ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.748

И.Х. САБИТОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ ДАРБУ ДЛЯ ПОГРУЖЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ МЕТРИК

1. Известный метод Дарбу изометрических погружений в E^3 двумерной метрики ds^2, заданной в изометрическом виде в некоторой плоской области $\mathcal{D}$,

$$ds^2 = \Lambda^2(x,y)(dx^2+dy^2), \quad \Lambda \in C^2(\mathcal{D}) \tag{1}$$

состоит в следующем (см, напр., [1]) [1]. Пусть $X = X(u,v)$, $Y = Y(u,v)$, $Z = Z(u,v)$ — искомое погружение метрики (1) в трехмерное евклидово пространство E^3 с декартовыми координатами X, Y, Z. Тогда из условия $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$ получают, что метрика

$$d\sigma^2 = (\Lambda^2 - Z_x^2)dx^2 - 2Z_xZ_y dx\,dy + (\Lambda^2 - Z_y^2)dy^2 = dX^2 + dY^2 \tag{2}$$

должна быть локально евклидовой, а для этого необходимо и достаточно, чтобы гауссова кривизна $\widetilde{K}$ метрики $d\sigma^2$,

$$\widetilde{K} = \frac{K[\Lambda^4 - \Lambda^2(Z_x^2+Z_y^2)] - (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)}{[\Lambda^2 - (Z_x^2+Z_y^2)]^2}, \tag{3}$$

равнялась нулю; здесь K — кривизна погружаемой метрики (1), а

$$Z_{11} = Z_{xx} - \Gamma_{11}^1 Z_x - \Gamma_{11}^2 Z_y,$$
$$Z_{12} = Z_{xy} - \Gamma_{12}^1 Z_x - \Gamma_{12}^2 Z_y,$$
$$Z_{22} = Z_{yy} - \Gamma_{22}^1 Z_x - \Gamma_{22}^2 Z_y,$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля метрики (1). Условие $\widetilde{K} \equiv 0$ дает уравнение для функции $Z(x,y)$

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = K\Lambda^2[\Lambda^2 - (Z_x^2 + Z_y^2)], \tag{4}$$

которое и называется уравнением Дарбу. Если $Z \in C^2(\mathcal{D})$ — его решение, удовлетворяющее условию

$$(\Lambda^2 - Z_x^2)(\Lambda^2 - Z_y^2) - Z_x^2Z_y^2 > 0,$$

то квадратичная форма $d\sigma^2$ из (2) будет положительно определенной и локально евклидовой. Тогда она некоторым диффеоморфизмом $X = X(x,y)$, $Y = Y(x,y)$ приводится, по крайней мере локально, к стандартному виду $dX^2 + dY^2$, и тройка функций X, Y, Z дает искомое погружение.

Замечание. О некоторых дополнительных рассмотрениях, необходимых здесь в случае $Z \in C^2$, но $Z \notin C^3$, см. работу [3]; о приведении локально евклидовой метрики к стандартному виду в целом в произвольной односвязной или многосвязной области см. работу [4].

[1] Метод Дарбу применяется и для погружений метрик общего вида $ds^2 = Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2$; предположение о специальном виде (1) погружаемой метрики не является сколько-нибудь серьезным ограничением, т.к. при весьма слабых условиях регулярности любая метрика общего вида приводится к виду (1) (см. [2], гл. 2).

Цель настоящей работы — заменить уравнение Дарбу (4) типа Монжа-Ампера некоторым интегральным уравнением, в котором участвуют только первые производные от $Z(x,y)$. Что касается возможных применений полученного ниже интегрального уравнения (6), то здесь ограничимся лишь указанием, что с помощью (6) можно получать примеры метрик, не погружаемых в E^3 в классе поверхностей с тем или иным дополнительным условием на их внешнюю геометрию.

2. Сформулируем доказываемые результаты.

