ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 5 (468)

УДК 517.968

Н.С. ГАББАСОВ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ, ИМЕЮЩИМ НЕПОДВИЖНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Рассматривается линейное интегральное уравнение вида

$$
\begin{gathered}
Ax \equiv x(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (0 \le t \le 1), \\
Kx \equiv \int_0^1 K(t,s)[u(s)]^{-1} x(s) ds, \quad u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2},
\end{gathered} \tag{1}
$$

где $p_i \in \mathbb{R}^+$ $(i=\overline{1,2})$, K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, x — искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару ([1], с. 144–150). К уравнениям вида (1) приводят многие граничные задачи математической физики, в частности, задачи решения некоторых нагруженных интегродифференциальных уравнений [2] и теории уравнений смешанного типа [3], [4]. Поскольку изучаемые уравнения точно решаются лишь в очень редких частных случаях, особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения.

Отметим, что уравнение (1) в частном случае $p_1 = 0$ исследовалось в [2] и [5]. В [2] при жестких ограничениях (типа требований гладкости) на K и y показано, что для (1) при $p_1 = 0$, $1 < p_2 < 2$ справедливы все теоремы Фредгольма. В [5] на основе связи исследуемого уравнения с интегральным уравнением третьего рода для (1) доказаны теоремы Фредгольма при $p_1 = 0$, $p_2 \in \mathbb{R}^+$.

В данной статье на базе работ [6]–[10] исследованы вопросы разрешимости уравнений вида (1). Именно, построена теория Фредгольма в общем случае $(p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+)$, предложен и обоснован в смысле ([11], гл. 1) специальный прямой метод, приспособленный к приближенному решению уравнения (1), установлено, что построенный метод оптимален по порядку точности на классе F, порожденном классом H^r_ω, среди всех полиномиальных проекционных методов решения уравнений вида (1).

1. *Об основном пространстве.* Пусть $C \equiv C(I)$ — пространство непрерывных на $I \equiv [0,1]$ функций с обычной max-нормой и $p_1 \in \mathbb{R}^+$. Следуя [12], скажем, что $g \in C_0^{\{p_1\}}(I) \equiv C\{p_1; 0\}$, если существуют правые тейлоровские производные $g^{\{i\}}(0)$ $(i = \overline{1,[p_1]})$ в точке $t = 0$, причем в случае $p_1 \neq [p_1]$ ($[\cdot]$ — целая часть) существует конечный предел

$$
\lim_{t\to 0+} \left\{ \left[g(t) - \sum_{i=0}^{[p_1]} g^{\{i\}}(0) t^i / i! \right] t^{-p_1} \right\}
$$

(считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$).

Аналогично определяем линеал $C\{p_2;1\} \equiv C_1^{\{p_2\}}(I) \subset C$. А именно, будем говорить, что $g \in C\{p_2;1\}$, если существуют левые тейлоровские производные $g^{\{i\}}(1)$ $(i = \overline{1,[p_2]})$ в $t = 1$, причем при $p_2 \neq [p_2]$ существует

$$
\lim_{t\to 1-} \left\{ \left[g(t) - \sum_{j=0}^{[p_2]} g^{\{j\}}(1)(t-1)^j / j! \right] (1-t)^{-p_2} \right\}.
$$

Введем векторное пространство

$$X \equiv C\{p_1; p_2\} \equiv C^{\{p_1, p_2\}}(I) \equiv C\{p_1; 0\} \cap C\{p_2; 1\}.$$

Снабдим его нормой

$$\|g\|_X \equiv \|g\|_{1,2} \equiv \|\mathbb{T}g\|_C + \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{\lambda_j} |g^{\{i\}}(t_j)|, \tag{2}$$

где

$$\mathbb{T}g \equiv [g(t) - U_{m-1}(t)]/u(t) \equiv G(t) \in C, \tag{3}$$

$$U_{m-1}(t) \equiv U_{m-1}(g; t) \equiv \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{\lambda_j} g^{\{i\}}(t_j) R_{ji}(t), \quad m \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + 2,$$

$$U_{m-1}^{(i)}(t_j) = g^{\{i\}}(t_j), \quad G(t_j) \equiv \lim_{t \to t_j} G(t) \quad (i = \overline{0, \lambda_j}, \;\; j = \overline{1,2}; \;\; t_1 = 0, \;\; t_2 = 1),$$

$$\lambda_j \equiv \lambda(p_j) \;\; (j = \overline{1,2}), \quad \lambda(p) \equiv \begin{cases} p - 1 & (p = [p]); \\ [p] & (p \neq [p]), \end{cases}$$

R_{ji} — фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ (см., напр., [13]). Заметим, что элементы пространства $X \equiv C\{p_1; p_2\}$ суть функции вида

$$g(t) = u(t)G(t) + \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{\lambda_j} b_{ji} R_{ji}(t), \tag{4}$$

где $G = \mathbb{T}g \in C$, $b_{ji} = g^{\{i\}}(t_j)$ $(i = \overline{0, \lambda_j}$, $j = \overline{1,2})$. Отсюда ясно, что X с нормой (2) полно и вложено в C.

