ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 517.518

С.Ф. ЛУКОМСКИЙ

О ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ–УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

В [1] были определены пространства $\mathcal{L}_{\alpha,p}$ измеримых на $[0,1]$ функций f, для которых конечна норма

$$|||f|||_{\alpha,p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|f\|_n}{n^\alpha}\right)^p\right)^{1/p} \quad (\alpha > 0, \quad p \geq 1),$$

и получены теоремы о сходимости рядов Фурье–Уолша в этих пространствах. В [2] отмечено, что пространство $\mathcal{L}_{\alpha,p}$ есть пространство Лоренца

$$\Lambda_{\psi,p} = \left\{f \in L(0,1) : \|f\|_{\psi,p} = \left(\int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\psi(t)}\right)^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty\right\},$$

порожденное функцией

$$\psi(t) = 1 + \log\frac{1}{t} \quad (0 < t \leq 1).$$

В [3] было доказано, что при некоторых ограничениях на скорость роста функции $\psi(t)$ в нуле, которые влекут бесконечность индексов Бойда, равенство

$$|||f|||_{\psi,p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\|f\|_n}{\psi(2^{-n})}\right)^p\right)^{1/p}$$

определяет в пространстве $\Lambda_{\psi,p}$ норму, эквивалентную исходной норме $\|f\|_{\psi,p}$. С использованием этого результата в [3] были получены теоремы о сходимости рядов Фурье по тригонометрической системе.

В данной работе рассматривается вопрос сходимости частичных сумм $S_n(f)$ ряда Фурье–Уолша по норме пространства Лоренца $\Lambda_{\psi,p}$ в зависимости от свойств последовательности $\{n_k\}$, которую пробегают индексы n в частичной сумме $S_n(f)$.

1. Основные понятия и результаты

Будем рассматривать пространства Лоренца $\Lambda_{\psi,p}$, порожденные функцией ψ, удовлетворяющей условиям:

$\Psi1)$ $\psi(t) > 0$ на $(0,1]$, убывает на $(0,1]$ и выпукла,

$\Psi2)$ $\lim\limits_{t\to 0+}\psi(t) = +\infty$,

$\Psi3)$ $\int\limits_0^1 \frac{dt}{\psi^p(t)t} < +\infty$ $(p \geq 1)$,

$\Psi4)$ существует $C_2 > 0$ такое, что $\psi(\frac{t}{2}) \leq \big(1 + C_2/(1+\log\frac{1}{t})\big)\psi(t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00390.

При таких условиях пространство Лоренца $\Lambda_{\psi,p}$ имеет вырожденные индексы Бойда p_Λ и q_Λ ([4], с. 134) и поэтому ни тригонометрическая, ни система Уолша не являются базисом в таком пространстве $\Lambda_{\psi,p}$. В [3] было доказано, что если $f \in \Lambda_{\psi,p}$, то тригонометрический ряд Фурье функции f тем не менее сходится в более широком пространстве Лоренца $\Lambda_{\tilde{\psi},p}$, где

$$\widetilde{\psi}(x) = \int_x^1 \frac{\psi(t)}{t} dt, \tag{1}$$

и была доказана точность полученного результата. Более того, из доказательства следует, что для тригонометрической системы результаты справедливы независимо от того, по какой последовательности (n_k) стремится к бесконечности номер частичной суммы $S_{n_k}(f)$.

В случае системы Уолша результаты иные. Это связано с тем, ограничены ли в совокупности константы Лебега L_n с номерами, пробегающими последовательность (n_k). Основные результаты можно сформулировать в виде следующих теорем, в которых $S_n(f)$ — частичная сумма ряда Фурье–Уолша функции f. Система Уолша рассматривается на $[0,1)$ в нумерации Пэли.

Теорема 1. *Если $N = (n_k)_{k=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой $\sup\limits_{n\in N} L_n < +\infty$, то существует постоянная $C = C(\psi,p) > 0$ такая, что для любого $n \in N$*

$$\|S_n(f)\|_{\psi,p} \le C\|f\|_{\psi,p}.$$

Теорема 2. *Если $N = (n_k)_{k=1}^\infty$ — произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, для которой $\sup\limits_{n\in N} L_n = +\infty$, то существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой $f \in \Lambda_{\psi,p}$ и любого $n \in N$ справедливо неравенство*

$$\|S_n(f)\|_{\tilde{\psi},p} \le C\|f\|_{\psi,p},$$

где $\widetilde{\psi}$ определена равенством (1).

