

УДК 519.63:532.546

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИТОКА ОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ К ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СКВАЖИНЕ С ТРЕЩИНАМИ МНОГОСТАДИЙНОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

М.Р. Хамидуллин

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Представлена численная схема решения задачи однофазной фильтрации жидкости вблизи скважины, стимулированной трансверсальными трещинами многостадийного гидравлического разрыва пласта (ГРП). Течение в пласте и в трещинах ГРП подчинено линейному закону фильтрации и моделируется раздельно. Задача аппроксимируется методом конечных объемов. При этом полученные системы линейных уравнений решаются совместно, что позволяет избежать использования итерационного процесса для согласования решений в пласте и трещинах ГРП. Исследованы различные способы и предложен оптимальный вариант решения плохо обусловленных систем линейных уравнений, возникающих в результате сеточной аппроксимации математической модели течения.

Ключевые слова: горизонтальная скважина, многостадийный гидравлический разрыв пласта, алгебраический многосеточный метод, предобуславливатель

Введение

Бурение горизонтальных скважин (ГС) является относительно новой технологией в нефтегазовой отрасли по сравнению с традиционными вертикальными скважинами. Данная технология получила широкое распространение в связи необходимостью разработки залежей с тяжелой нефтью и низкой проницаемостью коллекторов.

Гидравлический разрыв нефтяного пласта (ГРП) в прискважинной области применяется для повышения дебита за счет расширения зоны дренирования. В последние годы получил распространение многостадийный ГРП (МГРП), при котором несколько трещин расположены в ортогональных к оси горизонтальной скважины плоскостях.

Фильтрация около сети трещин ГРП имеет сложный характер. А полное описание возникающих потоков требует комплексного рассмотрения трехмерных многофазных течений, возникающих в пласте, трещинах и скважине. Применение сеточных методов построения численной схемы для детального моделирования процесса предполагает использование подробных сеток с локальным сгущением узлов в областях высоких градиентов давления (около трещин и скважин). Это приводит к возникновению алгебраических задач больших размерностей, требующих высоких вычислительных затрат на их решение.

В то же время при проектировании ГРП возникает потребность в быстрой оценке эффективности ГРП в зависимости от геометрии трещин и их взаимного расположения. Использование детальных сеточных моделей для проведения многовариантных расчетов требует чрезмерных вычислительных затрат, поэтому актуальной

становится проблема создания упрощенных численных схем для расчетов таких течений.

Аналитические модели притока флюида широко описаны в литературе [1, 2]. Большинство подобных исследований основано на изучении течения однофазной жидкости с постоянными свойствами. В работе [1] представлена модель для прогнозирования продуктивности горизонтальных скважин с многостадийным ГРП для низкопроницаемых коллекторов с учетом непостоянных свойств жидкости и многофазности потока в пласте и трещинах ГРП. Рассмотрено влияние градиента давления и свойств пластовой жидкости на продуктивность горизонтальной скважины. Показано, что предложенная модель наиболее точно оценивает дебит горизонтальной скважины с МГРП в отличие от моделей однофазной фильтрации, которые переоценивают продуктивность.

Наряду с аналитическими моделями большое распространение получили полуаналитические методы, когда течение внутри трещин моделируется с помощью приближенных формул. В публикации [3] авторы представили метод расчета притока жидкости к горизонтальной скважине с трансверсальными трещинами ГРП. При этом давление в трещинах отыскивалось по аналитической модели, а затем полученное решение сопрягалось с численным решением задачи в пласте.

В настоящее время развитие получили численные методики расчета притока флюида к горизонтальным скважинам с МГРП. Преимущества численных схем заключаются в том, что они позволяют получить искомый результат с учетом фильтрации во всех расчетных областях со сложной геометрией и с учетом их неоднородности по проницаемости. В то же время они требуют большего объема вычислений в отличие от аналитических или полуаналитических методов. В [4] устанавливается нестационарность поведения давления в ходе численного решения задачи о притоке однофазного флюида при включении ГС с МГРП. Рассматривается бесконечный пласт, считается, что трещины расположены ортогонально оси скважины на одинаковом расстоянии друг от друга. Толщина, проницаемость пласта, а также ширина раскрытия трещин постоянны. К уравнениям для определения давления применяются преобразования Лапласа, далее эти уравнения решаются численно на структурированной сетке.

В [5] оценивается производительность скважины с многостадийным многостадийным гидроразрывом пласта, который представляет собой параллелепипед. Течение предполагается однофазным. Предполагается также, что трещины, имеющие произвольную длину, проницаемость и раскрытие, могут быть параллельны или перпендикулярны оси горизонтальной скважины. Авторы утверждают, что данное представление позволяет легко включить такую схему в полномасштабную гидродинамическую модель.

В [6] предложен вычислительный алгоритм определения фильтрационных потоков вблизи вертикальной скважины с продольными трещинами ГРП. Задача является одномерной, процесс фильтрации в пласте считается нестационарным. Учет трещин в модели ограничен пересчетом средней проницаемости блоков, через которые они проходят.