Теорема 1. *Пусть функция $\Lambda \in C^2(\overline{\mathcal{D}})$, $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \partial\mathcal{D}$, $\partial\mathcal{D} \in C^1$. Для того чтобы функция $Z(x,y) \in C^2(\overline{\mathcal{D}})$ была в $\mathcal{D}$ решением уравнения (4), необходимо, чтобы в любом круге $\overline{\Omega}(z_0,R) \subset \overline{\mathcal{D}}$ радиуса R и с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{D}$ функция $Z(x,y)$ удовлетворяла следующему интегральному уравнению $\Big($где $z = x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big)$*

$$\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial \bar z}\right|^2 = \Lambda^2(z)\,\mathrm{Re}\Big\{-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{|Z_\zeta^2(t)|dt}{\Lambda^2(t)(t-z_0)} + \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{|Z_\zeta^2(t)|dt}{\Lambda^2(t)(t-z)} -$$
$$-\frac{R^2}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{Z_{\bar\zeta}^2(t)dt}{\Lambda^2(t)(t-z_0)^2(t-z)} - \frac{z-z_0}{2\pi i R^2}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{(t-z_0)Z_\zeta^2(t)dt}{\Lambda^2(t)(t-z)} -$$
$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^2(\zeta)(\zeta-z)^2} - \frac{2}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\Lambda_\zeta(\zeta)Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^3(\zeta)(\zeta-z)} -$$
$$-\frac{2(z-z_0)}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\Lambda_{\bar\zeta}(\zeta)Z_\zeta^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^3(\zeta)[R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)]} + \frac{(z-z_0)^2}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{Z_\zeta^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^2(\zeta)[R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)]^2}\Big\} -$$
$$-\frac{\Lambda^2(z)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\ln\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}\right|K(\zeta)(\Lambda^2(\zeta)-6|Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)|)d\xi\,d\eta; \quad (5)$$

далее, выполнения уравнения (5) в некотором круге $\overline{\Omega}(z_0,R) \subset \overline{\mathcal{D}}$ достаточно, чтобы функция $Z(x,y) \in C^2$ удовлетворяла в этом круге уравнению (4).

Более короткий вариант этой теоремы в случае, когда $\overline{\mathcal{D}}$ — круг $x^2+y^2 \le R^2$, представим как

Следствие. Пусть $\Lambda \in C^2(\overline{\mathcal{D}})$. Для того чтобы функция $Z(x,y) \in C^2(\overline{\mathcal{D}})$ была в $\mathcal{D}$ решением уравнения (4), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему интегральному уравнению

$$\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial \bar z}\right|^2 = \Lambda^2(z)\,\mathrm{Re}\Big\{-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{|Z_\zeta^2(t)|dt}{t\Lambda^2(t)} + \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{|Z_\zeta^2(t)|dt}{\Lambda^2(t)(t-z)} -$$
$$-\frac{R^2}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2(t)dt}{\Lambda^2(t)t^2(t-z)} - \frac{z}{2\pi i R^2}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{tZ_\zeta^2(t)dt}{\Lambda^2(t)(t-z)} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^2(\zeta)(\zeta-z)^2} -$$
$$-\frac{2}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{\Lambda_\zeta(\zeta)Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^3(\zeta)(\zeta-z)} - \frac{2z}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{\Lambda_{\bar\zeta}(\zeta)Z_\zeta^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^3(\zeta)(R^2-\bar\zeta z)} +$$
$$+\frac{z^2}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_\zeta^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^2(\zeta)(R^2-\bar\zeta z)^2}\Big\} - \frac{\Lambda^2(z)}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\bar\zeta z}\right|K(\zeta)(\Lambda^2(\zeta)-6|Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)|)d\xi\,d\eta. \quad (6)$$

Все замечания и комментарии, касающиеся теоремы 1 и ее следствия, см. в п. 5.

Рассуждения, использованные при замене уравнения Дарбу интегральным уравнением (6), могут быть применены и к общему уравнению Монжа-Ампера с дивергентной квазилинейной частью. Тогда получается следующая

Теорема 2. *Пусть в круге $\mathcal{D}: x^2+y^2<R^2$ задано уравнение Монжа-Ампера*

$$rt-s^2+\frac{\partial a(x,y,Z,p,q)}{\partial x}+\frac{\partial b(x,y,Z,p,q)}{\partial y}=f(x,y,Z,p,q), \tag{7}$$

где $Z(x,y)$ — искомая функция, $p=Z_x$, $q=Z_y$, $r=Z_{xx}$, $s=Z_{xy}$, $t=Z_{yy}$, a, b и f — заданные функции от указанных при них аргументов. Для того чтобы функция $Z\in C^2(\overline{\mathcal{D}})$ была в $\mathcal{D}$ решением уравнения (7), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла интегральному уравнению