Следствие. В условиях теоремы 2 частичные суммы $S_n(f)$ $(n \in N)$ ряда Фурье–Уолша функции $f \in \Lambda_{\psi,p}$ сходятся к f по норме пространства $\Lambda_{\tilde{\psi},p}$.

Теорема 3. *Пусть $\psi(x)$ дополнительно удовлетворяет условию*

$$\left(1 + C_1/(1 + \log \tfrac{1}{x})\right)\psi(x) \le \psi(\tfrac{x}{2}).$$

Если последовательность $N = (n_k)$ такова, что $\sup\limits_{n\in N} L_n = +\infty$, то для любой функции $\alpha(t) \downarrow 0$ при $t \downarrow 0$ найдется функция $f \in \Lambda_{\psi,p}$ такая, что

$$\sup_{n\in N} \|S_n(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p} = +\infty.$$

2. Вспомогательные факты и утверждения

На $[0,1)$ в нумерации Пэли ([5], с. 10) будем рассматривать функции Уолша

$$w_n(t) = r_{n_1}(t) r_{n_2}(t) \dots r_{n_s}(t),$$

где

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \dots + 2^{n_s} \quad (n_1 > n_2 > \dots > n_s)$$

— двоичное разложение числа n. Для частичной суммы $S_n(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k(f) w_k(x)$ ряда Фурье–Уолша справедливо представление

$$S_n(f,x) = \int_{[0,1]} f(t) D_k(x \oplus t)\, dt,$$

где $D_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k(t)$ — ядро Дирихле. Кроме частичной суммы будем использовать модифицированную частичную сумму

$$S_n^*(f,x) = \int_{[0,1]} f(t) D_n^*(x \oplus t)dt,$$

в которой функцию $D_n^*(t) = w_n(t)D_n(t)$ называют обычно модифицированным ядром Дирихле.

Если $n = 2^m$, то

$$S_n(f,x) = \frac{1}{|\Delta_x^{(m)}|} \int_{\Delta_x^{(m)}} f(t)dt,$$

где $\Delta_x^{(m)}$ — тот двоичный полуинтервал $\left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right)$, который содержит точку x.

Если $n \in \mathbb{N}$ имеет двоичное разложение

$$n = \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=n_{2j-1}-1}^{n_{2j}} 2^k \quad (n_1 > n_2 > \dots > n_{2s}), \tag{2}$$

то для модифицированной частичной суммы $S_n^*(f)$ справедливо представление ([5], с. 420)

$$S_n^*(f) = \sum_{k=1}^{2s} (-1)^{k+1} S_{2^{n_k}}(f). \tag{3}$$

Для констант Лебега $L_n = \|D_n\|_1$ по системе Уолша справедливо неравенство ([6], с. 34)

$$\frac{1}{4}\operatorname{var}(n) = \frac{1}{4} 2s \le L_n \le 2s = \operatorname{var}(n),$$

где через $\operatorname{var}(n)$ обозначена вариация числа, которая определяется по двоичному разложению

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k \quad (\varepsilon_k = 0 \text{ или } 1)$$

равенством $\operatorname{var}(n) = \varepsilon_0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} |\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}|$. Приведем несколько технических неравенств, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1. *Если ψ удовлетворяет условиям $\Psi 1$–$\Psi 4$, то*

$$1)\ \ \psi(x^2) \le \gamma \psi(x) \quad (\gamma = e^{3C_2/2}), \quad 2)\ \ \widetilde{\psi}(x/2) \le (1 + C_2)\widetilde{\psi}(x).$$

Доказательство. Пусть $1/2^{n+1} < x \le 1/2^n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда

$$\psi(x^2) \le \psi(1/2^{2n+2}) \le \prod_{k=n}^{2n+1} \left(1 + \frac{C_2}{1 + \log 2^k}\right) \psi(1/2^n)$$

и

$$\ln \prod_{k=n}^{2n+1} \left(1 + \frac{C_2}{1+k}\right) \le C_2 \int_n^{2n+2} \frac{dx}{x} = \ln\left(2 + \frac{2}{n}\right)^{C_2}.$$