В работе [7] рассматривается задача стационарного притока флюида к вертикальной скважине с трещиной ГРП конечной проводимости. Автор предлагает 2D-численную модель фильтрации флюида к скважине с трещиной ГРП. Для построения разностной схемы основные уравнения фильтрации в пласте аппроксимируются интегро-интерполяционным методом. Трещины учитываются в задаче только в виде высокопроницаемых зон в прискваженных ячейках. Значения проницаемости в ячейках, пересеченных трещиной ГРП, вычисляются как средневзвешенные по соответствующим площадям. Полученная система уравнений решается методом стабилизированных бисопряженных градиентов (BCGS) [8], основанном на методе

биортогонализации Ланцоша. Изучается влияние спектральных свойств матрицы коэффициентов на разрешимость системы линейных уравнений, а также даются некоторые рекомендации по использованию предобуславливателей для плохо обусловленных матриц. В частности, автор исследовал два вида предобуславливателей – Якоби и преобуславливатель с неполной факторизацией $ILU(0)$. При использовании последнего время решения системы сокращается в среднем на 20%.

Работа [9] посвящена решению задач фильтрации сжимаемой многофазной многокомпонентной смеси на параллельных ЭВМ. В данной работе трещины ГРП учитываются при численном моделировании с помощью сети дополнительных «виртуальных» перфораций скважины в блоках сетки, через которые проходит трещина. При этом геометрия виртуального участка перфорации подбирается такой, чтобы периметр сечения ствола скважины был равен периметру трещины, а длина перфорированного участка была равна длине трещины в блоке. Приток в участок перфорации скважины определяется проницаемостью блока в направлении, ортогональном грани трещины с наибольшей площадью. Предложенная автором математическая модель реализована в программе tNavigator (<http://rfdyn.ru/technology/>). Модель позволяет описать движение жидкости или газа по трещине, раскрытие и схлопывание трещины при повышении или понижении давления в ней, эффекты увеличения гидродинамического сопротивления течению в трещине за счет осаждения высоковязких фракций. Задача решается численно, при этом уравнения аппроксимируются с помощью метода конечных объемов. Полученная в результате аппроксимации система линейных уравнений с несимметричной матрицей решается алгебраическим многосеточным методом. Автор проводит анализ влияния различных предобуславливателей для минимизации накопления вычислительной ошибки при большом числе итераций. Вопрос о том, какой метод предобуславливания эффективнее, с математической точки зрения открыт. Для решения системы линейных уравнений с несимметричной разреженной матрицей в основном используют два алгоритма – обобщенный метод минимальных невязок (GMRES) [10], основанный на минимизации невязки в пространстве Крылова, и BCGS.

Работа [11] посвящена численному моделированию притока однофазного флюида к вертикальной скважине в трещиноватом пласте. Уравнения фильтрации аппроксимируются методом конечных разностей. Полученная система линейных уравнений решается методом Гаусса и итерационным методом неполного гауссова исключения, которые, однако, не оптимальны по скорости для больших СЛАУ и вычислительно неустойчивы для плохо обусловленных матриц, довольно часто возникающих в задачах со сложной структурой сетки. Предварительно неизвестные группируются по методу «красно-черного» упорядочивания, что, как указывает автор, может привести к сокращению размерности системы почти вдвое и, соответственно, сократить время расчета.

В [12] дана упрощенная постановка задачи фильтрации жидкости в пласте со скважиной при наличии трещины ГРП. Течение в трещинах ГРП описано с помощью формулы Буссинеска. Для расчета задачи взаимосвязанного течения в пласте и скважине использован итерационный процесс, расщепляющий исходную задачу на две подзадачи, решаемые последовательно: моделирование течения пластовых флюидов и моделирование течения в скважине и трещинах гидроразрыва. Численные расчеты выполнены с использованием неявных конечно-разностных схем и итерационного метода переменных направлений.

Работа [13] раскрывает аспекты численного моделирования газовых месторождений при их разработке скважинами, простимулированными трещинами ГРП. Автор рассматривает изотермическое трехфазное течение (газ, вода и гель, представляющий собой жидкость со сложной реологией) вблизи скважин с трещинами

ГРП. Для аппроксимации уравнений используется метод контрольных объемов. Модель учитывает многослойность пласта, причем каждый слой может иметь свою проницаемость и толщину. Искомая трехмерная область покрывается сеткой с помощью триангуляции Делоне, на которой затем строятся ячейки Вороного. Вблизи скважин строится сгущающаяся сетка, которая затем спшивается с сеткой в пласте. Считается, что скорость фильтрации в трещинах подчиняется нелинейному закону фильтрации, при этом падение давления вычисляется с помощью приближенных формул. Полученная после аппроксимации система линейных уравнений затем решается GMRES-методом с применением предобуславливателей.

В настоящей статье приведена трехмерная математическая модель, описывающая стационарный приток однофазной жидкости к горизонтальной скважине с МГРП. Учитывается течение как в трещинах гидроразрыва, так и в коллекторе без существенных упрощений. Падение давления вдоль скважины считается пренебрежимо малым. Численная схема решения основана на аппроксимации методом конечных объемов и позволяет решать уравнения для давления в пласте и трещинах совместно без итерационного срачивания решений на границе пласта и трещин. Это существенно ускоряет расчет на детальной сетке, сгущающейся от периферии к скважине. В отличие от большинства моделей, в которых одновременный учет течения в трещинах ГРП и в пласте приводит к большим вычислительным затратам, предложенная схема позволяет получить достаточно точное решение за приемлемое время, предоставляя возможность для проведения многовариантных расчетов.

1. Математическая модель и расчет притока флюида к горизонтальной скважине

Рассмотрим задачу о притоке однофазной жидкости к ГС, простимулированной многостадийным гидравлическим разрывом пласта с трансверсальными трещинами.

