ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.958:539.3

В.Н. ПАЙМУШИН

ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛОСКИХ ФОРМАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Рассматривается линейная задача о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями, свободными от усилий. Методом, предложенным в [1], при использовании в качестве базисных функций комбинаций из двойных и одинарных тригонометрических функций построены такие аппроксимирующие функции для перемещений, которые точно удовлетворяют граничным условиям свободного края пластины. На их основе с использованием вариационных уравнений метода Бубнова, структура которых зависит от структуры построенных аппроксимирующих функций для перемещений, найдены аналитические решения рассматриваемой задачи, из которых одни решения совпадают с точными аналитическими решениями, полученными в статье [1], а другие по определению являются приближенными. Показано, что некоторые из приближенных решений, как частный случай, содержат в себе точные аналитические решения, полученные в статье [1].

1. Постановка задачи

Как и в [1], рассматривается линейная задача о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины со свободными незакрепленными краями, имеющей длину a, ширину b и выполненной из ортотропного материала с характеристиками E_1, E_2, G_{12}, ν_{12}, ν_{21}. Данная задача при введении безразмерных упругих параметров g_1, g_2 и параметра круговой частоты свободных колебаний Ω [1] описывается системой однородных уравнений

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+\nu_{21}g_1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Omega^2 u = 0,\\ f_2 &= g_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1+\nu_{12}g_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Omega^2 v = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, a;\\ &\frac{\partial \nu}{\partial y} + \nu_{12}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, b. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Если для входящих в (1.1), (1.2) неизвестных u, v построены аппроксимирующие функции, точно удовлетворяющие граничным условиям (1.2), то для интегрирования уравнений (1.1) имеет место вариационное уравнение метода Бубнова

$$\int_0^a\int_0^b (f_1\delta u + f_2\delta v)dx\,dy = 0, \tag{1.3}$$

где f_1 и f_2 — левые части уравнений (1.1).

2. Решения задачи при четных значениях n и k в тригонометрических базисных функциях

Используя результаты работы [1], с точностью до жестких смещений представим функции u и v в виде

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1)\sin\lambda_n x + \\ &\quad + (U_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{U}_{nk}\cos\lambda_k y + C_2)\cos\lambda_n x + U_k\sin\lambda_k y + \widetilde{U}_k\cos\lambda_k y, \\ v &= (v_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{v}_{nk}\cos\lambda_k y + C_3)\sin\lambda_n x + (V_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y + C_4)\cos\lambda_n x + \\ &\quad + V_k\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_k\cos\lambda_k y, \quad \lambda_n = n\pi/a, \quad \lambda_k = k\pi/b, \end{aligned} \tag{2.1}$$

и подчиним их граничным условиям (1.2). В результате при четных значениях n и k получим равенства

$$\lambda_n C_1 = 0, \quad \lambda_k V_k = 0, \quad \lambda_n C_3 = 0, \quad \lambda_k V_k = 0, \tag{2.2}$$

а при их учете — зависимости

$$\begin{gathered} \widetilde{V}_k = \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}u_{nk} - \widetilde{V}_{nk}, \quad C_2 = \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}v_{nk} - \widetilde{U}_{nk}, \quad U_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}, \\ \widetilde{U}_k = \frac{\lambda_n}{\lambda_k}v_{nk} - \widetilde{U}_{nk}, \quad C_4 = \frac{\lambda_k}{\lambda_n}u_{nk} - \widetilde{V}_{nk} \end{gathered} \tag{2.3}$$

и систему однородных алгебраических уравнений

$$\lambda_n\widetilde{u}_{nk} + \nu_{21}\lambda_k V_{nk} = 0, \quad \nu_{12}\lambda_n\widetilde{u}_{nk} + \lambda_k V_{nk} = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $\widetilde{u}_{nk} \neq 0$, $V_{nk} \neq 0$ при выполнении условия $\lambda_n\lambda_k = 0$, и при этом

$$V_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\widetilde{u}_{nk} = -\frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}. \tag{2.5}$$

