ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 3 (538)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.71

И.В. ГЕРМАШЕВ, В.Е. ДЕРБИШЕР

СВОЙСТВА УНИМОДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ В ОПЕРАЦИЯХ С НЕЧЕТКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Математические задачи с нечеткими условиями все чаще возникают в различных областях науки и техники. Примеры таких задач даны в [1]–[2]. Важнейшая группа задач этого типа связана с ранжированием или классификацией элементов множества с целью поддержки принятия решения. При предлагаемом ниже подходе ключевым объектом при решении задач с нечеткими условиями является нечеткое множество, при этом для сравнения нечетких множеств используются индексы схожести [3]. В основе вычисления индексов лежат функции принадлежности. Рассмотрим унимодальные функции принадлежности.

Пусть X — некоторый универсум. Обозначим через $\widehat{Q} = \bigcup\limits_{x\in G}(x, f(x))$ нечеткое множество над X, где $G = \operatorname{supp}\widehat{Q}$ — носитель $\widehat{Q}$, $f(x)$ — функция принадлежности ($f : X \to [0;1]$).

Примем ряд ограничений, накладываемых на класс функций принадлежности при решении выбранного круга задач:

$$\begin{aligned} &f(q) = \sup_{x\in G} f(x),\\ &f(x) \geq h \Leftrightarrow q-\delta \leq x \leq q+\delta, \quad \delta > 0,\\ &h = f(q-\delta) = f(q+\delta). \end{aligned} \tag{1}$$

Проблема выбора функции принадлежности является опорным теоретическим условием правильного решения задач. Для конкретизации упростим задачу и рассмотрим более узкий класс, чем функции (1).

Пусть $f : X \to [0;1]$, $X \subseteq R$, $f \in U(X)$,

$$\begin{aligned} &\exists a, h, \delta \in R: \ f(a) = \max_{x\in X} f(x) = 1,\\ &f(x) \geq h \Leftrightarrow a-\delta \leq x \leq a+\delta,\\ &h = f(a-\delta) = f(a+\delta), \end{aligned}$$

тогда функцию $f(x)$ назовем регулярной на множестве X, а класс таких функций обозначим через $\Re(X)$. Здесь через $U(X)$ обозначается класс строго унимодальных функций ([4], с. 13). Исследуем регулярные функции вида $y = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x-a')^2 + c$, для чего ниже сформулированы и приведены доказательства ряда утверждений о свойствах функций принадлежности.

Теорема 1. *Пусть* $f_i \in \Re(X)$, $i = 1, 2$, X *компактно,* $\nu_i = \max\limits_{x\in X}\min\limits_{i=1,2}(f_i(x))$, $x_1 = \arg\max\limits_{x\in X}\min\limits_{i=1,2}(f_i(x))$, *тогда* $f_1(x_1) = f_2(x_1)$.

Лемма 1. *Пусть* $f \in \Re(X)$, $f(x) = g(\xi(x))$, *где* $\xi(x) = b^2(x-a)^2 + c$, *тогда* $f(a) = \max\limits_{x\in X} f(x)$.

Поскольку a совпадает с точкой q максимума $f(x)$, то далее будем применять запись $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$ вместо $\xi(x) = b^2(x-a)^2 + c$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \Re(X)$, $f(x) = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$, тогда c — инвариант относительно q и δ.*

Из равенств $1 = f(q) = g(b^2(q-q)^2 + c) = g(c)$ следует, что c зависит только от выбора функции $g(x)$ и не зависит от q и δ. $\square$

Лемма 3. *Пусть $f \in \Re(X)$, $f(x) = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$, тогда $b^2 = \frac{d^2}{\delta^2}$, где d^2 — константа, определяемая видом функции $g(x)$ и являющаяся инвариантом относительно q и δ.*