Следующее утверждение устанавливает критерий компактности множеств в пространстве X.

Теорема 1. *Множество $M \subset X$ относительно компактно в X тогда и только тогда, когда*

(i) *M ограничено*;
(ii) *семейство $\mathbb{T}(M)$ непрерывных на I функций равностепенно непрерывно.*

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 1.2.2 ([9], с. 31). Отличие заключается в том, что роль пространства $C\{m; 0\}$ и оператора T, фигурирующих в теореме 1.2.2, играют соответственно X и $\mathbb{T}$.

Пусть $K \in C(I^2)$ и при каждом фиксированном $s \in I$ функция $K(t, s) \in C\{p_1; p_2\}$. Скажем, что $K(t, s)$ принадлежит классу $C_t^{\{p_1; p_2\}}(I^2)$, если $\mathbb{T}_t K \in C$, где $\mathbb{T}_t$ обозначает оператор (3), примененный по аргументу t. Аналогично определяем класс $C_s^{\{p_1; p_2\}}(I^2)$. Тогда

$$C^{\{p_1; p_2\}}(I^2) \equiv C_t^{\{p_1; p_2\}}(I^2) \cap C_s^{\{p_1; p_2\}}(I^2).$$

2. *К теории приближения в пространстве* $X \equiv C\{p_1; p_2\}$. Пусть

$$\mathbb{H}_n \equiv \operatorname{span}\{t^i\}_0^n, \quad \mathbb{H}_{n+m-1}^{\mathbb{T}} \equiv U(\mathbb{H}_{n-1}) \oplus \mathbb{H}_{m-1}, \quad Uf \equiv (uf)(t),$$
$$E_{n+m-1}^{\mathbb{T}}(y) \equiv \inf_{y_n \in \mathbb{H}_{n+m-1}^{\mathbb{T}}} \|y - y_n\|_X \quad (y \in X).$$

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) $\forall y \in X \;\; \forall n \in \mathbf{N} \;\; \exists z_n \in \mathbb{H}_{n+m-1}^{\mathbb{T}} : \|y - z_n\|_X = E_{n+m-1}^{\mathbb{T}}(y)$;
(ii) $E_{n+m-1}^{\mathbb{T}}(y) = E_{n-1}(\mathbb{T}y)$ $(y \in X)$,

где $E_l(g)$ — наилучшее равномерное приближение функции $g \in C$ полиномами из $\mathbb{H}_l$ $(l \geq 0)$.

Доказательство осуществляется по схеме доказательства теоремы 1.5.2 ([9], с. 50) с учетом того, что здесь роль коэффициента $l(t)$ и оператора T играют $u(t)$ и $\mathbb{T}$ соответственно.

Теперь обсудим вопрос об аппроксимации функций из X элементами из $\mathbb{H}^{\mathbb{T}}_{n+m-1}$ ($n \in \mathbf{N}$) при помощи линейных операторов. Пусть $\Gamma_n : X \to \mathbb{H}^{\mathbb{T}}_{n+m-1}$ — произвольный линейный оператор, ставящий в соответствие всякой функции $y \in X$ некоторый агрегат вида

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-1}(y;t) \equiv u(t)\sum_{i=0}^{n-1} b_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} b_{i+n}t^i = u(t)\sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\lambda_j} \gamma_{ji}R_{ji}(t), \tag{5}$$

где $b_k = b_k(y)$, $\gamma_{ji} = \gamma_{ji}(y) \in \mathbb{R}$ ($k = \overline{0, n-1}$, $i = \overline{0, \lambda_j}$, $j = \overline{1,2}$). Тогда на основании представлений (4) и (5) ясно, что аппроксимация элемента $y \in X$ с помощью операторов Γ_n в смысле естественной метрики (2) равносильна равномерному приближению функции $\mathbb{T}y$ посредством линейных полиномиальных операторов $P_n : C \to \mathbb{H}_{n-1}$ и приближению коэффициентов $y^{\{i\}}(t_j)$ ($i = \overline{0, \lambda_j}$, $j = \overline{1,2}$) значениями линейных функционалов $\gamma_{ji}(y)$ ($i = \overline{0, \lambda_j}$, $j = \overline{1,2}$). Следовательно, приближающие операторы Γ_n имеют следующую структуру:

$$\Gamma_n y = (UP_n\mathbb{T}y)(t) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\lambda_j} y^{\{i\}}(t_j)R_{ji}(t). \tag{6}$$

Лемма. *Имеют место следующие утверждения*:

(i) $\Gamma_n^2 = \Gamma_n \iff P_n^2 = P_n$;

(ii) *если Γ_n — проектор, то* $\|\Gamma_n\|_{X\to X} \equiv \|\Gamma_n\| = \|P_n\| \equiv \|P_n\|_{C\to C}$.