Используя теперь зависимости (2.3) и (2.5), функции (2.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1)\sin\lambda_n x + \\ &\quad + \left[-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{U}_{nk}\cos\lambda_k y + \left(\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}v_{nk} - \widetilde{U}_{nk}\right)\right]\cos\lambda_n x + \\ &\quad + U_k\sin\lambda_k y + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k}v_{nk} - \widetilde{U}_{nk}\right)\cos\lambda_k y, \\ v &= (v_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{v}_{nk}\cos\lambda_k y + C_3)\sin\lambda_n x + \\ &\quad + \left[-\frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n}u_{nk} - \widetilde{V}_{nk}\right)\right]\cos\lambda_n x + \\ &\quad + V_k\sin\lambda_k y + \left(\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}u_{nk} - \widetilde{V}_{nk}\right)\cos\lambda_k y, \end{aligned} \tag{2.6}$$

в которых $C_1 \neq 0$, $C_3 \neq 0$ при $\lambda_n = 0$, $V_k \neq 0, U_k \neq 0$ при $\lambda_k = 0$, а $\widetilde{u}_{nk} \neq 0$ при $\lambda_n = 0$ или $\lambda_k = 0$.

В рассматриваемом случае вариационное уравнение (1.3) в силу структуры функций (2.6) эквивалентно десяти уравнениям метода Бубнова:

$$\int_0^a\int_0^b f_1\sin\lambda_n x\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta C_1 \neq 0, \tag{2.7}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_1\sin\lambda_k y\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta U_k \neq 0, \tag{2.8}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_2\sin\lambda_n x\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta C_3 \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\int_0^a \int_0^b f_2 \sin\lambda_k y \, dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta V_k \neq 0, \tag{2.10}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(f_1 \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k} f_2 \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x \right) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{u}_{nk} \neq 0, \tag{2.11}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(f_1 \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x + \frac{\lambda_k}{\lambda_n} f_2 \cos\lambda_n x + \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k} f_2 \cos\lambda_k y \right) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_{nk} \neq 0, \tag{2.12}$$

$$\int_0^a \int_0^b (f_2 \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x - f_2 \cos\lambda_n x - f_2 \cos\lambda_k y) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{V}_{nk} \neq 0, \tag{2.13}$$

$$\int_0^a \int_0^b (f_1 \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x - f_1 \cos\lambda_n x - f_1 \cos\lambda_k y) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{U}_{nk} \neq 0, \tag{2.14}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} f_1 \cos\lambda_n x + \frac{\lambda_n}{\lambda_k} f_1 \cos\lambda_k y + f_2 \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x \right) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta v_{nk} \neq 0, \tag{2.15}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k} f_1 \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x + f_2 \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x \right) dx \, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{v}_{nk} \neq 0, \tag{2.16}$$

в которых

$$\begin{aligned} f_1 = {} & (-g_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \Omega^2) u_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x + (-\widetilde{g}_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2 + \\ & + \Omega^2)\widetilde{u}_{nk} \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x + \left(g_1 \frac{\lambda_n^3}{\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k\nu_{21} g_1 - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2 \right) \widetilde{v}_{nk} \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x + \\ & + (-g_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{U}_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x + (g_1\lambda_n^2 - \Omega^2)\widetilde{U}_{nk} \cos\lambda_n x + \\ & + (\lambda_k^2 - \Omega^2)\widetilde{U}_{nk} \cos\lambda_k y + \left(-g_1 \frac{\lambda_n\lambda_k}{\nu_{12}} + \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}\Omega^2 \right) v_{nk} \cos\lambda_n x + \\ & + \left(-\lambda_n\lambda_k + \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2 \right) v_{nk} \cos\lambda_k y + \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{21} g_1) v_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x + \\ & + (-\lambda_k^2 + \Omega^2) U_k \sin\lambda_k y + \Omega^2 C_1 \sin\lambda_n x + \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{21} g_1)\widetilde{V}_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x, \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & (-g_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + \Omega^2) v_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x + (-g_2\lambda_k^2 + \\ & + \nu_{12} g_2 \lambda_n^2 + \Omega^2)\widetilde{v}_{nk} \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x + \left(\frac{\nu_{12}\lambda_n^3}{\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k - \right. \\ & \left. - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2 \right) \widetilde{u}_{nk} \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x + (-g_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x + \\ & + (\lambda_n^2 - \Omega^2)\widetilde{V}_{nk} \cos\lambda_n x + (g_2\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_{nk} \cos\lambda_k y + \\ & + \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{12} g_2)\widetilde{U}_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x + \left(-g_2 \frac{\lambda_k\lambda_n}{\nu_{21}} + \Omega^2 \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k} \right) u_{nk} \cos\lambda_k y + \\ & + \left(-\lambda_n\lambda_k + \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2 \right) u_{nk} \cos\lambda_n x + \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{12} g_2) u_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x + \\ & + (-g_2\lambda_k^2 + \Omega^2) V_k \sin\lambda_k y + (-\lambda_n^2 + \Omega^2) C_3 \sin\lambda_n x. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Из составленных уравнений первые четыре уравнения (2.7)–(2.10) в силу (2.2) имеют только тривиальные решения $C_1 = 0$, $V_k = 0$, $C_3 = 0$, $U_k = 0$. Уравнение (2.11) при подстановке (2.17) и (2.18) примет вид