Пусть $f_1 \in \Re(X)$, $f_1(x) = g(\xi_1(x))$, где $\xi_1(x) = b_1^2(x-q_1)^2 + c_1$; $f_2 \in \Re(X)$, $f_2(x) = q(\xi_2(x))$, где $\xi_2(x) = b_2^2(x-q_2)^2 + c_2$; $f_1(q_1+\delta_1) = f_2(q_2+\delta_2) = h$, $g(b_1^2(q_1+\delta_1-q_1)^2+c_1) = g(b_2^2(q_2+\delta_2-q_2)^2+c_2)$.
В силу леммы 2 $c_1 = c_2$, $b_1^2\delta_1^2 = b_2^2\delta_2^2 = d^2$, $b_1^2 = \frac{d^2}{\delta_1^2}$, $b_2^2 = \frac{d^2}{\delta_2^2}$, $h = f_1(q_1+\delta_1) = g(b_1^2(q_1+\delta_1-q_1)^2 + c_1) = g(\frac{d^2}{\delta_1^2}\delta_1^2 + c_1) = g(d^2+c_1)$. Поскольку c_1 зависит лишь от выбора g и $h = \text{const}$, то d^2 также зависит только от выбора g и не зависит от выбора q и δ. $\square$
Из лемм 2 и 3 следует, что величины d^2 и c являются инвариантами функции $f(x)$ относительно значений q и δ.

Лемма 4. *Пусть $f \in \Re(X)$, $f(x) = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$, тогда $y = f(x)$ симметрична относительно прямой $x - q = 0$.*

Лемма 5. *Пусть $f \in \Re(X)$, $f(x) = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x-q)^2 + c$, $\xi : X \to \Xi$, тогда $g(\xi)$ монотонно убывает на Ξ.*

Теорема 2. *Пусть f_1, $f_2 \in \Re(X)$, $f_k(x) = g(\xi_k(x))$, где $\xi_k(x) = b_k^2(x-q_k)^2 + c$, $k = 1, 2$, тогда $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ пересекаются не более чем в двух точках, а именно, в $x_1 = \frac{q_1|b_1| - q_2|b_2|}{|b_1| - |b_2|}$ и $x_2 = \frac{q_1|b_1| + q_2|b_2|}{|b_1| + |b_2|}$.*

Найдем все корни уравнения $f_1(x) = f_2(x)$. Для выполнения равенства $g(b_1^2(x-q_1)^2 + c) = g(b_2^2(x-q_2)^2 + c)$ достаточно, чтобы $|b_1|(x-q_1) = |b_2|(x-q_2)$ или $|b_1|(x-q_1) = -|b_2|(x-q_2)$.
Покажем, что кроме $x_1 = \frac{q_1|b_1| - q_2|b_2|}{|b_1| - |b_2|}$ и $x_2 = \frac{q_1|b_1| + q_2|b_2|}{|b_1| + |b_2|}$ больше решений уравнения $f_1(x) = f_2(x)$ нет. Пусть $x_0 \neq x_k$, $k = 1, 2$, $\xi_1(x_0) \neq \xi_2(x_0)$. Если $\xi_1(x_0) > \xi_2(x_0)$, то в силу леммы 5 $g(\xi_1(x_0)) < g(\xi_2(x_0))$, $f_1(x_0) < f_2(x_0)$. Если $\xi_1(x_0) < \xi_2(x_0)$, то в силу леммы 5 $g(\xi_1(x_0)) > g(\xi_2(x_0))$, $f_1(x_0) > f_2(x_0)$. Откуда следует $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. $\square$

Теорема 3. *Пусть f_1, $f_2 \in \Re(X)$, X компактно, $f_k(x) = g(\xi_k(x))$, где $\xi_k(x) = b_k^2(x-q_k)^2 + c$, $k = 1, 2$, $x^* = x_2 = \frac{q_1|b_1| + q_2|b_2|}{|b_1| + |b_2|}$, тогда $x^* = \arg\max\limits_{x \in X} \min\limits_{k=1,2}(f_k(x))$.*

По условию регулярности $\forall x' < x'' < q_1 : f_1(x') < f_1(x'')$, $\forall x' > x'' > q_1 : f_1(x') < f_1(x'')$. Учитывая, что $f_1(x)$ — симметричная функция (лемма 4), получим $\forall x', x'' \in R \,\big|\, |q_1 - x'| > |q_1 - x''| : f_1(x') < f_1(x'')$. Для завершения доказательства достаточно показать, что $|q_1 - x_1| \geq |q_1 - x_2|$:

$$|q_1 - x_1| = \left|\frac{q_1|b_1| - q_1|b_2|}{|b_1| - |b_2|} - \frac{q_1|b_1| - q_2|b_2|}{|b_1| - |b_2|}\right| = \left|\frac{q_2|b_2| - q_1|b_2|}{|b_1| - |b_2|}\right| = |b_2|\left|\frac{q_2 - q_1}{|b_1| - |b_2|}\right| \geq$$

$$\geq |b_2|\left|\frac{q_2 - q_1}{|b_1| + |b_2|}\right| = \left|\frac{q_2|b_2| - q_1|b_2| - q_1|b_1| + q_1|b_1|}{|b_1| + |b_2|}\right| = \left|q_1 - \frac{q_2|b_2| + q_1|b_1|}{|b_1| + |b_2|}\right| = |q_1 - x_2|.$$