Доказательство получается рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве лемм 1.5.1 и 1.5.2 ([9], с. 54–55) соответственно.

Теперь из леммы и теоремы 2 легко следует утверждение, устанавливающее одно из аппроксимативных свойств "полиномиального" оператора Γ_n в пространстве X.

Теорема 3. *Если $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, то для любой функции $y \in X$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_X \le d_1\|P_n\|E_{n-1}(\mathbb{T}y) \quad (n \in \mathbf{N})$$

(*здесь и далее d_i ($i = \overline{1,9}$) — вполне определенные константы, значение которых не зависит от n*).

Построим один "рабочий" линейный "полиномиальный" оператор, для которого найдено далее важное применение.

Пусть $\Gamma_n^0 : X \to \mathbb{H}^{\mathbb{T}}_{n+m-1}$ — линейное отображение, всякий образ $\Gamma_n^0 f$ которого характеризуется свойствами

$$\int_0^1 W_k(t)(\mathbb{T}\Gamma_n^0 f - \mathbb{T}f)(t)dt = 0 \quad (k = \overline{1,n}),$$
$$(\Gamma_n^0 f - f)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0,\lambda_j}, \quad j = \overline{1,2}),$$

где W_k — одна из следующих "весовых" функций в обобщенных методах коллокации (ОМК), моментов (ОММ), подобластей (ОМП):

(ОМК) $W_k(t) = \delta(t - \nu_k)$ (δ — дельта-функция Дирака, $\nu_k = \nu_k^{(n)} \in I$ — узлы Чебышева первого (или второго) рода),

(ОММ) $W_k(t) = \rho(t)T_{k-1}(t)$ ($\{T_{k-1}\}$ — полная ортонормированная на I по весу $\rho(t) = 2^{-1}(t - t^2)^{-1/2}$ система смещенных полиномов Чебышева первого рода),

(ОМП) $W_k(t) = \chi_{[\tau_{k-1},\tau_k]}(t) \equiv \begin{cases} 1 & (t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]); \\ 0 & (t \notin [\tau_{k-1}, \tau_k]), \end{cases}$ где $\{\tau_k\}_0^n$ — система узлов Чебышева второго рода, обогащенная концами промежутка I.

Рассуждая аналогично изложенному в пп. 5.3, 5.4 ([9], с. 55–58), выводим, что элемент $\Gamma_n^0 f$ имеет вид (6), где $P_n^0 : C \to \mathbb{H}_{n-1}$ обозначает оператор Лагранжа в случае (ОМК), оператор

Фурье при “весе” (ОММ) и оператор метода подобластей для (ОМП) “весовой” функции W_k. Тогда из леммы, теоремы 3 и хорошо известных свойств оператора P_n^0 следует

Теорема 4. *Оператор* Γ_n^0 *обладает свойствами*

(a) $(\Gamma_n^0)^2 = \Gamma_n^0$,
(b) $\|\Gamma_n^0\| \asymp \ln n$ $(n-1 \in \mathbf{N})$,
(c) $\|f - \Gamma_n^0 f\|_X \le d_2 E_{n-1}(\mathbb{T}f)\ln n$ $(f \in X \equiv C\{p_1;p_2\})$,

где символ $\asymp$ *означает, как обычно, слабую эквивалентность.*

3. *Фредгольмовость интегрального уравнения* (1). Рассмотрим уравнение (1), в котором K и y — известные непрерывные функции со следующими свойствами:

$$K \in C^{\{p_1;p_2\}}(I^2), \quad \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j,s), \quad \psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,t_j) \in X$$
$$(i=\overline{0,\lambda_j}, \;\; j=\overline{1,2}), \quad y \in X \equiv C\{p_1;p_2\}, \tag{7}$$

$x \in X$ — искомая функция.