$$\left[-\widetilde{g}_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2 + \Omega^2 - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k} \left(\frac{\nu_{12}\lambda_n^3}{\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2 \right) \right] \widetilde{u}_{nk} = 0. \tag{2.19}$$

В первом случае, когда $\lambda_n = 0$, $\lambda_k \neq 0$, из (2.19) следует формула $\Omega^2 = \lambda_k^2$, которая соответствует чисто сдвиговой форме колебаний [1]. Однако, при этом, как видно из (2.6), $u = v = 0$. Во втором случае, когда $\lambda_k = 0$, $\lambda_n \neq 0$, приходим к аналогичной формуле $\Omega^2 = \lambda_n^2$. При этом $u = \widetilde{u}_{nk} \sin \lambda_n x$, $v = -\nu_{12}\lambda_n y \widetilde{u}_{nk} \cos \lambda_n x$.

Из (2.16) при подстановке (2.17) и (2.18) в силу $\widetilde{v}_{nk} \neq 0$, когда

$$u = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk} \sin \lambda_k y \cos \lambda_n x, \quad v = \widetilde{v}_{nk} \cos \lambda_k y \sin \lambda_n x, \tag{2.20}$$

следует полученная в [1] формула (2.20), т. е., как было установлено ранее, она справедлива как при четных, так и нечетных значениях n и k, хотя, если сравнить выражения (2.21) статьи [1] и выражения (2.20), соответствующие им формы колебаний имеют разные амплитудные значения.

При подстановке (2.17) и (2.18) в (2.12) и (2.13) приходим к системе двух однородных алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}\left[-\left(g_1\lambda_n^2 + 3\lambda_k^2 + 2g_2\frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}^2}\right) + \left(1 + \frac{2\lambda_k^2}{\lambda_n^2} + \frac{2\lambda_n^2}{\nu_{21}^2\lambda_k^2}\right)\Omega^2\right]u_{nk} + \lambda_n\lambda_k(1+\nu_{21}g_1)\widetilde{V}_{nk} = 0,\\ \left[\lambda_n\lambda_k\left(3 + \nu_{12}g_2 + \frac{2g_2}{\nu_{21}}\right) - 2\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\right)\Omega^2\right]u_{nk} + (-g_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_{nk} = 0,\end{gathered} \tag{2.21}$$

из условия нетривиальности решения которой следует квадратное относительно Ω^2 характеристическое уравнение

$$a_1\Omega^4 + b_1\Omega^2 + c_1 = 0, \tag{2.22}$$

где

$$\begin{gathered}a_1 = 1 + 2\left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda_n^2} + \frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}^2\lambda_k^2}\right),\\ b_1 = -\left(g_1\lambda_n^2 + 3\lambda_k^2 + 2g_2\frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}^2}\right) - a_1(g_2\lambda_k^2 + \lambda_n^2) + 2\lambda_n\lambda_k(1+\nu_{21}g_1)\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\right),\\ c_1 = (g_2\lambda_k^2 + \lambda_n^2)\left(g_1\lambda_n^2 + 3\lambda_k^2 + 2g_2\frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}^2}\right) - \lambda_n^2\lambda_k^2(1+\nu_{21}g_1)\left(3 + \nu_{12}g_2 + \frac{2g_2}{\nu_{21}}\right).\end{gathered} \tag{2.23}$$

И, наконец, при подстановке (2.17) и (2.18) в (2.14), (2.15) также приходим к системе двух алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}(-g_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{U}_{nk} + \left[\lambda_n\lambda_k\left(3 + \nu_{21}g_1 + \frac{2g_1}{\nu_{12}}\right) - 2\left(\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right)\Omega^2\right]v_{nk} = 0,\\ \lambda_n\lambda_k(1+\nu_{12}g_2)\widetilde{U}_{nk} + \left[-\left(g_2\lambda_k^2 + 3\lambda_n^2 + 2g_1\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}^2}\right) + \left(1 + \frac{2\lambda_k^2}{\nu_{12}^2\lambda_n^2} + \frac{2\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right)\Omega^2\right]v_{nk} = 0,\end{gathered} \tag{2.24}$$

