] Horowski M., Odzijewicz A., Tereszkiewicz A. *Some integrable systems in nonlinear quantum optics*, arXiv:math-ph/0207031 (2002).
[18] Horowski M., Odzijewicz A., Tereszkiewicz A. *Integrable multi-bozon systems and orthogonal polynomials*, J. Phys. A. **34**, 4353–4376 (2001).

[19] Grigoryan S., Kuznetsova A. *C^*-algebras generated by mappings*, Lobachevskii J. Math. **29** (1), 5–8 (2008).
[20] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями*, Матем. заметки **88** (5), 694–703 (2010).
[21] Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *AF-подалгебры C^*-алгебры, порожденной отображением*, Изв. вузов. Матем., № 3, 82–87 (2010).
[22] Grigoryan S., Kuznetsova A. *On a class of nuclear C^*-algebras*, Proceedings of the 23rd intenational conference on operator theory (Timisoara, Romania, 2010) [to appear].
[23] Кузнецова А.Ю. *Об одном классе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий*, Изв. НАН Армении. Матем. **45** (6), 51–62 (2010).
[24] Blackadar B. *Operator algebras* (Springer, 2006).
[25] Takesaki M. *On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras*, Tôhoku Math. J. **15** (1), 111–122 (1964).
[26] Umegaki U. *Conditional expectations in an operator algebra*. I, Tôhoku Math. J. **6** (1), 177–181 (1954).
[27] Tomiyama J. *On the projection of norm one in W^*-algebras*, Proc. Japan Acad. **33** (10), 608–612 (1957).
[28] Strătilă S. *Modular theory in operator algebras* (Editura Academiei Republicii Socialistic România, Bucharest, 1981).

А.Ю. Кузнецова

ассистент, кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: alla_kuznetsova@rambler.ru

Е.В. Патрин

ассистент, кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

e-mail: evgeniipatrin@mail.ru

A.Yu. Kuznetsova and E.V. Patrin

One class of C^*-algebras generated by a family of partial isometries and multiplicators

Abstract. We consider a C^*-subalgebra of the algebra of all bounded operators on the Hilbert space of square-summable functions defined on some countable set. This algebra is generated by a family of partial isometries and the multiplier algebra isomorphic to the algebra of all bounded functions defined on the mentioned set. The operators of partial isometries satisfy relations defined by a prescribed map on the set. We show that the considered algebra is $\mathbb{Z}$-graduated. After that we construct the conditional expectation from the latter onto the subalgebra responding to zero. Using this conditional expectation, we prove that the algebra under consideration is nuclear.

Keywords: partial isometry, nuclear C^*-algebra, conditional expectation, completely positive map.

A.Yu. Kuznetsova

Assistant, Chair of General Relativity and Gravitation,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: alla_kuznetsova@rambler.ru

E.V. Patrin

Assistant, Chair of General Relativity and Gravitation,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: evgeniipatrin@mail.ru