Известно [14], что на больших глубинах трещины ГРП имеют вертикальную ориентацию. Трещину, заполненную пропантом, можно рассматривать как среду с проницаемостью, намного превосходящей проницаемость коллектора.

В соответствии со сказанным выше, примем следующую схему горизонтальной скважины с МГРП (рис. 1). Введем декартову систему координат xyz с вертикальной осью z и осью y , направленной вдоль ствола скважины Γ_1 радиуса r_w и длины L . Начало отсчета совместим с началом перфорированного участка скважины. Кровля Γ_2 и подошва Γ_3 пласта непроницаемы, толщина пласта постоянна и равна $2H$. Абсолютную проницаемость коллектора обозначим через $k = k(x, y, z)$, а удельную (на единицу толщины пласта) гидропроводность – через $\sigma = k/\mu$, где μ – вязкость флюида. Контур питания Γ_4 в плоскости xy представим овалом (рис. 1, а), размеры которого определяются системой разработки залежи (сеткой скважин). Обычно контур Γ_4 удален от ГС на расстояние $l \approx 100$ м. Стенки Γ_5 трещин представим парой прямоугольных плоскостей размерами $2H \times 2h$ (см. рис. 1, б) с расстоянием между ними 2δ (раствор трещины). Трещины МГРП имеют проницаемость k_f и расположены на расстоянии $2d$ друг от друга. Удельную гидропроводность трещины обозначим через $\sigma_f = k_f/\mu$.

Считается, что однофазное фильтрационное течение стационарно и определяется разностью давления p_w на скважине и пластового давления p_l на внешнем контуре; капиллярные и гравитационные силы не учитываются. Давление вдоль длины скважины постоянно ($p_w = \text{const}$).

Для получения характерных показателей процесса достаточно рассмотреть лишь область D , ограниченную двумя вертикальными плоскостями симметрии

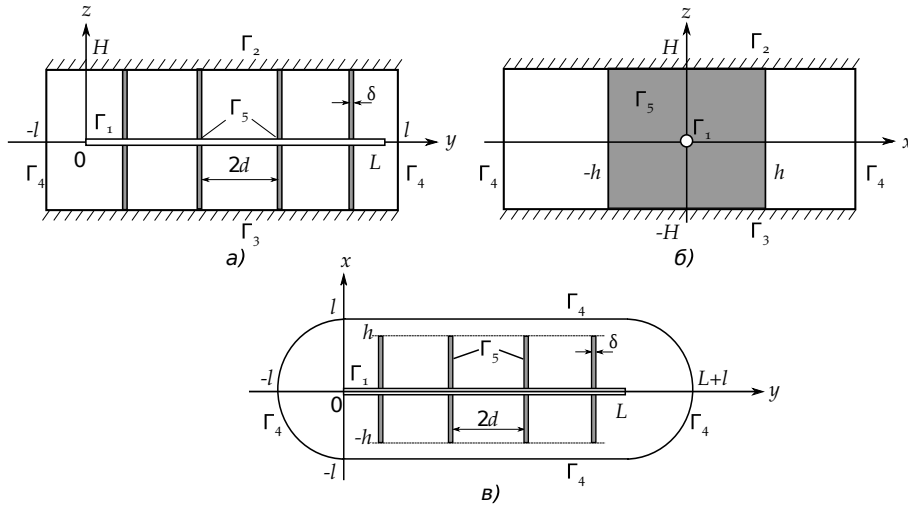


Рис. 1. Схема ГС с МГРП: а) вид сбоку, б) вид с торца, в) вид сверху

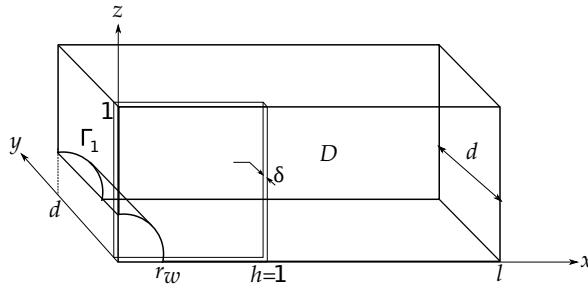


Рис. 2. Область решения задачи о притоке жидкости к горизонтальной скважине с трансверсальной трещиной ГРП

(рис. 2), одна из которых проходит через трещину ГРП, а другая отстоит от нее на расстоянии d .

При этих ограничениях математическая модель фильтрации в безразмерных переменных

$$\bar{p} = \frac{p - p_w}{p_l - p_w}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{(k_0/\mu)}, \quad \bar{u} = \frac{u}{(k_0/\mu) \frac{pl - p_w}{H}} \quad (1)$$

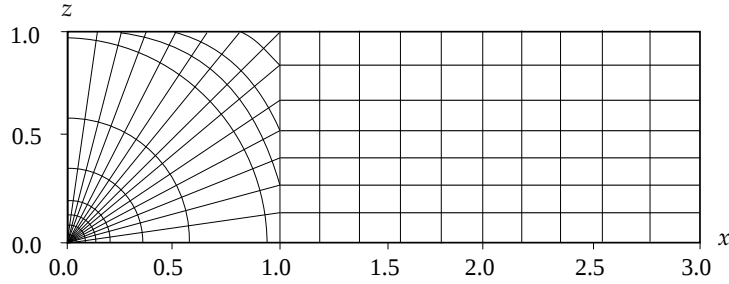
сводится к уравнениям, связывающим давление p и скорость фильтрации \bar{u} в коллекторе (черта над безразмерными величинами опущена):

$$-\text{div } \bar{u} = 0, \quad \bar{u} = -\sigma \text{ grad } p, \quad (2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} p &= 0 \quad \text{при } (x, y, z) \in \Gamma_1; \quad p = 1 \quad \text{при } x = l; \\ \frac{\partial p}{\partial n} &= 0 \quad \text{при } x = 0; \quad y = d; \quad y = 0, \quad x > h; \quad z = 0; \quad z = 1; \\ p &= p_f \quad \text{при } y = 0, \quad x \leq h. \end{aligned} \quad (3)$$

В формулах (1) k_0 – характерное значение проницаемости коллектора.