Отсюда и следует 1) с $\gamma = 4$. При $n = 0$ получаем $\gamma = e^{3C_2/2}$. Неравенство 2) очевидно. $\square$

Лемма 2. *Если ψ удовлетворяет условиям $\Psi 1$–$\Psi 4$, то существуют такие постоянные C_3, $C_4 > 0$, что*

$$C_3 |||f|||_{\psi,p} \le \|f\|_{\psi,p} \le C_4 |||f|||_{\psi,p}.$$

Это неравенство доказано в [3] при условии $\psi(x^2) \le \gamma\psi(x)$, поэтому оно верно и при условии $\Psi 4$. $\square$

Лемма 3. *Если ψ удовлетворяет условиям $\Psi 1$–$\Psi 4$, то существует такая постоянная величина $C_5 > 0$, что*

$$\frac{1}{n}\widetilde{\psi}(1/2^n) \geq C_5\psi(1/2^n) \quad (n \geq 1).$$

Доказательство. При $n \geq 2$ имеем

$$\frac{1}{n}\widetilde{\psi}(1/2^n) = \frac{1}{n}\int_{2^{-n}}^{1} \frac{\psi(t)}{t}dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2^{k-n}}^{2^{k-n+1}} \frac{\psi(t)}{t}dt \geq \frac{\ln 2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(1/2^{n-k-1}) \geq$$

$$\geq \psi(1/2^n)\frac{\ln 2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{j=1}^{k+1}\frac{1}{1+\frac{C_2}{1+n-j}} \geq \psi(1/2^n)\frac{\ln 2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k-1}{n}\right)^{C_2} =$$

$$= \psi(1/2^n)\frac{\ln 2}{n^{1+C_2}}\sum_{k=0}^{n-1}k^{C_2} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1+C_2}\frac{\ln 2}{1+C_2}\psi(1/2^n). \quad \square$$

Лемма 4. *Пусть ψ удовлетворяет условиям $\Psi 1$–$\Psi 4$ и $j_0 \in [1, 2s-1]$. Тогда при $j \leq 2s - j_0$*

$$\sum_{k=j}^{2s}\psi(1/2^{2s-k}) \geq \psi(1/2^{2s-j})\frac{2s-j+1}{C_2+1}\left(\frac{j_0-1}{j_0}\right)^{C_2}.$$

Доказательство. Так как $\psi(\frac{x}{2}) \leq (1 + \frac{C_2}{1+\log\frac{1}{x}})\psi(x)$, то

$$\sum_{k=j}^{2s}\psi(1/2^{2s-k}) \geq \psi(1/2^{2s-j})\left(1 + \sum_{n=j}^{2s-1}\prod_{k=j}^{n}\left(1+\frac{C_2}{2s-k}\right)^{-1}\right). \tag{4}$$

Оценивая произведение в правой части (4), имеем

$$\prod_{k=j}^{n}\left(1+\frac{C_2}{2s-k}\right) \leq \left(\frac{2s-j}{2s-n-1}\right)^{C_2}.$$

Подставляя в (4), получим при $j \leq 2s - j_0$

$$\sum_{k=j}^{2s}\psi(1/2^{2s-k}) \geq \psi(1/2^{2s-j})\left(1 + \sum_{n=j}^{2s-1}\left(\frac{2s-n-1}{2s-j}\right)^{C_2}\right) \geq$$

$$\geq \psi(1/2^{2s-j})\left(1 + \frac{1}{(2s-j)^{C_2}}\int_0^{2s-j-1}x^{C_2}dx\right) \geq \psi(1/2^{2s-j})\left(\frac{j_0-1}{j_0}\right)^{C_2}\frac{2s-j-1}{C_2+1}. \quad \square$$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть $N = (n_k)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел и $\sup\limits_{n\in N}\operatorname{var}(n) = V < +\infty$. Тогда при любом $n \in N$ для частичных сумм $S_n(f)$ Фурье–Уолша при любом $p \geq 1$ имеем

$$\|S_n(f)\|_p = \|f * D_n\|_p \leq \|f\|_p\|D_n\|_1 \leq \|f\|_p V.$$

Поэтому

$$|||S_n(f)|||_{\psi,p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|S_n(f)\|_k}{\psi(2^{-k})}\right)^p\right)^{1/p} \leq V\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\|f\|_k}{\psi(2^{-k})}\right)^p\right)^{1/p} = V|||f|||_{\psi,p},$$

а т. к. нормы $|||\cdot|||_{\psi,p}$ и $\|\cdot\|_{\psi,p}$ (см. лемму 2) эквивалентны, то теорема 1 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2 полностью повторяет доказательство аналогичного утверждения для тригонометрической системы, приведенное в [3], и оно опускается.