структура которой аналогична структуре уравнений (2.21). Из условия $v_{nk} \neq 0$, $\widetilde{U}_{nk} \neq 0$ система (2.24) доставляет характеристическое уравнение

$$a_2\Omega^4 + b_2\Omega^2 + c_2 = 0, \tag{2.25}$$

в котором

$$\begin{gathered}a_2 = 1 + 2\left(\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}\lambda_n^2} + \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k^2}\right),\\ b_2 = -\left(g_2\lambda_k^2 + 3\lambda_n^2 + 2g_1\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}^2}\right) - a_2(g_1\lambda_n^2 + \lambda_k^2) + 2\lambda_n\lambda_k(1+\nu_{12}g_2)\left(\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right),\\ c_2 = (g_1\lambda_n^2 + \lambda_k^2)\left(g_2\lambda_k^2 + 3\lambda_n^2 + 2g_1\frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}^2}\right) - \lambda_n^2\lambda_k^2(1+\nu_{12}g_2)\left(3 + \nu_{21}g_1 + \frac{2g_1}{\nu_{12}}\right).\end{gathered} \tag{2.26}$$

Заметим, что в свете результатов и определений, приведенных в [1], построенные решения, относящиеся к неизвестным u_{nk}, $\widetilde{V}_{nk}$, $\widetilde{U}_{nk}$, v_{nk}, являются приближенными.

3. Решения задачи при нечетных значениях n и четных значениях k в тригонометрических базисных функциях

Наряду с вариантами решений, когда выполняются равенства $\cos 0 = -\cos\lambda_n a$, $\cos 0 = -\cos\lambda_k b$ (n, k — нечетные числа [1]), а также $\cos 0 = \cos\lambda_n a$, $\cos 0 = \cos\lambda_k b$ (n, k — четные числа, см. раздел 2), необходимо построить еще два варианта решений, когда $\cos 0 = -\cos\lambda_n a$, $\cos 0 = \cos\lambda_k b$ и $\cos 0 = \cos\lambda_n a$, $\cos 0 = -\cos\lambda_k b$. Рассмотрим здесь случай, когда n и k принимают, соответственно, нечетные и четные значения, что позволяет при подчинении (2.1) граничным условиям (1.2) установить равенства

$$\lambda_n C_1 = 0, \quad \lambda_n C_3 = 0, \quad \lambda_k \widetilde{V}_k = 0, \quad \lambda_k V_k = 0, \quad \lambda_k \widetilde{U}_k = 0, \quad \lambda_k U_k = 0, \tag{3.1}$$

а также зависимости

$$\begin{gathered} V_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}, \quad \widetilde{V}_{nk} = \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}u_{nk}, \quad \widetilde{U}_{nk} = \frac{\lambda_n}{\lambda_k}v_{nk}, \quad U_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}, \\ C_4 = r_1 u_{nk}, \quad C_2 = r_2 v_{nk}, \quad r_1 = \frac{\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2}{\nu_{21}\lambda_n\lambda_k}, \quad r_2 = \frac{\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2}{\nu_{12}\lambda_n\lambda_k}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

причем на неизвестную $\widetilde{u}_{nk}$ для удовлетворения граничным условиям необходимо наложить условие

$$\widetilde{u}_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_n = 0. \tag{3.3}$$

При подстановке (3.2) в (2.1) приходим к функциям

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1)\sin\lambda_n x + \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}\sin\lambda_k y + \frac{\lambda_n}{\lambda_k}v_{nk}\cos\lambda_k y + r_2 v_{nk}\right)\cos\lambda_n x + U_k\sin\lambda_k y + \widetilde{U}_k\cos\lambda_k y, \\ v &= (v_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{v}_{nk}\cos\lambda_k y + C_3)\sin\lambda_n x + \\ &\quad + \left(-\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y + \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}u_{nk}\cos\lambda_k y + r_1 u_{nk}\right)\cos\lambda_n x + V_k\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_k\cos\lambda_k y, \end{aligned} \tag{3.4}$$