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial\bar z}\right|^2=\operatorname{Re}\Big\{&\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{|Z_\zeta(t)|^2}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{|Z_\zeta(t)|^2}{t}dt-\\&-\frac{R^2}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2dt}{t^2(t-z)}-\frac{z}{2\pi iR^2}\int\limits_{\partial\mathcal{D}}\frac{tZ_{\bar\zeta}^2dt}{t-z}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2d\xi\,d\eta}{(\zeta-z)^2}+\\&+\frac{z^2}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2d\xi\,d\eta}{(R^2-\overline{\zeta}z)^2}-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{a+ib}{\zeta-z}d\xi\,d\eta-\frac{z}{2\pi}\iint\frac{a-ib}{R^2-\overline{\zeta}z}d\xi\,d\eta\Big\}-\\&-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\overline{\zeta}z}\right|f(\xi,\eta,Z(\xi,\eta),p,q)d\xi\,d\eta.\end{aligned}$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала необходимость. Пусть функция $Z(x,y)\in C^2$ удовлетворяет уравнению (4). В обозначениях $\frac{\partial}{\partial z}=\frac12\Big(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$, $\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac12\Big(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\Big)$ это уравнение перепишется в виде

$$4\Lambda^{-2}(z)(Z_{z\bar z}^2-Z_{zz}Z_{\bar z\bar z}+16\Lambda^{-3}\operatorname{Re}(Z_{\bar z}\Lambda_{\bar z}Z_{zz})-16\Lambda^{-4}|\Lambda_z|^2|Z_z|^2=K(z)(\Lambda^2-4|Z_z|^2). \tag{8}$$

Отметим в области $\mathcal{D}$ произвольную внутреннюю точку $z=x+iy$ и удалим из $\mathcal{D}$ открытый круг с центром в z и радиуса ε; считаем ε настолько малым, чтобы выбрасываемый круг целиком был расположен в $\mathcal{D}$. Полученную после удаления круга область обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon$. Рассмотрим интеграл

$$J_\varepsilon(z)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\frac{Z_{\bar\zeta}^2(\zeta)d\xi\,d\eta}{\Lambda^2(\zeta)(\zeta-z)^2},\quad \zeta=\xi+i\eta. \tag{9}$$

Учитывая формулы Грина (в предположении $f\in C^1(\overline{G})$, $\partial G\in C^1$)

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{G}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}d\xi\,d\eta=\frac{1}{2i}\oint\limits_{\partial G}f(t)dt,\\&\iint\limits_{G}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}d\xi\,d\eta=-\frac{1}{2i}\oint\limits_{\partial G}f(t)d\bar t\end{aligned}\tag{$*$}$$

и соотношения

$$\frac{1}{(\zeta-z)^2}=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\frac{1}{\zeta-z}\Big),\quad \frac{1}{\zeta-z}=2\frac{\partial}{\partial\zeta}\ln|\zeta-z|$$

вместе с их комплексными сопряженными, интеграл (9) после нескольких применений формул Грина можно преобразовать к следующему виду:

$$J_\varepsilon(z)=-2\operatorname{Re}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_{\bar\zeta}^2d\bar t}{\Lambda^2(t-z)}-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{Z_{\bar\zeta}^2d\bar t}{\Lambda^2(t-z)}\Big\}+$$

$$+\frac{2}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\overline{\zeta}}}{\Lambda^2}\ln|t-z|d\bar{t}-\frac{2}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\overline{\zeta}}}{\Lambda^2}\ln|t-z|d\bar{t}+$$

$$+\frac{2}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\zeta}}{\Lambda^2}\ln|t-z|dt-\frac{2}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\zeta}}{\Lambda^2}\ln|t-z|dt+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta}d\bar{t}}{\Lambda^2(\bar{t}-\bar{z})}-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta}d\bar{t}}{\Lambda^2(\bar{t}-\bar{z})}-\frac{4}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\Lambda_\zeta}{\Lambda^3}Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}\ln|t-z|dt+$$

$$+\frac{4}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\Lambda_\zeta}{\Lambda^3}Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}\ln|t-z|dt+\operatorname{Re}\frac{4}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\frac{\Lambda_\zeta}{\Lambda^3}\frac{Z^2_{\overline{\zeta}}}{\zeta-z}d\xi\,d\eta-\overline{J_\varepsilon(z)}+$$

