ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.754

Л.Н. РОМАКИНА

ТЕОРИЯ КРИВЫХ В БИАФФИННО-ФЛАГОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Биаффинно-флаговым пространством гиперболического типа $Б_4^г$ назовем четырехмерное аффинное пространство, фундаментальной группой которого является группа G аффинных преобразований, оставляющая в несобственной гиперплоскости инвариантным абсолют, состоящий из абсолюта биаксиального пространства гиперболического типа [1] с выделенной прямой абсолютной конгруэнции. Пространство $Б_4^г$ является вещественной реализацией двойной бифлаговой плоскости. Его группа движений зависит от девяти параметров. В данной работе строится теория кривых пространства $Б_4^г$.

1. При подходящем задании абсолюта группа G пространства $Б_4^г$ изоморфна группе матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & h_1 \\ \varepsilon b_1 & \varepsilon a_1 & \varepsilon b_2 & \varepsilon a_2 & h_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & h_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon b_3 & \varepsilon a_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = \pm 1$, $(a_3)^2 - (b_3)^2 = 1$.

Относительно группы G в $Б_4^г$ инвариантно скалярное произведение векторов $\overline{a}(a_i)$, $\overline{b}(b_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, которое определяется вырожденной квадратичной формой ранга 2 индекса 1, вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b} = a_3 b_3 - a_4 b_4,$$

а также гиперболическое измерение углов между m-плоскостями $(m = 1, 2, 3)$. Таким образом, $Б_4^г$ является пространством с обобщенной проективной метрикой [2].

Два вектора назовем ортогональными,если их скалярное произведение равно нулю. Если направления ортогональных векторов определяют в несобственной гиперплоскости точки прямой абсолютной конгруэнции, то назовем их сильно ортогональными. Векторы, определяющие точки особой прямой абсолюта P_1, назовем изотропными.

Очевидно, изотропный вектор ортогонален любому неизотропному вектору. Для двух изотропных векторов $\overline{a}(a_i)$, $\overline{b}(b_i)$ определим скалярное произведение второго рода, которое инвариантно относительно группы G и вычисляется по формуле

$$(\overline{a}\overline{b}) = a_1 b_1 - a_2 b_2.$$

Если скалярное произведение второго рода двух изотропных векторов равно нулю, то назовем эти векторы изотропными ортогональными.

Будем рассматривать координатные реперы $R\{O, \overline{e}_i\}$, обладающие следующими инвариантными относительно преобразований группы G свойствами:

1) O — произвольная точка пространства;
2) векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ изотропные ортогональные, т.е. $\overline{e}_1^2 = \overline{e}_2^2 = 0$ и $(\overline{e}_1\,\overline{e}_2) = 0$;
3) векторы $\overline{e}_3$, $\overline{e}_4$ сильно ортогональные, причем один из них единичный, другой мнимоединичный, т.е. $\overline{e}_3\,\overline{e}_4 = 0$, $(\overline{e}_3\,\overline{e}_4) = 0$, $\overline{e}_3^2 = -\overline{e}_4^2 = \pm 1$.

С каждой точкой пространства свяжем семейство канонических реперов, обладающих инвариантными свойствами 1)–3).

Теорема 1. *Канонический репер $R\{M,\overline{n}_i\}$ пространства $Б^г_4$ однозначно определяется заданием точки M и направлений векторов $\overline{n}_3$ и $\overline{n} = \overline{n}_1 + \overline{n}_4$.*

2. Построим канонический репер $R\{M,\overline{n}_i\}$ в произвольной точке M пространства $Б^г_4$. Его инфинитезимальное смещение определяется уравнениями [3]

$$d\overline{M} = \omega^i \overline{n}_i, \quad d\overline{n}_i = \omega_i^j \overline{n}_j, \quad i,j = 1,2,3,4.$$

Уравнения структуры группы движений пространства $Б^г_4$ получим, учитывая

$$D\omega^i = [\omega^k \omega_k^i], \quad D\omega_i^j = [\omega_i^k \omega_k^j], \quad i,j,k = 1,2,3,4.$$

Формы ω_i^j предыдущих уравнений связаны условиями

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = \omega_1^4 = \omega_2^4 = \omega_3^3 = \omega_4^4 = \omega_3^4 - \omega_4^3 = 0;$$
$$\omega_2^1 - \omega_1^2 = \omega_1^1 - \omega_2^2 = \omega_3^1 - \omega_4^2 = \omega_3^2 - \omega_4^1 = 0.$$

3. Зададим кривую в пространстве $Б^г_4$ уравнением

$$\overline{r} = \overline{r}(t), \tag{1}$$

где $\overline{r}(t)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно. Назовем точку кривой (1) особой, если выполняется одно из следующих условий:

1) производные до третьего порядка ее радиуса-вектора линейно зависимы;
2) ее соприкасающаяся 2-плоскость пересекает абсолютную прямую;
3) ее соприкасающаяся 3-плоскость содержит абсолютную прямую.

В каждой неособой точке кривой (1) можно построить репер третьего порядка, но он не будет каноническим репером пространства $Б^г_4$. Поэтому в точке M кривой этого пространства строим два репера, один канонический $R\{M,\overline{n}^i\}$, другой — репер Френе $R\{M,\overline{t}^i\}$. Связь между ними характеризует

Теорема 2. *В каждой неособой точке кривой* (1) *в пространстве $Б^г_4$ существует единственный канонический репер и репер Френе, который выражается через канонический с помощью одного параметра.*

Теорема 3. *В пространстве $Б^г_4$ имеют место формулы типа формул Френе, содержащие три независимых параметра.*

Литература

1. Широков А.П. *Геометрия обобщенных биаксиальных пространств* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1954. – Т. 114. – Вып. 2. – С. 123–166.
2. Киотина Г.В. *Пространства с обобщенной проективной метрикой.* Учеб. пособие. – Рязань: Изд-во Рязанск. гос. пед. ун-та, 1981. – 102 с.
3. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1948. – 432 с.

Саратовский государственный университет

Поступили
полный текст 24.02.1998
краткое сообщение 23.09.1998