Рис. 3. Схема сеточного разбиения области в плоскости xz

Плоская задача для давления p_f в трещине ГРП при $y = 0$, $\delta \rightarrow 0$ и с учетом того, что плоскость $y = 0$ является плоскостью симметрии для функции p , принимает вид

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_f}{\partial z^2} + \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad M = \frac{k_f \delta}{kH}, \quad (4)$$

$$p_f = 0 \quad \text{при } (x, z) \in \Gamma_1; \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x = h; \quad x = 0. \quad (5)$$

Здесь параметр M является аналогом безразмерной проводимости трещины.

После того, как задача для давления решена, нетрудно подсчитать поле скорости \vec{u} по закону Дарси (2) и найти дебит q скважины с МГРП, который будет складываться из расхода через боковую поверхность γ ствола скважины

$$q_w = 4 \int_{\Gamma_1} u_n \Big|_{r=r_w} d\gamma = 4r_w \int_0^L \int_0^{2\pi} u_n \Big|_{r=r_w} d\varphi dy$$

и расхода, поступающего через трещины ГРП

$$q_f = 8 \int_0^1 \int_0^h u_y \Big|_{y=0} dx dy,$$

где u_n – проекция на внешнюю нормаль к Γ_1 скорости фильтрации, u_y – вторая компонента \vec{u} .

С подробным выводом приведенных выше формул для определения давлений в пласте и трещинах ГРП можно ознакомиться в работе [15].

Таким образом, безразмерная модель притока флюида включает в себя уравнения для определения пластового давления p (2), (3) и упрощенную двумерную задачу для определения давления в трещинах ГРП (4), (5). Решение определяется следующим набором параметров r_w , l , L , h , d , M , σ .

2. Численная реализация

Система уравнений (2), (4) аппроксимируется методом конечных объемов на сетке, сгущающейся к скважине (рис. 3).

При этом радиальная сетка строится в квадратной области, ограниченной сверху кровлей пласта, снизу и слева – плоскостями симметрии, а справа – плоскостью $x = H$. В остальной части плоской области строится прямоугольная сетка.

На основе двумерной сетки в плоскости xz строится трехмерная сетка путем «выдавливания» вдоль оси ствола скважины с шагом (рис. 4).

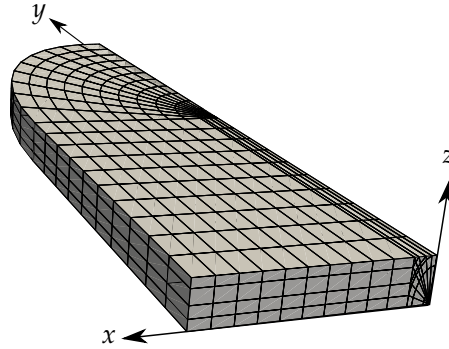


Рис. 4. Схема трехмерного сеточного разбиения области

При решении задачи отыскиваются средние давления в конечных объемах

$$P = \frac{1}{|V|} \int_V p dV.$$

Первое уравнение (2) интегрируется по произвольному конечному объему (КО) V (с учетом формулы Гаусса – Остроградского), и полученный интеграл аппроксимируется следующим образом:

$$\int_{\Gamma_V} u_n d\Gamma_V \approx \sum_i \tilde{u}_n^i |\Gamma_V^i|, = 0, \tag{6}$$

где $\Gamma_V = \bigcup_i \Gamma_V^i$ – поверхность КО V , состоящая из плоских граней Γ_V^i ; $|\Gamma_V^i|$ – площадь грани Γ_V^i , а \tilde{u}_n^i – среднее значение проекции скорости на внешнюю нормаль к этой грани

$$\tilde{u}_n \approx -\tilde{\sigma}^i \nabla p|_{\Gamma_V^i} \cdot \vec{n}^i \equiv -\tilde{\sigma}^i p_n^i.$$

Здесь p_n^i – нормальная производная давления p , $\tilde{\sigma}$ – гидропроводность на грани $|\Gamma_V^i|$, разделяющей КО V_1 и V_2 , определяемая из условия непрерывности давления и скорости

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_1 \sigma_2 (d_1 + d_2)}{d_2 \sigma_1 + d_1 \sigma_2},$$

где нижние индексы 1 и 2 соответствуют конечным объемам, разделяемым данной гранью; σ_1, σ_2 – гидропроводности в них, d_1, d_2 – расстояния от грани до центров V_1, V_2 . Нормальная производная p_n^i вычисляется аналогично [16] путем четырехточечной линейной аппроксимации через значения средних давлений P в точках коллокаций, в качестве которых используются центры соответствующих конечных объемов.