в соответствии с которыми должны быть составлены уравнения метода Бубнова следующих видов:

$$\int_0^a\int_0^b f_1\sin\lambda_n x\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta C_1 \neq 0, \tag{3.5}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_1\sin\lambda_k y\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta U_k \neq 0, \tag{3.6}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_1\cos\lambda_k y\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{U}_k \neq 0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_2\sin\lambda_n x\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta C_3 \neq 0, \tag{3.8}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_2\sin\lambda_k y\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta V_k \neq 0, \tag{3.9}$$

$$\int_0^a\int_0^b f_2\cos\lambda_k y\,dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{V}_k \neq 0, \tag{3.10}$$

$$\int_0^a\int_0^b \left(f_1\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x + \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}f_2\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x + r_1 f_2\cos\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_{nk} \neq 0, \tag{3.11}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_k} f_1 \cos\lambda_n x \cos\lambda_k y + r_2 f_1 \cos\lambda_n x + f_2 \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x\right) dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta v_{nk} \neq 0, \tag{3.12}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(f_1 \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k} f_2 \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x\right) dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{u}_{nk} \neq 0, \tag{3.13}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k} f_1 \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x + f_2 \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x\right) dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta \widetilde{v}_{nk} \neq 0, \tag{3.14}$$

причем в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} f_1 = {} & \left(-\lambda_k^2 + \frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}} + \Omega^2\right)(u_{nk} \sin\lambda_n x \sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk} \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x) + \\ & + \left(g_1 \frac{\lambda_n^3}{\lambda_k} - \nu_{21} g_1 \lambda_n \lambda_k - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2\right)(\widetilde{v}_{nk} \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x - v_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x) + \\ & + (-g_1\lambda_n^2 + \Omega^2) r_2 v_{nk} \cos\lambda_n x + (-g_1\lambda_n^2 + \Omega^2) C_1 \sin\lambda_n x + \\ & + (-\lambda_k^2 + \Omega^2) U_k \sin\lambda_k y + (-\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{U}_k \cos\lambda_k y, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & (-g_2\lambda_k^2 + \nu_{12} g_2 \lambda_n^2 + \Omega^2)(v_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x + \widetilde{v}_{nk} \cos\lambda_k y \sin\lambda_n x) + \\ & + \left[g_2 \frac{\lambda_n \lambda_k}{\nu_{21}} + \frac{\lambda_n^3}{\nu_{21}\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{12} g_2) - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\Omega^2\right](\widetilde{u}_{nk} \sin\lambda_k y \cos\lambda_n x - \\ & - u_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x) + (-\lambda_n^2 + \Omega^2) r_1 u_{nk} \cos\lambda_n x + (-\lambda_n^2 + \Omega^2) C_3 \sin\lambda_n x + \\ & + (-g_2\lambda_k^2 + \Omega^2) V_k \sin\lambda_k y + (-g_2\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_k \cos\lambda_k y. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Первые шесть уравнений (3.5)–(3.10), как и в разделе 2, в силу (3.1) имеют только тривиальные решения $C_1 = U_k = \widetilde{U}_k = C_3 = V_k = \widetilde{V}_k = 0$. Последнее уравнение (3.14), полностью совпадающее с уравнением (2.16), приводит к формуле (2.20) статьи [1], соответствующей решению вида (2.20). В данном случае в нем n — нечетные, а k — четные числа.

Уравнение (3.13) при подстановке (3.15) и (3.16) приводится к виду

$$\left\{-\lambda_k^2 + \frac{\lambda_n^2}{\nu_{21}} + \Omega^2 - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\left[g_2 \frac{\lambda_n\lambda_k}{\nu_{21}} + \frac{\lambda_n^3}{\nu_{21}\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k(1 + \nu_{12} g_2) - \frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\Omega^2\right]\right\}\widetilde{u}_{nk} = 0,$$

из которого с учетом условия (3.3) следует формула $\Omega^2 = \lambda_k^2$. Однако при этом $u \equiv 0$ и $v \equiv 0$.