Теорема 5. *В условиях* (7) *оператор* $K : X \to X$ *вполне непрерывен.*

Доказательство. В силу (1) и (3) имеем

$$(Kx)(t) = \int_0^1 K(t,s)(\mathbb{T}x)(s)ds + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\lambda_j} x^{\{i\}}(t_j)\Big[G_{ji}(t) + \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=0}^{\lambda_l}\beta_{ji}^{lk}\psi_{lk}(t)\Big], \tag{8}$$

где

$$G_{ji}(t) \equiv \int_0^1 R_{ji}(s)(\mathbb{T}_s K)(t,s)ds, \quad \beta_{ji}^{lk} \equiv \text{P.F.}\int_0^1 [R_{ji}(s)R_{lk}(s)/u(s)]ds.$$

Здесь знак “P.F.” указывает на конечную часть интеграла по Адамару ([1], с. 144–150) (в дальнейшем, для краткости, этот знак будем опускать). На основании (7), (4) и (3) функция K представляется в виде

$$K(t,s) = u(t)u(s)h(t,s) + u(t)\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\lambda_j}\Psi_{ji}(t)R_{ji}(s) + \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=0}^{\lambda_j}\varphi_{ji}(s)R_{ji}(t), \tag{9}$$

причем $h = \mathbb{T}_t\mathbb{T}_s K \in C$, $\Psi_{ji} = \mathbb{T}\psi_{ji} \in C$. Следовательно, в силу (9), (7) и (4) получим $G_{ji} \in X$ $(i=\overline{0,\lambda_j},\, j=\overline{1,2})$. Теперь с учетом (8) и (7) ясно, что $Kx \in X$ $(x \in X)$ и $\|Kx\|_X \le d_3\|x\|_X$,

$$d_3 \equiv \|\mathbb{T}_t K\|_C + \sum_j\sum_i \|\varphi_{ji}\|_C + \max_{i,j}\Big\{\|G_{ji}\|_X + \sum_l\sum_k |\beta_{ji}^{lk}|\,\|\psi_{lk}\|_X\Big\},$$

т. е. K действует в X ограниченно.

Пусть $L \equiv \{x\} \subset X$ — некоторое ограниченное множество: $\|x\|_X \le r$ $(x \in L)$. Тогда очевидно, что множество $M \equiv K(L) \subset X$ также ограничено.

Покажем, что для M выполняется и условие (ii) теоремы 1. Предварительно заметим следующее. Так как функции $H \equiv \mathbb{T}_t K$, $h \equiv \mathbb{T}_t\mathbb{T}_s K$ и $\Psi_{ji} \equiv \mathbb{T}\psi_{ji}$ $(i=\overline{0,\lambda_j},\, j=\overline{1,2})$ равномерно непрерывны на компактах I^2 и I соответственно, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что одновременно выполняются соотношения

$$\begin{cases} |H(\tau_1,s_1) - H(\tau_2,s_2)| < \varepsilon/(\gamma r), \\ |h(\tau_1,s_1) - h(\tau_2,s_2)| < \varepsilon/(\gamma r), \\ |\Psi_{ji}(\tau_1) - \Psi_{ji}(\tau_2)| < \varepsilon/(\gamma r), \end{cases} \tag{10}$$

как только $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, $|s_1 - s_2| < \delta$ $(\tau_i, s_i \in I,\, i=\overline{1,2})$. Здесь

$$\gamma \equiv 1 + \max_{i,j}\|R_{ji}\|_C + \max_{i,j}\sum_l\sum_k|\beta_{ji}^{lk}|.$$

Пусть $y \in M$ — произвольный элемент, т. е. $y = Kx$ $(x \in L)$. С учетом (8), (10) и (2) последовательно находим

$$|(\mathbb{T}y)(\tau_1) - (\mathbb{T}y)(\tau_2)| = \Big| \int_0^1 [H(\tau_1, s) - H(\tau_2, s)](\mathbb{T}x)(s)ds +$$
$$+ \sum_j \sum_i x^{\{i\}}(t_j) \Big\{ \int_0^1 R_{ji}(s)[h(\tau_1, s) - h(\tau_2, s)]ds +$$
$$+ \sum_l \sum_k \beta_{ji}^{lk} [\Psi_{lk}(\tau_1) - \Psi_{lk}(\tau_2)] \Big\} \Big| \le \gamma\varepsilon(\gamma r)^{-1}\|x\| \le \varepsilon,$$

коль скоро $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ $(\tau_1, \tau_2 \in I)$. Следовательно, оператор $K \in \mathcal{L}(X)$, переводящий произвольное ограниченное множество L в относительно компактное в X множество $K(L)$, вполне непрерывен. □

Следствие 1. При выполнении условий (7) оператор $A : X \to X$, определенный равенством (1), является фредгольмовым.