Аппроксимация уравнения для давления p_f в трещинах ГРП проводится по аналогии с аппроксимацией уравнения для давления p в коллекторе. В уравнении (4) третье слагаемое в левой части отвечает за приток флюида из пласта в трещину (в случае добывающей скважины). Интегрируя уравнение (4) по КО V_f , для третьего члена получим

$$\frac{1}{M} \int_{V_f} \frac{\partial p}{\partial y} dV_f \approx \frac{1}{M} |V_f| \frac{P - P_f}{h_d}. \tag{7}$$

Здесь h_d – расстояние от центра прилегающего к трещине конечного объема до берега трещины; а P_f – среднее давление в V_f , P – среднее давление в примыкающем к нему конечном объеме пласта. Поясним, что в плоской задаче для трещины конечный объем V_f является плоским и не имеет толщины, и $|V_f|$ является его площадью. Будем считать, что давление на берегах трещины и в трещине равны.

Уравнение для определения среднего давления P в каждом конечном объеме V пласта с учетом (6) будет иметь вид

$$\sum_i \tilde{u}_n^i |\Gamma_V^i| = 0, \quad (8)$$

а уравнение для среднего давления P_f с учетом (7) в конечном объеме V_f трещины будет следующим

$$\sum_i (\tilde{u}_f)_n^i |\Gamma_f^i| + \frac{1}{M} |V_f| \frac{P - P_f}{h_d} = 0, \quad (9)$$

где $(\tilde{u}_f)_n^i$ – среднее значение проекции скорости на внешнюю нормаль к грани Γ_f^i с площадью $|\Gamma_f^i|$.

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений

Совместное решение сеточных уравнений относительно p и p_f исключает необходимость итерационного согласования решений задач в пласте и трещине. Решение полученной объединенной (coupled) системы линейных уравнений может быть найдено с помощью прямых методов для разреженных систем (например, многофронтального метода LU-факторизации [17] и др.), а также с помощью различных итерационных алгоритмов. Для оценки количества ячеек, требуемых для описания течения, была рассмотрена сходимость численного решения на примере модельной задачи о притоке флюида к одиночной трещине МГРП. При этом для оценки сходимости вычислялась невязка

$$\varepsilon = \frac{q_{et} - \bar{q}}{q_{et}} \cdot 100,$$

где q_{et} – расчетная величина дебита скважины с МГРП при количестве элементов сетки порядка $0.5 \cdot 10^6$. Из графиков на рис. 5 видно, что для описания течения в самом простейшем случае необходимо как минимум 10^5 ячеек.

Среди итерационных алгоритмов решения СЛАУ, традиционно применяемых для задач гидродинамики, можно выделить алгебраический многосеточный метод. В настоящей работе использовался данный метод, программная реализация которого представлена на ресурсе <https://github.com/ddemidov/amgcl>.

Использование итерационных методов обращения решения объединенной системы осложняется плохими свойствами итоговой матрицы коэффициентов. Зависимость числа обусловленности матрицы от параметра M трещины для матрицы размерности $N = 10^4$ приведена на рис. 6. Видно, что с уменьшением значения параметра M число обусловленности s резко возрастает, что существенно замедляет сходимость алгоритма.

При этом для уменьшения числа обусловленности в таких случаях применяют сглаживатели для алгебраического многосеточного метода. На рис. 7 приведены зависимости числа итераций i_c AMG от параметра M при использовании различных сглаживателей. Видно, что сглаживатель Гаусса–Зейделя [18] наиболее эффективен для всего диапазона изменения параметра M , однако, при $M > 0.1$ сглаживатели с неполной факторизацией ILU(0) [19, 20] и Якоби [21] показывают аналогичный результат.