Откуда получаем $f_1(x_1) \leq f_1(x_2)$. Значит, $x_2 = \arg\max\limits_{x \in X} \min\limits_{k=1,2}(f_k(x))$. $\square$

Из теоремы 3 следует, что значение максимина будет достигаться в точке $x^* = \frac{q_1\delta_2 + q_2\delta_1}{\delta_1 + \delta_2}$, которая не зависит от выбора функции, а лишь от значений q и δ.

Следующая теорема непосредственно касается прикладных исследований и требует определенных пояснений. Пусть есть множество S из n объектов, обладающих m характеристиками (не обязательно числовыми, это могут быть, напр., словесные описания или интервалы значений), иначе говоря, объекту $s_i \in S$ сопоставлен набор характеристик $(Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{im})$, где $i = \overline{1,\ n}$ — номер объекта. Далее для этих объектов объявлены критерии отбора по каждой характеристике, т. е. предоставлен некоторый идеальный объект s_0 с набором характеристик $(Q_{01}, Q_{02}, \dots, Q_{0m})$.

Требуется по каждой из m характеристик ранжировать объекты из S на соответствие предъявленным требованиям согласно s_0. Для этого j-й характеристике сопоставим параметр x_j с некоторой областью значений X_j, где $j = \overline{1,\ m}$, и для каждого $i = \overline{0,\ n}$ и $j = \overline{1,\ m}$ построим над X_j нечеткое множество $\widehat{Q}_{ij}$. В качестве ранга ν_{ij} объекта s_i, показывающего величину соответствия s_i идеальному объекту s_0 по j-й характеристике, возьмем индекс сравнения соответствующих нечетких множеств

$$\nu_{ij} = \max_{x_j \in X_j} \min(f_{0j}(x_j), f_{ij}(x_j)), \quad i = \overline{1,\ n}, \quad j = \overline{1,\ m},$$

где $f_{ij}(x_j)$ — функция принадлежности нечеткого множества $\widehat{Q}_{ij}$.

На вопрос о том, как влияет выбор регулярной функции принадлежности $f_{ij}(x_j)$ на ранг ν_{ij}, отвечает следующая

Теорема 4. *Пусть* $f_{ij},\ f^*_{ij} \in \Re(X_j)$, $f_{ij}(x_j) = g(\xi_{ij}(x_j))$, *где* $\xi_{ij}(x_j) = b^2_{ij}(x_j - q_{ij})^2 + c$, $f^*_{ij}(x_j) = g^*(\xi^*_{ij}(x_j))$, *где* $\xi^*_{ij}(x_j) = b^{*2}_{ij}(x_j - q_{ij})^2 + c^*$, $i = \overline{0,\ n}$, $j = \overline{1,\ m}$, $\nu_{ij} = f_{0j}(x^*_{ij})$, $\nu^*_{ij} = f^*_{0j}(x^*_{ij})$, *где*

$$x^*_{ij} = \arg\max_{x_j \in X_j} \min(f_{0j}(x_j),\ f_{ij}(x_j)), \tag{2}$$

$\nu_{1j} \le \nu_{2j} \le \dots \le \nu_{nj}$, *тогда* $\nu^*_{1j} \le \nu^*_{2j} \le \dots \le \nu^*_{nj}$.

Произведем линейное преобразование

$$L : \begin{cases} (x^*_{ij}, \nu_{ij}) \to (x^{*\prime}_{ij}, \nu_{ij}); \\ (x^*_{ij}, \nu^*_{ij}) \to (x^{*\prime}_{ij}, \nu^*_{ij}), \end{cases} \qquad x^{*\prime}_{ij} = \begin{cases} x^*_{ij}, & \text{если } x^*_{ij} \ge q_{0j}; \\ 2q_{0j} - x^*_{ij}, & \text{если } x^*_{ij} < q_{0j}. \end{cases}$$

Очевидно, новые точки будут так же, как и старые, лежать на соответствующих кривых $y = f_{0j}(x_j)$ и $y = f^*_{0j}(x_j)$, т. к. по лемме 4 эти кривые симметричны относительно прямой $x_j - q_{0j} = 0$. Поэтому получим $\nu_{ij} = f_{0j}(x^{*\prime}_{ij}) = f_{0j}(x^*_{ij})$, $\nu^*_{ij} = f^*_{0j}(x^{*\prime}_{ij}) = f_{0j}(x^*_{ij})$, причем $x^{*\prime}_{ij} \ge q_{0j} \quad \forall i = \overline{1, n}$.