4. *Обобщенный метод взвешенных невязок* (ОМВН). Пусть дано уравнение (1). Ради простоты выкладок и формулировок будем считать $p_1 = 0$, т. е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv x(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \quad Kx \equiv \int_0^1 K(t,s)(1-s)^{-p_2}x(s)ds, \tag{11}$$

где исходные данные удовлетворяют следующим условиям:

$$K \in C_1^{\{p_2\}}(I^2); \quad \varphi_i(s) \equiv K_t^{\{i\}}(1,s), \ \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t,1) \in C\{p_2; 1\} \tag{12}$$
$$(i = \overline{0, m-1}, \ \ m \equiv \lambda_2 + 1), \ \ y \in C\{p_2; 1\},$$

$x \in C\{p_2; 1\}$ — искомая функция. Приближенное решение уравнения (11) образуем в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_i\}) \equiv (1-t)^{p_2} \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n}(t-1)^i. \tag{13}$$

Неизвестные параметры $\{c_i\}_0^{n+m-1}$ найдем согласно ОМВН из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\int_0^1 W_k(t)(\mathbb{T}Ax_n - \mathbb{T}y)(t)dt = 0 \quad (k = \overline{1, n});$$
$$(Ax_n - y)^{\{i\}}(1) = 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \tag{14}$$

где $\mathbb{T} : C\{p_2; 1\} \to C$ — “характеристический” оператор класса $C\{p_2; 1\}$, определенный в (3) при $p_1 = 0$ $(\lambda_1 \equiv -1)$, а W_k — любая из “весовых” функций, введенных в п. 2.

Для вычислительного алгоритма (11)–(14) справедлива

Теорема 6. *Пусть однородное уравнение $Ax = 0$ имеет в $C\{p_2; 1\}$ лишь тривиальное решение, а функции $h \equiv \mathbb{T}_t\mathbb{T}_sK$ (по t), $\mathbb{T}\psi_i$ $(i = \overline{0, m-1})$ и $\mathbb{T}y$ принадлежат классу Дини–Липшица. Тогда при всех $n \in \mathbf{N}$ $(n \ge n_0)$ СЛАУ (14) обладает единственным решением $\{c_i^*\}$, и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_i^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме пространства $C\{p_2; 1\}$ со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\Big\{ \Big[E_{n-1}^t(h) + \sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(\mathbb{T}\psi_i) + E_{n-1}(\mathbb{T}y) \Big] \ln n \Big\}, \tag{15}$$

где $E_{n-1}^t(\cdot)$ обозначает функционал $E_{n-1}(\cdot)$, примененный по t.

Доказательство. Интегральное уравнение (11) представляет собой линейное операторное уравнение вида

$$Ax \equiv x + Kx = y \quad (x, y \in X \equiv C\{p_2; 1\}). \tag{16}$$

Соответствующее конечномерное подпространство выберем следующим образом:

$$X \supset X_n = \mathbb{H}^{\mathbb{T}}_{n+m-1}.$$

Тогда система (13), (14) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma^0_n A x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, \ \ y_n \equiv \Gamma^0_n y \in X_n), \tag{17}$$

где $\Gamma^0_n : X \to X_n$ — линейный оператор, введенный и изученный в п. 2.

Найдем теперь меру близости операторов A и A_n на X_n. В силу (16), (17) и теоремы 4 для любого $x_n \in X_n$ последовательно находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_X = \|Kx_n - \Gamma^0_n K x_n\|_X \le d_2 E_{n-1}(\mathbb{T}Kx_n) \ln n. \tag{18}$$

На основании (11), (12) и (3) имеем

$$(Kx)(t) = \int_0^1 (\mathbb{T}_s K)(t, s) x(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(x) \psi_i(t),$$

$$\mathbb{R} \ni \lambda_i(x) \equiv \int_0^1 (\mathbb{T}x)(s)(s-1)^i (i!)^{-1} ds + \sum_{k=0}^{m-1} x^{\{k\}}(1) \beta_{ik},$$

$$\beta_{ik} \equiv \int_0^1 (s-1)^{i+k} (i!\, k!)^{-1} (1-s)^{-p_2} ds \quad (i = \overline{0, m-1}, \ \ k = \overline{0, m-1}).$$

Следовательно,

$$\mathbb{T}Kx_n = \int_0^1 h(t, s) x_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(x_n)(\mathbb{T}\psi_i)(t). \tag{19}$$

С целью приближения функции $\mathbb{T}Kx_n \in C$ посредством полиномов построим следующий агрегат:

$$(Q_n x_n)(t) \equiv \int_0^1 h^t_{n-1}(t, s) x_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(x_n) \Psi^i_{n-1}(t), \tag{20}$$