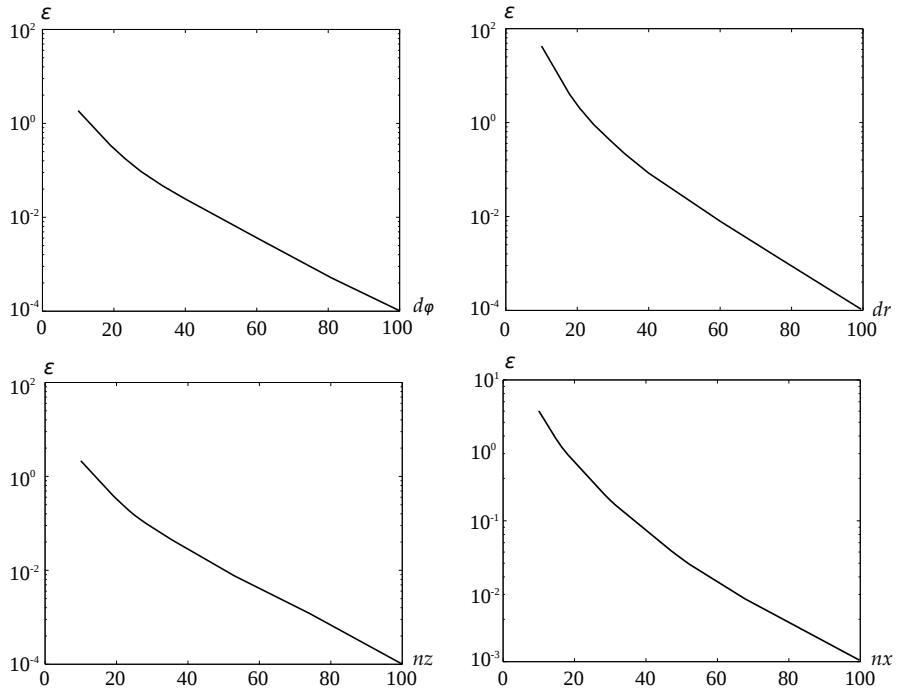


Рис. 5. Сходимость численного решения

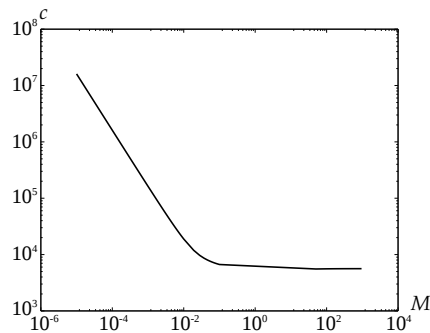


Рис. 6. Зависимость числа обусловленности матрицы коэффициентов от параметра трещины M

Алгебраический многосеточный метод состоит из двух шагов: формирование иерархии грубых сеток (уровней) и решение системы уравнений. Выбор метода огрубления и оператора перехода от одной сетки к другой очень важен, поскольку напрямую связан с ускорением сходимости метода.

Рассмотрим влияние использования алгоритмов огрубления. Среди всего множества методов огрубления наиболее распространены классический метод Рунге–Стюбена [22] и различные модификации агрегативного метода. На рис. 8 приведены графики, иллюстрирующие сходимость итерационного процесса при различных значениях параметра M трещины. Видно, что стандартный алгоритм Рунге–Стюбена наиболее эффективен на всем диапазоне изменения M и приводит к многократному повышению скорости сходимости по сравнению с другими методами.

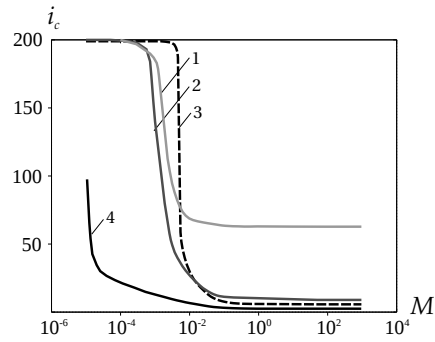


Рис. 7. Влияние сглаживателей на число итераций алгебраического многосеточного метода: 1 – Чебышева; 2 – с неполной факторизацией $ILU(0)$; 3 – Якоби; 4 – Гаусса–Зейделя

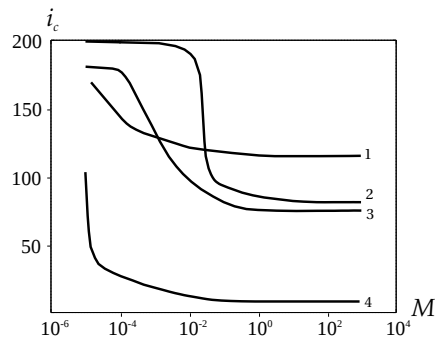


Рис. 8. Влияние методов огрубления на число итераций многосеточного метода: 1 – не-сглаженный агрегативный; 2 – сглаженный агрегативный с минимальной энергией; 3 – сглаженный агрегативный; 4 – Руге–Стюбена

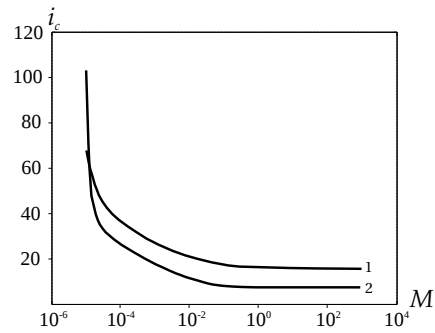


Рис. 9. Скорость сходимости многосеточного итерационного процесса для решателей: 1 – GMRES; 2 – BCGS

На рис. 9 показана зависимость скорости сходимости многосеточного итерационного процесса от параметра M . Оба решателя – GMRES и BCGS – демонстрируют примерно одинаковый результат. На рис. 10 приведены графики, показывающие зависимость затраченного времени и потребляемой оперативной памяти при решении СЛАУ от ее размерности – представлено сравнение итерационного метода BCGS и прямого метода QR-факторизации (программную реализацию алгоритма см. на https://github.com/kalininei/SuiteSparseWrap_cpp_cs). Тесты проводились на персональном компьютере Intel(R) Core(TM) i3 CPU 540 3.07 GHz.

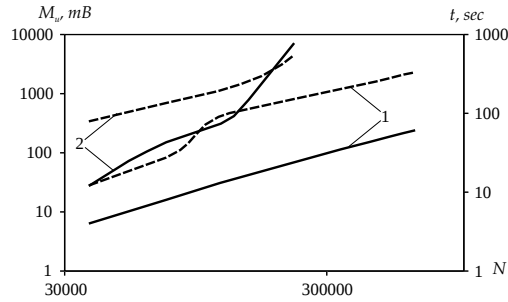


Рис. 10. Влияние количества ячеек сетки на время нахождения решения СЛАУ (сплошная линия) и на объем используемой оперативной памяти (пунктирная) (1 – BCGS, 2 – QR-факторизация)

Из рис. 10 видно, что для сеток с числом ячеек $N < 2 \cdot 10^5$ объем используемой оперативной памяти M_u для QR-факторизации и для итерационного решателя BCGS монотонно возрастает с увеличением размерности сетки, при этом значения M_u для этих методов отличаются на порядок. Отметим, что использование прямого решателя при $N > 2 \cdot 10^5$ на вычислительной машине с 12 гБ ОЗУ приводит к переполнению памяти.