$$+\frac{8}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|\frac{\Lambda_{\zeta\overline{\zeta}}}{L^3}Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}d\xi\,d\eta-\frac{24}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|\frac{\Lambda_\zeta\Lambda_{\overline{\zeta}}}{\Lambda^4}Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}d\xi\,d\eta+$$

$$+\frac{4}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|\frac{Z^2_{\zeta\overline{\zeta}}-Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}}{\Lambda^2}d\xi\,d\eta+\frac{8}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|\frac{Z_{\overline{\zeta}}\Lambda_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\zeta}+Z_\zeta\Lambda_\zeta Z_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}}}{\Lambda^3}d\xi\,d\eta,\quad(10)$$

где $\Gamma=\partial\mathcal{D}$, а Γ_ε — окружность радиуса ε и с центром в точке z, обходимая против часовой стрелки.

Теперь учтем, что для метрики (1) кривизна K вычисляется по формуле $\Delta\ln\Lambda=-K\Lambda^2$, откуда

$$\frac{\Lambda_{\zeta\overline{\zeta}}}{\Lambda^3}=\frac{\Lambda_\zeta\Lambda_{\overline{\zeta}}}{L^4}-\frac{K}{4}.$$

Подставляя это значение $\Lambda_{\zeta\overline{\zeta}}$ в соответствующий интеграл в (10), получаем

$$2\operatorname{Re}J_\varepsilon(z)=A(\Gamma,\varepsilon)+\operatorname{Re}\frac{4}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\frac{\Lambda_\zeta Z^2_{\overline{\zeta}}}{\Lambda^3}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|\Big[\frac{4(Z^2_{\zeta\overline{\zeta}}-Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}})}{\Lambda^2}-2KZ_\zeta Z_{\overline{\zeta}}+$$

$$+\frac{8(\Lambda_{\overline{\zeta}}Z_{\overline{\zeta}}Z_{\zeta\zeta}+\Lambda_\zeta Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}\overline{\zeta}})}{\Lambda^3}-\frac{16\Lambda_\zeta\Lambda_{\overline{\zeta}}Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}}{\Lambda^4}\Big]d\xi\,d\eta=$$

$$=A(\Gamma,\varepsilon)+\operatorname{Re}\frac{4}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\frac{\Lambda_\zeta Z^2_{\overline{\zeta}}}{\Lambda^3}\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\ln|\zeta-z|(L(Z)-2KZ_\zeta Z_{\overline{\zeta}})d\xi\,d\eta,\quad(11)$$

где через $A(\Gamma,\varepsilon)$ обозначена сумма всех контурных интегралов в (10), а $L(Z)$ обозначает левую часть уравнения (8).

Пусть $\varepsilon\to0$. Тогда, учитывая, что

$$-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\varepsilon}\frac{Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}}{\Lambda^2(t-z)}d\bar{t}\longrightarrow2\frac{|\partial Z(z)/\partial\bar{z}|^2}{\Lambda^2(z)},\quad\varepsilon\to0,$$

а остальные интегралы в (10) по Γ_ε стремятся к нулю, получаем

$$\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial\bar{z}}\right|^2=\Lambda^2(z)\Big\{\operatorname{Re}\Big[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z^2_{\overline{\zeta}}d\bar{t}}{\Lambda^2(t-z)}-$$

$$
\begin{gathered}
-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_{\bar\zeta}^2 d\xi\, d\eta}{\Lambda^2(\zeta-z)^2}-\frac{2}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{\Lambda_\zeta Z_{\bar\zeta}^2 d\xi\, d\eta}{\Lambda^3(\zeta-z)}\Big]-\\
-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln|\zeta-z|\cdot K(\zeta)(\Lambda^2-6Z_\zeta Z_{\bar\zeta})d\xi\, d\eta-\\
-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Lambda^{-2}Z_{\bar\zeta}Z_{\zeta\bar\zeta}\ln|t-z|d\bar t-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_\zeta Z_{\bar\zeta}}{\Lambda^2(\bar t-\bar z)}d\bar t-\\
-\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Lambda^{-2}Z_{\bar\zeta}Z_{\zeta\zeta}\ln|t-z|dt+\frac{2}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Lambda^{-3}\Lambda_\zeta Z_\zeta Z_{\bar\zeta}\ln|t-z|dt\Big\}. \qquad (12)
\end{gathered}
$$

Формула (12) справедлива для любой области $\mathcal{D}$, как односвязной, так и многосвязной. Но если в качестве области интегрирования взять круг $\Omega : |z-z_0| < R$, $\overline{\Omega}\subset\overline{\mathcal{D}}$, то контурные интегралы в (12) допускают дальнейшие преобразования, позволяющие избавиться от присутствующих в них вторых производных от Z.