Доказательство теоремы 3 Пусть $\sup\limits_{n\in N} L_n = +\infty$ и n имеет двоичное представление (2). Будем строить при каждом $n \in N$ функцию $f \in \Lambda_{\psi,p}$ такую, что отношение

$$\frac{\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}}{\|f\|_{\psi,p}} = \frac{\|S_n(w_n f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}}{\|w_n f\|_{\psi,p}}$$

неограничено.

Функцию f будем строить как ступенчатую на $[0, 1)$.

1) Если $x \in [0, 1/2^{n_1})$, то положим $f(x) = \lambda_1 = \mathrm{const}$.

2) Если $x \in [1/2^{n_2+1}, 1/2^{n_2})$, то положим $f(x) = \lambda_2 = \mathrm{const}$. Если $1/2^{n_2+1} \neq 1/2^{n_1}$, то $f(x)$ продолжим с $[0, 1/2^{n_1})$ на $[1/2^{n_1}, 1/2^{n_2+1})$ периодически с периодом $1/2^{n_1}$.

3) Предположим, что $f(x)$ уже построена на $[0, 1/2^{n_{j-1}})$ и построим ее на $[1/2^{n_{j-1}}, 1/2^{n_j})$. Для $x \in [1/2^{n_j+1}, 1/2^{n_j})$ положим $f(x) = \lambda_j = \mathrm{const}$. Если $\frac{1}{2^{n_{j-1}}} < \frac{1}{2^{n_j+1}}$, то $f(x)$ продолжим с $[0, 1/2^{n_{j-1}})$ на $[1/2^{n_{j-1}}, 1/2^{n_j+1})$ с периодом $1/2^{n_{j-1}}$.

4) Таким образом, построим $f(x)$ на $[0, 1/2^{n_{2s}})$. Если $1/2^{n_{2s}} = 1$, то построение закончено, в противном случае продолжим $f(x)$ с $[0, 1/2^{n_{2s}})$ на $[1/2^{n_{2s}}, 1)$ с периодом $1/2^{n_{2s}}$.

Будем считать, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_{2s}|$, а конкретные значения λ_j подберем позже.

Образуем множества

$$E_{j,i} = \{x \in [0, 1/2^{n_j}) : f(x) = \lambda_i\} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2s, \;\; i = 1, 2, \ldots, j),$$
$$E_j = \{x \in [0, 1) : \; f(x) = \lambda_j\} \quad (j = 1, 2, \ldots, 2s).$$

Нетрудно проверить, что

$$\mu E_{1,1} = 1/2^{n_1}, \quad \mu E_{j,j} = 1/2^{n_j+1} \quad (j = 2, 3, \ldots, 2s),$$
$$\mu E_{j,1} = \mu E_{j,2} \quad (j = 2, 3, \ldots, 2s),$$
$$\mu E_{j,i-1} = \tfrac{1}{2}\mu E_{j,i} \quad (j \geq 3, \;\; i = 3, \ldots, j-1, j),$$
$$\mu E_1 = \mu E_2, \quad \mu E_j = 1/2^{2s-j+1} \quad (j = 2, 3, \ldots, 2s).$$

Для оценки $\|f\|_{\psi,p}$ имеем

$$\|f\|_{\psi,p}^p = \int_0^1 \left(\frac{f^*(t)}{\psi(t)}\right)^p \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{2s} \int_{E_j} \left(\frac{f^*(t)}{\psi(t)}\right)^p \frac{dt}{t} = \sum_{j=1}^{2s} |\lambda_j| \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \frac{dt}{\psi^p(t)t},$$