Указанные алгоритмы применимы для улучшения сходимости AMG-методов и в случае наличия зон с существенно различной проницаемостью (трещины ГРП, глинистые перемычки), приводящих к существенному разбросу коэффициентов матрицы СЛАУ и росту числа обусловленности.

Таким образом, для матриц большой размерности необходимо применять итерационные методы, так как они используют меньше оперативной памяти и находят решение системы за более короткое время, в отличие от прямых методов. Наиболее эффективными из итерационных методов являются BCGS и GMRES с алгебраическим многосеточным методом в качестве предобуславливателя. Для увеличения скорости сходимости AMG-методов для матриц большой размерности с плохими спектральными свойствами используются различные сглаживатели. Скорость сходимости многосеточного метода может быть также увеличена с помощью различных методов огрубления. Максимальный эффект при этом наблюдается для классического метода Рунге–Стюбена со сглаживателем Гаусса–Зейделя.

В работе [15] представлены результаты многовариантных расчетов показателей эффективности МГРП на ГС, выполненных в оптимальной численной реализации – с использованием решателя BCGS с предобуславливателем AMG для классического метода огрубления Рунге–Стюбена со сглаживателем Гаусса–Зейделя.

Выводы

Предложена численная схема, которая позволяет быстро рассчитать поля давления, скорости фильтрации в пласте и трещинах ГРП. Исследована эффективность применения различных точных и итерационных решателей для разреженных несимметричных матриц с большим числом обусловленности. Как и предполагалось, итерационные решатели BCGS и GMRES оказались наиболее эффективными как с точки зрения затрат машинной памяти, так и с точки зрения времени выполнения. Исследовано влияние типа сглаживателей и методов огрубления для многосеточного алгебраического метода на скорость сходимости решения для матриц с большим значением числа обусловленности при малых значениях параметра M , что соответствует трещинам с плохой проводимостью либо при наличии пропластков с проницаемостью в миллион раз ниже средней проницаемости пласта.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проекты № 15-41-02699, 15-41-02698).

Литература

1. *Shen Z., Ling K., Yip Y.* A New Method of Predicting the Well Performance of Multi-Frac Horizontal Wells // SPE Bergen One Day Seminar, 22 April, Bergen, Norway, 2015. – Soc. Pet. Eng. J. – 2015. – Art. No SPE-173886-MS.
2. *Economides M.J., Oligney R.E., Valko P.* Unified Fracture Design: Bridging the Gap between Theory and Practice. – Alvin Tex.: Orsa Press, 2002. – 200 p.
3. *Каневская Р.Д., Жучков С.Ю.* Опыт моделирования и оценки эффективности горизонтальных скважин с трещинами гидроразрыва на Верхне-Шапшинском месторождении // Нефтяное хозяйство. – 2003. – № 7. – С. 92–96.
4. *Raghavan R., Chen C.* Fractional diffusion in rocks produced by horizontal wells with multiple, transverse hydraulic fractures of finite conductivity // J. Pet. Sci. Eng. – 2013. – V. 109. – P. 133–143. – doi: 10.1016/j.petrol.2013.08.027.
5. *Chen C.C., Raghavan R.* A multiply-fractured horizontal well in a rectangular drainage region // Soc. Pet. Eng. J. – 1997. – V. 2, No 4. – P. 455–465.
6. *Бадретдинова Е.Р., Салимьянов И.Т., Хайруллин М.Х., Шамсиев М.Н.* Численное решение коэффициентной обратной задачи о нестационарной фильтрации к скважине, пересеченной трещиной гидравлического разрыва // Прикл. механика и техн. физика. – 2012. – Т. 53, № 3. – С. 84–89.
7. *Салимьянов И.Т.* Гидродинамические исследования нефтяных вертикальных скважин с трещиной гидроразрыва: Дис. ... канд. техн. наук. – Казань, 2011. – 110 с.
8. *van der Vorst H.* Iterative Krylov Methods for Large Linear System. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003. – 236 p.
9. *Богачев К.Ю.* Эффективное решение задач фильтрации вязкой сжимаемой многофазной многокомпонентной смеси на параллельных ЭВМ: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – М., 2012. – 183 с.
10. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. – N. Y.: Springer, 2002. – 762 p.
11. *Дуржин С.М.* Математическая модель скважины, дренирующей трещиновато-пористый коллектор: Дис. ... канд. техн. наук. – Ухта, 2014. – 150 с.
12. *Кашеваров А.А.* Гидравлическая модель разработки газовых и нефтяных месторождений // Прикл. механика и техн. физика. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 111–120.
13. *Friedel T.* Numerical Simulation of Production from Tight Gas Reservoirs by Advanced Stimulation Technologies: Diss. – Freiberg: Technischen Universitat Bergakademie Freiberg, 2004. – 126 p.
14. *Soliman M.Y., Boonen P.* Review of Fracturing Horizontal Wells Technology // 7th Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi, United Arab Emirates, Oct. 13-16, 1996. – Soc. Petrol. Eng., 1996. – Art. No SPE-36289-MS, 17 p.
15. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Хамидуллин М.Р.* Фильтрационная модель притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидравлическим разрывом пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 133–148.
16. *Мазо А.Б., Поташев К.А., Калинин Е.И., Булыгин Д.В.* Моделирование разработки нефтяных месторождений методом суперэлементов // Матем. моделирование. – 2013. – Т. 25, № 8. – С. 51–64.