Действительно, заметим, что для точек t, лежащих на окружности $t-z_0=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, и точек z, находящихся внутри этой окружности, справедлива формула

$$
|t-z|=\frac{|R^2-(\bar t-\bar z_0)(z-z_0)|}{R}.
$$

В контурных интегралах в (12), содержащих логарифмы, заменим $|t-z|$ по этой формуле, и, рассматривая контурные интегралы как правые части формул Грина $(*)$, получим аналогично тому, как при переходе от (10) к (11), что сумма S всех контурных интегралов в (12) с $\ln|t-z|$ равна

$$
S=S_1+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega}\ln\left|\frac{R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)}{R}\right|(L(z)-2KZ_\zeta Z_{\bar\zeta})d\xi\, d\eta, \qquad (13)
$$

где через S_1 обозначены слагаемые, получаемые при дифференцировании логарифма. Для двойных интегралов, входящих в S_1, несколькими применениями формул Грина $(*)$ избавляемся от вторых производных функции Z. В итоге после некоторых вычислений получаем

$$
\begin{gathered}
S_1=\mathrm{Re}\,\frac{(z-z_0)^2}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{Z_\zeta^2 d\xi\, d\eta}{\Lambda^2[R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)]^2}-\\
-2\,\mathrm{Re}\,\frac{z-z_0}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{\Lambda_{\bar\zeta}Z_\zeta^2 d\xi\, d\eta}{\Lambda^3[R^2-(\bar\zeta-\bar z_0)(z-z_0)]}-\mathrm{Re}\,\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{Z_\zeta^2 dt}{\Lambda^2[R^2-(\bar t-\bar z_0)(z-z_0)]}-\\
-\frac{z-z_0}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{Z_\zeta Z_{\bar\zeta}d\bar t}{\Lambda^2[R^2-(\bar t-\bar z_0)(z-z_0)]}. \qquad (14)
\end{gathered}
$$

Подставим найденное значение S_1 из (14) в (13), а значение S из (13) — в (12), с заменой области интегрирования Ω. Учитывая, что на окружности $\partial\Omega : t-z_0=\mathrm{Re}^{i\varphi}$

$$
\begin{gathered}
d\bar t=-\frac{Rdt}{(t-z_0)^2}, \qquad \frac{dt}{R^2-(\bar t-\bar z_0)(z-z_0)}=\frac{(t-z_0)dt}{R^2(t-z)},\\
\frac{1}{\pi i}\frac{d\bar t}{\bar t-\bar z}+\frac{1}{\pi i}\frac{(z-z_0)d\bar t}{R^2-(\bar t-\bar z_0)(z-z_0)}=2\,\mathrm{Re}\Big(-\frac{1}{\pi i}\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z_0}\Big),
\end{gathered}
$$

как окончательный ответ получаем уравнение (5). Необходимость доказана.

Что касается достаточности, то она получается легко из проведенных выше рассуждений. Действительно, то, что функция Z удовлетворяет уравнению (4), выше было использовано лишь при замене разности $L(Z) - 2KZ_\zeta Z_{\overline{\zeta}}$ на $K(\Lambda^2 - 6Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}})$. Поэтому, если пока неизвестно, что Z удовлетворяет (4), то теми же самыми преобразованиями вместо (5) получим уравнение

$$\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial \bar z}\right|^2 = B - \frac{\Lambda^2(z)}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} \ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - (\overline{\zeta} - \bar z_0)(z - z_0)}\right|(L(Z) - 2KZ_\zeta Z_{\overline{\zeta}})d\xi\, d\eta,$$

где через B обозначены все слагаемые из (5), кроме двойного интеграла с логарифмом. Так как Z по условию удовлетворяет (5), то

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\omega} \ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - (\overline{\zeta} - \bar z_0)(z - z_0)}\right|[L(Z) - K(\Lambda^2 - 4Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}})]d\xi\, d\eta = 0, \quad z \in \Omega.$$