где $\alpha_0 = 0$, $\alpha_j = 1/2^{2s-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, 2s)$. Отсюда, с учетом леммы 3, при $s \geq s_0$, т. е. при s достаточно большом

$$\|f\|_{\psi,p}^p = |\lambda_1|^p \int_0^{1/2^{2s-1}} \frac{dt}{\psi^p(t)t} + \sum_{j=2}^{2s} |\lambda_j|^p \int_{1/2^{2s-j+1}}^{1/2^{2s-j}} \frac{dt}{\psi^p(t)t} \leq$$
$$\leq |\lambda_1|^p \int_0^{1/2^{2s-1}} \frac{dt}{\psi^p(t)t} + \ln 2 \sum_{j=2}^{2s} \frac{|\lambda_j|^p}{\psi^p(1/2^{2s-j})} \leq \frac{|\lambda_1|^p}{\psi^p(1/2^{2s-1})} C_5 2s + \ln 2 \sum_{j=2}^{2s} \frac{|\lambda_j|^p}{\psi^p(1/2^{2s-j})}.$$

Если теперь положим $|\lambda_j| = \psi(1/2^{2s-j})$ и $\lambda_j = |\lambda_j|(-1)^{j+1}$, то для $\|f\|_{\psi,p}$ имеем окончательно

$$\|f\|_{\psi,p}^p \leq 2sC_6. \tag{5}$$

Оценим $\|S_n^*(f, x)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}^p$, когда $\alpha(x) \downarrow 0$ при $x \downarrow 0$. Для этого найдем оценку снизу для модифицированных частичных сумм $|S_n^*(f, x)|$ на каждом множестве E_j.

Так как n имеет двоичное разложение (2), то для $S_n^*(f,x)$ имеем с учетом (3) в точке $x \in E_j$

$$S_n^*(f,x) = \sum_{k=1}^{2s}(-1)^{k+1}\frac{1}{|\Delta_x^{(n_k)}|}\int_{\Delta_x^{(n_k)}} f(t)dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{j-1}\frac{(-1)^{k+1}}{|\Delta_x^{(n_k)}|}\int_{\Delta_x^{(n_k)}} f(t)dt + \sum_{k=j}^{2s}\frac{(-1)^{k+1}}{|\Delta_x^{(n_k)}|}\int_{\Delta_x^{(n_k)}} f(t)dt = \Sigma_1 + \Sigma_2. \quad (6)$$

По построению $f(\xi) = \lambda_j$ на $\Delta_x^{(n_k)}$ при $k \le j-1$. Поэтому

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k+1}\lambda_j = \lambda_j\sum_{k=1}^{j-1}(-1)^{k+1},$$

т. е.

$$|\Sigma_1| \le |\lambda_j| = \psi(1/2^{2s-j}). \quad (7)$$

Оценим Σ_2. Выберем $j_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$1 + C_2/(1+\log\frac{1}{x}) \le d = \frac{3}{2}$$

при $x < 2^{-j_0}$, и пусть $x \in E_j$ $(j \le 2s - j_0)$. По построению f на $\Delta_x^{(n_k)}$ есть сдвиг f с $\Delta_0^{(n_k)}$. Поэтому

$$\Sigma_2 = \sum_{k=j}^{2s}\frac{(-1)^{k+1}}{|\Delta_x^{(n_k)}|}\int_{\Delta_0^{(n_k)}} f(t)dt = \sum_{k=j}^{2s}(-1)^{k+1}2^{n_k}\sum_{i=1}^{k}\int_{E_{k,i}} f(t)dt =$$
$$= \sum_{k=j}^{2s-j_0}(-1)^{k+1}2^{n_k}\sum_{i=1}^{k}\int_{E_{k,i}} f(t)dt + \sum_{k=2s-j_0+1}^{2s}(-1)^{k+1}2^{n_k}\sum_{i=1}^{k}\int_{E_{k,i}} f(t)dt = \Sigma_{21} + \Sigma_{22}. \quad (8)$$

Покажем, что Σ_{22} ограничено постоянной, не зависящей от s. Для внутренней суммы в Σ_{22} имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{E_{k,i}} f(t)dt = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mu E_{k,i} = \sum_{i=1}^{2s-j_0}\lambda_i\mu E_{k,i} + \sum_{i=2s-j_0+1}^{k}\lambda_i\mu E_{k,i}. \quad (9)$$