где h^t_{n-1} и Ψ^i_{n-1} обозначают полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для h (по t) и $\mathbb{T}\psi_i$ соответственно. По виду (20) ясно, что $Q_n x_n \in \mathbb{H}_{n-1}$. В силу соотношений (19), (20) и (2) последовательно выводим

$$E_{n-1}(\mathbb{T}Kx_n) \le \|\mathbb{T}Kx_n - Q_n x_n\|_C \equiv$$

$$\equiv \max_{t \in I} \left| \int_0^1 (h - h^t_{n-1})(t, s) x_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i(x_n)(\mathbb{T}\psi_i - \Psi^i_{n-1})(t) \right| \le$$

$$\le \|x_n\|_C E^t_{n-1}(h) + \sum_i |\lambda_i(x_n)| E_{n-1}(\mathbb{T}\psi_i) \le$$

$$\le \{\text{используем соотношения } \ \|x\|_C \le \|x\|_X, \ \ |\lambda_i(x)| \le (1 + \beta_i)\|x\|_X \ \ (x \in X),$$

$$\beta_i \equiv \max_{k = \overline{0, m-1}} |\beta_{ik}| \ \ (i = \overline{0, m-1})\} \le$$

$$\le \|x_n\|_X E^t_{n-1}(h) + \|x_n\|_X \sum_i (1 + \beta_i) E_{n-1}(\mathbb{T}\psi_i) \le$$

$$\le \{\text{введем обозначения } \ \beta \equiv \max_{i = \overline{0, m-1}} (1 + \beta_i), \ \ d_4 \equiv \max\{1, \beta\}\} \le$$

$$\leq d_4\Big[E^t_{n-1}(h)+\sum_i E_{n-1}(\mathbb{T}\psi_i)\Big]\|x_n\|_X. \tag{21}$$

Из (18) и (21) следует

$$\varepsilon_n \equiv \|A-A_n\|_{X_n\to X} \leq d_5\left[E^t_{n-1}(h)+\sum_{i=0}^{m-1} E_{n-1}(\mathbb{T}\psi_i)\right]\ln n. \tag{22}$$

На основании неравенств (22) и (c) теоремы 4 из теоремы 7 ([11], гл. 1) получаем утверждение теоремы 6 с оценкой (15). $\square$

Следствие 2. Если h (по t), $\mathbb{T}\psi_i, \mathbb{T}y \in H^r_\alpha(E)$, то в условиях теоремы 6 верна оценка

$$\|x^*_n - x^*\| = O(n^{-r-\alpha}\ln n) \quad (r+1\in\mathbf{N},\ \ \alpha\in(0,1]),$$

где $H^r_\alpha(E)\equiv\{f\in C^{(r)}(I)\mid \omega(f^{(r)};\Delta)\leq E\Delta^\alpha,\ E=\mathrm{const}>0\}$, $\omega(f;\Delta)$ — модуль непрерывности функции f в точке Δ $(0<\Delta\leq 1)$.

5. *Постановка задачи оптимизации проекционных методов.* Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их произвольные подпространства одинаковой размерности $\mathcal{N}=\mathcal{N}(n)<\infty$ $(n\in\mathbf{N})$, причем $\mathcal{N}\to\infty$ $(n\to\infty)$. Пусть $\mathcal{T}_n=\{\Gamma_n\}$ — некоторое множество линейных операторов Γ_n, отображающих Y на Y_n. Рассмотрим классы однозначно разрешимых линейных операторных уравнений вида

$$Ax=y \quad (x\in X,\ \ y\in Y), \tag{23}$$

$$\Gamma_n A x_n = \Gamma_n y \quad (x_n\in X_n,\ \ \Gamma_n\in\mathcal{T}_n,\ \ n\in\mathbf{N}) \tag{24}$$

соответственно. Далее, пусть $x^*\in X$ и $x^*_n\in X_n$ — решения уравнений (23) и (24) соответственно, а $F=\{f\}$ — класс коэффициентов уравнения (23), порождающий класс $X^*=\{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя ([11], с. 40), величину

$$V_{\mathcal{N}}(F)\equiv\inf_{X_n,Y_n}\inf_{\Gamma_n\in\mathcal{T}_n} V(F;\Gamma_n;X_n,Y_n), \tag{25}$$

где

$$V(F;\Gamma_n;X_n,Y_n)\equiv\sup_{f\in F}V(f;\Gamma_n;X_n,Y_n)=\sup_{x^*\in X^*}\|x^*-x^*_n\|_X,$$

назовем оптимальной оценкой погрешности всевозможных проекционных методов $(\Gamma_n\in\mathcal{T}_n)$ решения уравнения (23) на классе F.