Но ядро этого интеграла есть не что иное, как функция Грина для круга Ω. Следовательно, $L(Z) - K(\Lambda^2 - 4Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}) = 0$, что и утверждалось. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Отправимся снова от интеграла вида (9), в котором, однако, возьмем $\Lambda \equiv 1$. Теми же самыми рассуждениями, что и при доказательстве теоремы 1, придем к формуле вида (10), в которой будут отсутствовать все слагаемые, содержащие производные от Λ. Устремляя ε к нулю, получим аналог формулы (12)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial Z(z)}{\partial \bar z}\right| = \operatorname{Re}\Bigg[\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_{\overline{\zeta}}^2 d\bar t}{t - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{Z_{\overline{\zeta}}^2 d\xi\, d\eta}{(\zeta - z)^2}\Bigg] - \\ - \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Lambda^{-2} Z_{\overline{\zeta}} Z_{\zeta\overline{\zeta}}\ln|t - z|d\bar t - \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\Lambda^{-2} Z_{\overline{\zeta}} Z_{\zeta\zeta}\ln|t - z|dt - \\ - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{Z_\zeta Z_{\overline{\zeta}}}{\bar t - \bar z}d\bar t - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln|\zeta - z|\, 4(Z_{\zeta\overline{\zeta}}^2 - Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\,\overline{\zeta}})d\xi\, d\eta.\end{aligned} \tag{15}$$

Преобразуя контурные интегралы в (15) как и выше, в аналогичных обозначениях имеем

$$S = S_1 + \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln\left|\frac{R^2 - \overline{\zeta}z}{R}\right| 4(Z_{\zeta\zeta}^2 - Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\,\overline{\zeta}})d\xi\, d\eta.$$

В свою очередь, S_1 имеет в точности тот же вид, что и (14), только надо учесть, что $\Lambda = 1$ и $\Lambda_\zeta = 0$. Подставляя эти значения S_1 и S_2 в (15), получим аналог формулы (6), в которой нужно положить $\Lambda = 1$ и $\Lambda_\zeta = 0$, а вместо последнего двойного интеграла с функцией Грина для круга нужно взять интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{\zeta}z}\right| 4(Z_{\zeta\overline{\zeta}}^2 - Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\,\overline{\zeta}})d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

Так как

$$4(Z_{\zeta\overline{\zeta}}^2 - Z_{\zeta\zeta}Z_{\overline{\zeta}\,\overline{\zeta}}) = rt - s^2,$$

то в (16) при ядре имеем выражение $f - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta}$, если вспомнить, что Z удовлетворяет уравнению (7). Учитывая, что

$$\frac{\partial a}{\partial \xi} + \frac{\partial b}{\partial \eta} = 2\operatorname{Re}\frac{\partial}{\partial \zeta}(a + ib),$$

к соответствующему интегралу применяем интегрирование по частям в области $\mathcal{D}_\varepsilon$. Устремляя затем ε к нулю и учитывая, что функция Грина для $\mathcal{D}$ обращается в нуль на $\partial\mathcal{D}$, вместо (16) получаем интегралы

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}} f\,\ln\left|\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{\zeta}z}\right|d\xi\, d\eta - \operatorname{Re}\Bigg[\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{a + ib}{\zeta - z}d\xi\, d\eta + \frac{z}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal{D}}\frac{a - ib}{R^2 - \overline{\zeta}z}d\xi\, d\eta\Bigg],$$

подстановка которых в упомянутый выше аналог формулы (6) и даст утверждаемый в теореме 2 вид интегрального уравнения для Z. Доказательство достаточности в теореме 2 проводится точно по такому же плану, что и в теореме 1. □

5. По поводу доказанных теорем 1 и 2 сделаем некоторые замечания.

Замечание 1. При выводе формул (10) и (13) и их аналогов для теоремы 2 встречаются третьи производные от Z, которые затем в ходе упрощений взаимно уничтожаются. Поэтому строгое доказательство теорем 1 и 2 для $Z \in C^2$ получается применением аппроксимации Z в C^2 функциями $Z_n \in C^3$.