Отметим, что j_0 выбрано так, что $\psi(\frac{x}{2}) \le \frac{3}{2}\psi(x)$ при $j \le 2s - j_0$ и $x \in E_j$. Поэтому последовательность $(|\lambda_i|\mu E_{k,i})_{i=1}^{2s-j_0}$ строго возрастает и, значит,

$$\Big|\sum_{i=1}^{2s-j_0}\lambda_i\mu E_{k,i}\Big| \le |\lambda_{2s-j_0}|\mu E_{k,2s-j_0} = 2^{k-2s+j_0}|\lambda_{2s-j_0}|\mu E_{k,k} \le 2^{j_0}\psi(1/2^{j_0})2^{-n_k-1}. \quad (10)$$

Для второй суммы в (9) получаем оценку

$$\Big|\sum_{i=2s-j_0+1}^{k}\lambda_i\mu E_{k,i}\Big| \le \sum_{i=2s-j_0+1}^{k}|\lambda_i|\mu E_{k,i} \le \mu E_{k,k}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\Big)\sum_{i=2s-j_0+1}^{2s}\psi(1/2^{2s-1}) \le$$
$$\le 2^{-n_k}\sum_{i=0}^{j_0-1}\psi(1/2^i). \quad (11)$$

Подставляя (11) и (10) в (9), находим

$$\Big|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\mu E_{k,i}\Big| \le \frac{\psi(1/2^{j_0})}{2^{n_k+1}}(2^{j_0}+2j_0) \le \psi(1/2^{j_0})\frac{2^{j_0}}{2^{n_k}}.$$

Используя полученное неравенство, для Σ_{22} окончательно имеем

$$|\Sigma_{22}| \leq \sum_{k=2s-j_0+1}^{2s} \psi(1/2^{j_0})2^{j_0} \leq j_0 2^{j_0} \psi(1/2^{j_0}). \tag{12}$$

Оценим сумму Σ_{21}, у которой во внутренней сумме числа $(|\lambda_i|\mu E_{k,i})_{i=1}^{k}$ также образуют возрастающую последовательность. Поэтому (при $k > 1$)

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu E_{k,i}\right| \geq |\lambda_k|\mu E_{k,k} - |\lambda_{k-1}|\mu E_{k,k-1} = \mu E_{k,k}(|\lambda_k| - \tfrac{1}{2}|\lambda_{k-1}|) \geq$$
$$\geq \mu E_{k,k}\psi(1/2^{2s-k})(1 - \tfrac{3}{4}) = \tfrac{1}{8}2^{-n_k}\psi(1/2^{2s-k}). \tag{13}$$

При $k = 1$ верна такая же оценка, но с заменой $1/8$ на 1. Таким образом, (13) верно при $k \geq 1$ и, кроме того, в силу монотонности последовательности $(|\lambda_i|\mu E_{k,i})_{i=1}^{k}$

$$\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu E_{k,i}\right) = \operatorname{sign}(\lambda_k \mu E_{k,k}) = (-1)^{k+1}.$$

Учитывая это и неравенство (13), имеем

$$\Sigma_{21} = \left|\Sigma_{21}\right| = \sum_{k=j}^{2s-j_0} 2^{n_k}\left|\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu E_{k,i}\right| \geq \frac{1}{8}\sum_{k=j}^{2s-j_0} \psi(1/2^{2s-k}) =$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{j_0-1} \psi(1/2^{k}). \tag{14}$$

Подставляя (14), (12), (8) и (7) в (6), находим, что при $x \in E_j$ $(j \leq 2s - j_0)$

$$|S_n^*(f,x)| \geq \frac{1}{8}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) - \psi(1/2^{2s-j}) - \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{j_0-1} \psi(1/2^{k}) - j_0 2^{j_0}\psi(1/2^{j_0}). \tag{15}$$

По лемме 4

$$\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) \geq \psi(1/2^{2s-j})\frac{2s-j+1}{C_2+1}\left(\frac{j_0-1}{j_0}\right)^{C_2}.$$

Потребуем, чтобы j_0 дополнительно удовлетворяло условию

$$\left(\frac{j_0+1}{C_2+1}\right)\left(1 - \frac{1}{j_0}\right)^{C_2} \geq 16.$$