Определение ([11], с. 40). Пусть существуют $X^0_n\subset X$, $Y^0_n\subset Y$ размерности $\mathcal{N}(n)<\infty$ и операторы $\Gamma^0_n: Y\to Y^0_n$ $(\Gamma^0_n\in\mathcal{T}_n)$, при которых

$$V_{\mathcal{N}}(F)\asymp V(F;\Gamma^0_n;X^0_n,Y^0_n) \quad (\mathcal{N}\to\infty). \tag{26}$$

Тогда метод (23), (24) при $X_n=X^0_n$, $Y_n=Y^0_n$, $\Gamma_n=\Gamma^0_n$ называется оптимальным по порядку на классе F среди всех проекционных методов Γ_n $(\Gamma_n\in\mathcal{T}_n)$ решения уравнений (23).

6. *К оптимизации проекционных методов решения исследуемых уравнений.* Рассмотрим оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K\in F$) уравнений вида (11) при $\mathbb{T}_sK$ (по t), ψ_i $(i=\overline{0,m-1})$,

$$y\in C^{\{p_2\}}_1H^r_\omega\equiv\{g\in C\{p_2;1\}\mid \mathbb{T}g\in H^r_\omega\},$$

где $H^r_\omega\equiv\{f\in C^{(r)}\mid\omega(f^{(r)};\Delta)\leq\omega(\Delta)\}$, $\omega=\omega(\Delta)$ — некоторый заданный модуль непрерывности. Тогда, очевидно, имеем

$$X^*\equiv\{x^*\in X\mid Ax^*=y;\ \ \mathbb{T}_sK,\psi_i,y\in C^{\{p_2\}}_1H^r_\omega\}=C^{\{p_2\}}_1H^r_{\omega^*},$$

$$\omega^*\equiv e^*\omega \quad (1\leq e^*=\mathrm{const}).$$

Пусть $X_n^0 = \mathbb{H}_{n+m-1}^{\mathbb{T}}$, а $\mathcal{T}_n^{(2)} = \{\Gamma_n\}$ — семейство всех линейных проекционных ($\Gamma_n = \Gamma_n^2$) операторов $\Gamma_n : X \to X_n^0$, удовлетворяющих условию

$$\|\Gamma_n\| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1) \quad (n \to \infty).$$

Иными словами, будем рассматривать оптимизацию "полиномиальных" проекционных методов решения уравнения (11) в пространстве $X \equiv C\{p_2; 1\}$. Справедлива

Теорема 7. *Пусть $F = C_1^{\{p_2\}} H_\omega^r$ и $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n^{(2)}$. Тогда*

$$V_{\mathcal{N}}(F) \asymp \mathcal{N}^{-r}\omega(\mathcal{N}^{-1}) \ln \mathcal{N} \quad (\mathcal{N} = n + m), \tag{27}$$

и предложенный ОМВН оптимален по порядку на классе F среди всех проекционных методов $\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)}$ решения уравнения (11) в пространстве X.

Доказательство. Интегральное уравнение (11) при $K = 0$ принадлежит исследуемому классу однозначно разрешимых в X уравнений. Поэтому для получения оценки (27) можно использовать способ, предложенный в ([11], с. 171). С учетом (25), (4), (6), (2) и соответствующих результатов п. 2 имеем

$$V_{\mathcal{N}}(F) \geq \inf_{\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)}} \sup_{x^* \in C_1^{\{p_2\}} H_\omega^r} \|x^* - x_n^*\|_X =$$
$$= \inf_{\Gamma_n} \sup_{y \in C_1^{\{p_2\}} H_\omega^r} \|y - \Gamma_n y\|_X = \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}} \sup_{\mathbb{T}y \in H_\omega^r} \|\mathbb{T}y - P_n \mathbb{T}y\|_C, \tag{28}$$

где $\mathcal{P}_n^{(2)} \equiv \{P_n \mid P_n : C \to \mathbb{H}_{n-1},\ P_n^2 = P_n,\ \|P_n\| n^{-r}\omega(n^{-1}) = o(1)\ (n \to \infty)\}$. На основании (6) и леммы очевидно, $\Gamma_n \in \mathcal{T}_n^{(2)} \iff P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$. Известно ([11], с. 171), что

$$\inf_{P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}} \sup_{z \in H_\omega^r} \|z - P_n z\|_C \geq d_6 n^{-r}\omega(n^{-1}) \ln n,$$

откуда и из (28) находим нижнюю оценку

$$V_{\mathcal{N}}(F) \geq d_7 \mathcal{N}^{-r}\omega(\mathcal{N}^{-1}) \ln \mathcal{N}. \tag{29}$$