Замечание 2. На уравнение (6) можно смотреть как на условие, гарантирующее локальную евклидовость метрики (2) (т. е. дающее равенство $\widetilde{K} = 0$) и содержащее при этом лишь производные от Λ, но не содержащее производных от Z_x и Z_y, входящих в коэффициенты формулы (2). Однако при выводе формулы (6) использовалось предположение, что Z принадлежит классу C^2. Естественно поэтому поставить вопрос о необходимости и достаточности равенства (6) для локальной евклидовости метрики (2) и при условии $Z \in C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, что дало бы возможность применять интегральный аналог уравнения Дарбу для погружений метрик регулярности C^2 в классе поверхностей гладкости $C^{1,\alpha}$. Такая постановка вопроса интересна в первую очередь в связи с тем, что до сих пор нет аналитического способа проверки принадлежности поверхности класса C^1 или $C^{1,\alpha}$ классу поверхностей внешней ограниченной кривизны в смысле А.В. Погорелова [5], сохраняющих обычные известные связи между внешней и внутренней геометрией. Есть серьезны основания предполагать, что для того чтобы поверхность класса $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, с метрикой класса C^2 была поверхностью внешней ограниченной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы одна из ее компонент в подходящем расположении (напр., компонента Z) удовлетворяла уравнению (6), однако полное доказательство этого предположения автору не известно.

Замечание 3. Равенство (6) можно переписать в виде

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial \bar z}\right|^2 = \Lambda^2(z)\,\mathrm{Re}\Big\{-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathcal D}\frac{Z_{\bar\zeta}^2 d\xi\, d\eta}{\Lambda^2(\zeta-z)^2} - \frac{2}{\pi}\iint\limits_{\mathcal D}\frac{\Lambda_\zeta Z_{\bar\zeta}^2}{\Lambda^3(\zeta-z)}d\xi\, d\eta + \Phi(z)\Big\} - \\ - \frac{\Lambda^2(z)}{2\pi}\iint\limits_{\mathcal D}\ln\left|\frac{R(\zeta-z)}{R^2-\bar\zeta z}\right|K(\zeta)(\Lambda^2 - 6Z_\zeta Z_{\bar\zeta})d\xi\, d\eta, \quad (6')$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в $\mathcal D$ функция. Подробное ее представление, имеющееся в (6), получится после нахождения в (6′) граничных значений $\Phi(t)$ на $\partial\mathcal D$ при $z \to t$. Этот подход дает другое доказательство формулы (6), особенно простое в случае $Z \in C^3$, т. к. тогда уравнение (4) можно переписать в виде

$$-\Delta|f| + 6K\Lambda^2|f| = K\Lambda^2 - 4\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\zeta^2} - 8\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(f\frac{\Lambda_\zeta}{\Lambda}\Big), \quad (17)$$

где

$$f = (\partial Z/\partial\bar\zeta)^2 \Big/ \Lambda^2(\zeta).$$

Рассматривая (17) как уравнение Пуассона относительно $|f|$, выписываем его общее решение, и, найдя свободную гармоническую функцию по ее граничным значениям, снова придем к уравнению (6).

Замечание 4. Если выражение для гауссовой кривизны

$$rt - s^2 = K(x,y)(1+p^2+q^2)$$

поверхности $z = z(x, y)$ рассматривать как уравнение вида (7) или вида (17), то теорема 2 или равенство вида (6) позволяют указать другой путь (по сравнению с [6] или [7]) получения максимальных размеров круга, над которым может быть определена эта поверхность с отделенной от нуля отрицательной кривизной.

Литература

1. Ефимов Н.В. *Качественные вопросы теории деформации поверхностей " в малом"* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1949. - Т. 30. – С. 1–128.
2. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
3. Сабитов И.Х. *К вопросу о погружении двумерных метрик в E^4* // Матем. заметки. – 1977. – Т. 21. – № 2. – С. 137–140.
4. Сабитов И.Х. *Изометрические погружения и вложения локально-евклидовых метрик в $\mathbf{R}^2$* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1988. – № 23. – С. 147–156.
5. Погорелов А.В. *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей.* – М.: Наука, 1969. – 759 с.
6. Ефимов Н.В. *Оценки размеров области регулярности решений некоторых уравнений Монжа-Ампера* // Матем. сб. – 1976. – Т. 100. – № 3. – С. 356–363.
7. Heintz E. *Über Flächen mit eindentigen Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eigeschränkt sind* // Math. Ann. – 1955. – Bd. 129. – № 5. – S. 451–454.

Московский государственный университет

Поступила
02.02.1995