В этом случае

$$\frac{1}{8}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) - \psi(1/2^{2s-j}) \geq \frac{1}{16}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k})$$

и, если через $C_7(j_0)$ обозначить сумму модулей двух последних слагаемых в (15), то для $S_n^*(f,x)$ имеем

$$|S_n^*(f,x)| \geq \frac{1}{16}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) - C_7(j_0).$$

Но тогда можно найти $j_1 > j_0$ такое, что при $x \in E_j$ $(j \leq 2s - j_1)$

$$|S_n^*(f,x)| \geq \frac{1}{20}\sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}). \tag{16}$$

Пусть теперь $\alpha(x) \downarrow 0$ при $x \downarrow 0$ и $\widetilde{\psi}(x) = \int\limits_x^1 \frac{\psi(t)}{t} dt$. Оценим $\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}$. С учетом леммы 1, неравенства (16) и обозначений $\left(\frac{|S_n^*(f,x)|^*}{\tilde{\psi}(t)\alpha(t)}\right)^p t^{-1} = A(t)$, $\sum\limits_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) = s_j$ имеем

$$\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}^p = \int_0^1 A(t)dt = \sum_{j=1}^{2s} \int_{E_j} A(t)dt \geq \sum_{j=1}^{2s-j_1} \int_{E_j} A(t)dt \geq \frac{1}{(20)^p} \sum_{j=1}^{2s-j_1} s_j^p \int_{E_j} \frac{1}{\widetilde{\psi}^p(t)\alpha^p(t)} \frac{dt}{t} \geq$$

$$\geq \frac{1}{20^p} \sum_{j=1}^{2s-j_1} s_j^p \int_{2^{-2s+j-1}}^{2^{-2s+j}} \frac{dt}{\widetilde{\psi}^p(t)\alpha^p(t)} \geq \frac{1}{20^p} \sum_{j=1}^{2s-j_1} s_j^p \frac{\ln 2}{\widetilde{\psi}^p(2^{-2s+j-1})\alpha^p(2^{-2s+j})} \geq$$

$$\geq \frac{1}{20^p} \sum_{j=1}^{2s-j_1} \ln 2 (2+C_2)^p \frac{s_j^p}{\widetilde{\psi}^p(2^{-2s+j})\alpha^p(2^{-2s+j})}. \quad (17)$$

В этом неравенстве S_n^* — модифицированная частичная сумма, а $|\cdot|^*$ обозначает невозрастающую перестановку. Подставляя неравенство

$$\widetilde{\psi}(1/2^{2s-j}) = \int_{2^{j-2s}}^1 \frac{\psi(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{2s-j} \int_{2^{-2s+j+k-1}}^{2^{-2s+j+k}} \frac{\psi(t)}{t} dt \leq \ln 2 \sum_{k=1}^{2s-j} \psi(2^{-2s+j+k-1}) \leq$$

$$\leq \ln 2 \sum_{k=j}^{2s} \psi(1/2^{2s-k}) = s_j \ln 2$$

в (17), с учетом (5) имеем

$$\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}^p \geq C_8 \sum_{j=1}^{2s-j_1} \frac{1}{\alpha^p(2^{-2s+j})} \Rightarrow \frac{\|S_n^*(f)\|_{\tilde{\psi}\alpha,p}^p}{\|f\|_{\psi,p}^p} \geq$$

$$\geq \frac{C_8}{C_6} \frac{1}{2s} \sum_{j=1}^{2s-j_1} \frac{1}{\alpha^p(2^{-2s+j})} \to +\infty \text{ при } s \to +\infty. \quad \square$$

Литература

1. Лукомский С.Ф. *О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к L_∞* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 6. – С. 882–889.
2. Асташкин С.В. *Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств* // Матем. сб. – 2003. – Т. 194. – № 6. – С. 26-42.
3. Lukomsii S.F. *Convergence of Fourier series in Lorentz spaces* // East J. on Approximat. – 2003. – V. 9. – № 2. – P. 229–238.
4. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
5. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и приложения.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.
6. Schipp F., Wide W.R., Simon P. *Walsh series. An introduction to diadic harmonic ahalysis.* – Budspest: Akademiai Kiado, 1990. – 560 p.

Саратовский государственный университет

Поступила 05.04.2004