С другой стороны, согласно результатам п. 4 ОМВН порождает свой проекционный оператор $\Gamma_n^0 : X \to X_n^0$, причем в силу (a) и (b) теоремы 4, очевидно, $\Gamma_n^0 \in \mathcal{T}_n^{(2)}$. Следовательно, благодаря теореме 6 и теореме Джексона (напр., [14], с. 86), последовательно выводим

$$V_{\mathcal{N}}(F) \leq V(F; \Gamma_n^0; \mathbb{H}_{n+m-1}^{\mathbb{T}}) = \sup_{x^* \in C_1^{\{p_2\}} H_{\omega^*}^r} \|x^* - x_n^0\|_X \leq$$
$$\leq d_8 n^{-r}\omega(n^{-1}) \ln n \leq d_9 \mathcal{N}^{-r}\omega(\mathcal{N}^{-1}) \ln \mathcal{N} \quad (\Gamma_n^0 A x_n^0 = \Gamma_n^0 y). \tag{30}$$

Теперь из (26), (29) и (30) следует утверждение теоремы 7 с оценкой (27). $\square$

Следствие 3. Если $F = C_1^{\{p_2\}} H_\alpha^r(E)$, то верна оценка

$$V_{\mathcal{N}}(F) \asymp E \mathcal{N}^{-r-\alpha} \ln \mathcal{N} \quad (\mathcal{N} = n + m)$$

и ОМВН оптимален по порядку на классе F среди всех "полиномиальных" проекционных методов решения уравнения (11) в $C\{p_2; 1\}$.

7. *Заключительные замечания.*

Замечание 1. Поскольку $C\{0; 1\} \equiv C$, при $p_2 = 0$ интегральное уравнение (11) превращается в уравнение второго рода в C, а предложенный метод (14) — в соответствующий известный метод (коллокации, моментов или подобластей соответственно), причем $\mathbb{T}y \equiv y$ и $h \equiv K$. Поэтому оценка теоремы 6 хорошо согласуется с соответствующей уравнению второго рода оценкой (см., напр., [15], [16]).

Замечание 2. В заключение отметим, что уравнение (1) можно исследовать и другим способом. Именно, путем замены искомой функции исходное уравнение приводится к интегральному уравнению Фредгольма третьего рода, решение которого отыскивается в некотором пространстве обобщенных функций. Тогда требуемые результаты можно вывести из соответствующих результатов автора по уравнениям третьего рода. При этом возникают дополнительные условия на ядро $K(t,s)$ в виде требований точечной "гладкости" некоторых интегралов. Кроме этого, необходимо предварительно получить окончательные в смысле ([11], с. 40) результаты для соответствующего интегрального уравнения третьего рода.

Литература

1. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – 351 с.
2. Векуа Н.П. *Интегральные уравнения типа Фредгольма с интегралом в смысле Адамара* // Тр. Матем. ин-та АН Груз ССР. – Тбилиси, 1940. – Т. 7. – С. 113–148.
3. Бжихатлов Х.Г. *Об одной смешанной краевой задаче для уравнения параболо-гиперболического типа* // Сб. научн. работ аспирантов. – Нальчик, 1971. – Вып. 3. – С. 7–9.
4. Бжихатлов Х.Г. *Об одной краевой задаче со смещением* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 1. – С. 162–165.
5. Расламбеков С.Н. *Теория линейных интегральных уравнений третьего рода в классах обобщенных функций и других функциональных пространствах*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Ростов-на-Дону, 1987. – 99 с.
6. Габбасов Н.С. *Оптимальный проекционный метод решения одного класса интегральных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 2. – С. 333–335.
7. Габбасов Н.С. *Методы решения одного класса интегральных уравнений* III *рода* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 5. – С. 19–28.
8. Габбасов Н.С. *К теории линейных интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1192–1201.
9. Габбасов Н.С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1996. – 318 с.
10. Габбасов Н.С. *Оптимальный метод решения интегральных уравнений третьего рода* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 362. – № 1. – С. 12–15.
11. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
12. Пресдорф З. *Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек* // Матем. исследования. – Кишинев, 1972. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 116–132.
13. Гончаров В.Л. *Теория интерполирования и приближения функций.* – М.: Гостехиздат, 1954. – 328 с.
14. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1977. – 184 с.
15. Габдулхаев Б.Г. *Некоторые вопросы приближенных методов* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1968. – Кн. 128. – № 5. – С. 20–29.
16. Ермолаева Л.Б. *Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 137 с.

Набережночелнинский государственный
педагогический институт

Поступила
27.04.1999