И, наконец, из уравнений (3.11) и (3.12) при условиях $u_{nk} \neq 0$ и $v_{nk} \neq 0$ следуют еще две формулы для определения Ω^2:

$$\Omega^2 = \frac{[\widetilde{g}_2 \lambda_n^2 \lambda_k^2 + 3(\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2)^2]\lambda_n^2}{2(\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2)^2 + (\lambda_n^2 + \nu_{21}^2\lambda_k^2)\lambda_n^2}, \tag{3.17}$$

$$\Omega^2 = \frac{\{g_1[\nu_{12}^2\lambda_n^4 + 2(\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2)^2] + g_2\nu_{12}^2\lambda_k^2(\lambda_k^2 - 2\nu_{12}\lambda_n^2)\}\lambda_n^2}{\nu_{12}^2\lambda_n^2(\lambda_k^2 + \lambda_n^2) + 2(\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2)^2}, \tag{3.18}$$

которые дополняют указанную выше формулу (2.20) статьи [1] и, судя по структуре содержащихся в (3.4) соответствующих функций, являются приближенными.

4. Решения задачи при четных значениях n и нечетных значениях k в тригонометрических базисных функциях

В рассматриваемом случае при подчинении функций (2.1) граничным условиям (1.2) вместо (3.1) устанавливаются равенства

$$\lambda_n C_1 = 0, \quad \lambda_n C_2 = 0, \quad \lambda_n C_4 = 0, \quad \lambda_k U_k = 0, \quad \lambda_k V_k = 0, \tag{4.1}$$

зависимости

$$V_{nk} = -\frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{u}_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\nu_{21}\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}, \quad \widetilde{V}_{nk} = \frac{\lambda_k}{\lambda_n}u_{nk}, \quad \widetilde{U}_{nk} = \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}v_{nk},$$
$$U_{nk} = -\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}, \quad \widetilde{U}_k = -r_2 v_{nk}\widetilde{V}_k = -r_1 u_{nk}, \tag{4.2}$$

а также условие

$$\widetilde{u}_{nk} \neq 0 \quad \text{при} \quad \lambda_k\lambda_n = 0. \tag{4.3}$$

Подставляя (4.2) в (2.1), получим общее решение рассматриваемой задачи в виде функций

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1)\sin\lambda_n x + \\ &+ \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{v}_{nk}\sin\lambda_k y + \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}v_{nk}\cos\lambda_k y + C_2\right)\cos\lambda_n x + U_k\sin\lambda_k y - r_2 v_{nk}\cos\lambda_k y, \\ v &= (v_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{v}_{nk}\cos\lambda_k y + C_3)\sin\lambda_n x + \\ &+ \left(-\frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y + \frac{\lambda_k}{\lambda_n}u_{nk}\cos\lambda_k y + C_4\right)\cos\lambda_n x + V_k\sin\lambda_k y - r_1 u_{nk}\cos\lambda_k y, \end{aligned} \tag{4.4}$$

в соответствии с которыми для f_1 и f_2 устанавливаются выражения

$$\begin{aligned} f_1 = {} & (-g_1\lambda_n^2 + \nu_{21}g_1\lambda_k^2 + \Omega^2)u_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x + (-\widetilde{g}_1\lambda_n^2 - \lambda_k^2 + \nu_{12}\lambda_n^2 + \Omega^2)u_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x + \\ & + \left(g_1\frac{\lambda_n^3}{\lambda_k} - \nu_{21}g_1\lambda_n\lambda_k - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2\right)\widetilde{v}_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x + \\ & + \left[-g_1\frac{\lambda_n\lambda_k}{\nu_{12}} - \frac{\lambda_k^3}{\nu_{12}\lambda_n} + \lambda_n\lambda_k(1+\nu_{21}g_1) + \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n}\Omega^2\right]v_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x + \\ & + (\lambda_k^2 - \Omega^2)r_2 v_{nk}\cos\lambda_k y + (-\lambda_n^2 g_1 + \Omega^2)C_1\sin\lambda_n x + \\ & + (-g_1\lambda_n^2 + \Omega^2)C_2\cos\lambda_n x + (-\lambda_k^2 + \Omega^2)U_k\sin\lambda_k y, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} f_2 = {} & \left(-\lambda_n^2 + \frac{\lambda_k^2}{\nu_{12}} + \Omega^2\right)v_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x + (-g_2\lambda_k^2 + \nu_{12}g_2\lambda_n^2 + \\ & + \Omega^2)\widetilde{v}_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x + \left(\frac{\nu_{12}\lambda_n^3}{\lambda_k} - \lambda_n\lambda_k - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}\Omega^2\right)\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x + \\ & + \left(-g_2\frac{\lambda_k^3}{\lambda_n} + \nu_{12}g_2\lambda_n\lambda_k + \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right)u_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x + \\ & + (g_2\lambda_k^2 - \Omega^2)r_1 u_{nk}\cos\lambda_k y + (-\lambda_n^2 + \Omega^2)C_3\sin\lambda_n x + \\ & + (-\lambda_n^2 + \Omega^2)C_4\cos\lambda_n x + (-g_2\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_k\sin\lambda_k y. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Так же, как и в разделе 2, можно убедиться, что в силу (4.1) в рассматриваемом случае нулевыми являются неизвестные $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = U_k = V_k = 0$. Для нахождения других решений в силу структуры функций (4.4) имеют место уравнения метода Бубнова следующих видов:

$$\int_0^a\int_0^b\left(f_1\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x - \frac{\nu_{12}\lambda_n}{\lambda_k}f_2\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\widetilde{u}_{nk} \neq 0, \tag{4.7}$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}f_1\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x + f_2\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta\widetilde{v}_{nk} \neq 0, \tag{4.8}$$

$$\int_0^a\int_0^b\left(f_1\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x + \frac{\lambda_k}{\lambda_n}f_2\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x - r_1 f_2\cos\lambda_k y\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta u_{nk} \neq 0, \tag{4.9}$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} f_1 \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x - r_2 f_1 \cos\lambda_k y + f_2 \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x \right) dx\, dy = 0 \quad \text{при} \quad \delta v_{nk} \neq 0. \tag{4.10}$$

Можно убедиться, что при подстановке (4.5) и (4.6) в уравнение (4.7) по-прежнему приходим к характеристическому уравнению (2.19), из которого в силу (4.3) следуют результаты раздела 2, а из (4.8) при $\widetilde{v}_{nk} \neq 0$ следует формула (2.20) из [1].

Оставшиеся два уравнения (4.9) и (4.10) при подстановке в них выражений (4.5) и (4.6) в рассматриваемом случае приводят к формулам

$$\Omega^2 = \frac{\{g_2[\nu_{21}^2\lambda_k^4 + 2(\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2)^2] + g_1\nu_{21}^2\lambda_n^2(\lambda_n^2 - 2\nu_{21}\lambda_k^2)\}\lambda_k^2}{\nu_{21}^2\lambda_k^2(\lambda_n^2 + \lambda_k^2) + 2(\nu_{21}\lambda_k^2 - \lambda_n^2)^2}, \tag{4.11}$$

$$\Omega^2 = \frac{[\widetilde{g}_1\lambda_n^2\lambda_k^2 + 3(\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2)^2]\lambda_k^2}{2(\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2)^2 + \lambda_k^2(\lambda_k^2 + \nu_{12}^2\lambda_n^2)}, \tag{4.12}$$

которым соответствуют решения

$$u = u_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x, \quad v = \frac{\lambda_k}{\lambda_n} u_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x - r_1 u_{nk} \cos\lambda_k y,$$

$$u = \frac{\lambda_k}{\nu_{12}\lambda_n} v_{nk} \cos\lambda_k y \cos\lambda_n x - r_2 v_{nk} \cos\lambda_k y, \quad v = v_{nk} \sin\lambda_k y \sin\lambda_n x.$$

Формулы (4.11)–(4.12), как и формулы (3.17)–(3.18), по определению являются приближенными, т. к. функции (4.12) не удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.1).

Заключение

Легко можно убедиться в том, что при условии $\lambda_n^2 = \nu_{21}\lambda_k^2$ из формулы (3.17) следует формула (2.26) из [1], а из (3.18) — формула (2.22) той же статьи . При выполнении же условия $\lambda_k^2 = \nu_{12}\lambda_n^2$ из формул (4.11) и (4.12) следуют формулы (2.26) и (2.22) статьи [1]. Следовательно, построенные в [1] решения, являющиеся точными, как частный случай содержатся в решениях, построенных в разделах 3, 4 данной статьи и являющихся по определению приближенными.

В общем случае, когда не выполняются указанные выше условия, установить степень точности приближенных формул (3.17), (3.18), (4.11), (4.12), а также формул, получающихся с помощью действительных корней алгебраических уравнений (2.22) и (2.25), без их сравнения с другими решениями (которые можно было бы считать точными), по-видимому, невозможно.

Литература

1. Паймушин В.Н. *Точные аналитические решения задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной пластины со свободными краями* // Изв. вузов. Математика. – 2006. – № 8. – С. 54–62.

Научно-технический центр проблем динамики и прочности Казанского государственного технического университета

Поступили
первый вариант 10.12.2004
окончательный вариант 13.10.2005