По условию регулярности f_{0j} монотонно убывает при $x_j > q_{0j}$. Поскольку $\nu_{1j} \le \nu_{2j} \le \dots \le \nu_{nj}$, то $x^{*\prime}_{1j} \ge x^{*\prime}_{2j} \ge \dots \ge x^{*\prime}_{nj}$, но по условию регулярности $f^*_{0j}(x_j)$ тоже монотонно убывает при $x_j > q_{0j}$. Значит, $\nu^*_{1j} \le \nu^*_{2j} \le \dots \le \nu^*_{nj}$. $\square$

Далее необходимо иметь в виду, что в условиях теоремы 4 наряду с равенством (2) верно также и $x^*_{ij} = \arg\max_{x_j \in X_j} \min(f^*_{0j}(x_j),\ f^*_{ij}(x_j))$, т. е. для любой функции из указанного класса точка максимина x^*_{ij} будет одной и той же.

Данные рассуждения имеют отношение к проблеме в целом. Рассмотрим некоторые их приложения к реальной задаче ранжирования технических объектов.

Из теоремы 4 следует, что любая регулярная функция принадлежности вида $y = g(\xi(x))$, где $\xi(x) = b^2(x - q)^2 + c$, $b^2 = \frac{d^2}{\delta^2}$, расположит ранжируемые объекты в одном и том же порядке в ряду возрастания соответствия параметра объекта, предъявляемому ему критерию, т. е. выбор функции принадлежности влияет на значение ν только в тех пределах, которые не поменяют местами объекты в данном ряду, что достаточно для относительной оценки и обоснованного вывода.

Получается, что окончательный выбор функции принадлежности указанного вида сводится к обеспечению незавышения и незанижения абсолютных оценок ν (рангов объектов).

Таблица

№ п/п	Функция принадлежности	Интервал значений ν при ранжировании технических объектов
1	$e^{-\frac{\ln 2}{\delta^2}(x-q)^2}$	0,818–0,999
2	$1-\operatorname{th}\left(\dfrac{\ln 3}{2\delta^2}(x-q)^2\right)$	0,842–0,999
3	$\dfrac{\delta^2}{(x-q)^2+\delta^2}$	0,775–0,998

Для примера в таблице приводятся три различных функции, рассмотренных при выборе функции принадлежности для решения реальной задачи [5]. Для каждой из этих функций проведен численный эксперимент. В ходе данного эксперимента были получены значения функций принадлежности, интервалы которых и приведены в таблице. Функции принадлежности других классов, используемые при исследовании, например, химико-технологических систем, рассмотрены в ([6], с. 27–31).

Литература

1. Батыршин И.З. *К анализу предпочтений в системах принятия решений* // Тр. Моск. энергетич. ин-та. – 1981. – Вып. 533. – С. 56-62.
2. Derbisher V.E., Germashev I.V., Bodrova G.G. *Fuzzy-set-based quantitative estimates of the efficiency of thermo- and photostabilizing additives in polymeric compositions* // Polymer Sci. Ser. A. – 1997. – V. 39. – № 6. – P. 630–633.
3. *Нечеткие множества и теория возможностей: последние достижения* / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
4. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Гермашев И.В., Дербишер В.Е. *Выбор функции принадлежности при экспертизе объектов химии и химической технологии с использованием теории нечетких множеств* // Матем. методы в химии и техн. – Владимир, 1998. – Т. 2. – С. 306–308.
6. Кафаров В.В., Дорохов И.Н., Марков Е.П. *Системный анализ процессов химической технологии. Применение метода нечетких множеств.* – М.: Наука, 1986. – 360 с.

Волгоградский государственный
технический университет

Поступили
полный текст 20.01.2003
краткое сообщение 10.05.2006