17. *Amestoy P.R., Puglisi C.* An unsymmetrized multifrontal LU factorization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2002. – V. 24, No 2. – P. 553–569. – doi: 10.1137/S0895479800375370.
18. *Watkins D.S.* Fundamentals of Matrix Computations. – N. Y.: John Wiley & Sons, 2004. – 640 p.
19. *Hemker P.W.* The Incomplete LU-decomposition as a relaxation method in multi-grid algorithms // Boundary And Interior Layers – Computational and Asymptotic Methods / Ed. by J.J.H. Miller. – Dublin: Boole Press, 1980. – P. 306–311.
20. *Wittum G.* On the robustness of ILU smoothing // SIAM J. Sci. Stat. Comput. – 1989. – V. 10, No 4. – P. 699–717. – doi: 10.1137/0910043.
21. *Bolten M.* Multigrid Methods for Structured Grids and their Application in Particle Simulation: Diss. – Wuppertal: Bergische Universitat Wuppertal, 2008. – 131 p.
22. *Ruge J.W., Stuben K.* Algebraic multigrid // Multigrid Methods, Frontiers in Applied Mathematics. Vol. 3 / Ed. by S.F. McCormick. – Philadelphia: SIAM, 1987. – P. 73–130.

Поступила в редакцию
19.01.16

Хамидуллин Марсель Рашитович, аспирант кафедры аэрогидромеханики
Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: marseille.ksu@gmail.com

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**
2016, vol. 158, no. 2, pp. 287–301

**Numerical Simulation of One-Phase Flow to Multi-Stage
Hydraulically Fractured Horizontal Well**

M.R. Khamidullin

*Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: marseille.ksu@gmail.com*

Received January 19, 2016

Abstract

This paper presents a method of numerical simulation of one-phase flow near multi-stage fractured horizontal well in oil reservoir. Differential models for flows within reservoir and within fractures are formulated separately on the basis of Darcy's law. Numerical approximations of these models are performed using the finite volume method. The resulting systems of linear equations are then assembled into the single system to avoid an iterative coupling of numerical solutions for problems in the reservoir and fractures. Different solution methods for coupled ill-conditioned systems of linear equations are examined.

Keywords: horizontal well, multi-stage hydraulic fracturing, one-phase filtration, algebraic multigrid method, preconditioner

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Government of the Republic of Tatarstan (projects nos. 15-41-02699 and 15-41-02698).

Figure captions

Fig. 1. Multi-stage hydraulically fractured horizontal well scheme: *a*) side view, *b*) end view, *c*) top view.

Fig. 2. Reservoir section drained by the horizontal well with a single transverse hydraulic fracture.

Fig. 3. xz plane grid.

Fig. 4. 3D grid for the computational region.

Fig. 5. Numerical solution convergence.

Fig. 6. The fracture parameter M influence on sparse matrix condition number.

Fig. 7. Smoothers influence on iteration count of algebraic multigrid method: 1 – Chebyshev; 2 – incomplete ILU(0) factorization; 3 – Jacobi; 4 – Gauss–Zeidel.

Fig. 8. Coarsening algorithms influence on iteration count of AMG: 1 – aggregation; 2 – smoothed aggregation with energy minimization coarsening; 3 – smoothed aggregation; 4 – Ruge–Stüben.

Fig. 9. AMG iterative process convergence rate for solvers: 1 – GMRES; 2 – BCGS.

Fig. 10. Grid cells amount influence on SLAE solution time (solid line) and used memory volume (dashed line) (1 – BCGS, 2 – QR factorization).

References

1. Shen Z., Ling K., Yip Y. A new method of predicting the well performance of multi-frac horizontal wells. *SPE Bergen One Day Seminar, 22 April, Bergen, Norway, 2015. Soc. Petrol. Eng. J.*, 2015, art. SPE-173886-MS.
2. Economides M.J., Oligney R.E., Valko P. *Unified Fracture Design: Bridging the Gap between Theory and Practice*. Alvin Tex., Orsa Press, 2002. 200 p.
3. Kanevskaya R.D., Zhuchkov S.Yu. The experience of modelling and evaluating the efficiency of horizontal wells with hydraulic fracture cracks in the Verkhne-Shapshinskoe field. *Neft. Khoz.*, 2003, no. 7, pp. 92–96. (In Russian)
4. Raghavan R., Chen C. Fractional diffusion in rocks produced by horizontal wells with multiple, transverse hydraulic fractures of finite conductivity. *J. Pet. Sci. Eng.*, 2013. vol. 109, pp. 133–143. doi: 10.1016/j.petrol.2013.08.027.
5. Chen C.C., Raghavan R. A multiply-fractured horizontal well in a rectangular drainage region. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1997, vol. 2, no. 4, pp. 455–465.
6. Badertdinova E.R., Salim'yanov I.T., Khairullin M.Kh., Shamsiev M.N., Numerical solution of the coefficient inverse problems on nonstationary filtration to a well intersected by a hydraulic fracture. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, no. 3, pp. 379–383.
7. Salim'yanov I.T. Hydrodynamic studies of vertical oil wells with hydraulic fracture cracks. *Cand. Tech. Sci. Diss. Kazan*, 2011. 110 p. (In Russian)
8. van der Vorst H. *Iterative Krylov Methods for Large Linear System*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2003. 236 p.
9. Bogachev K.Yu. Effective solving of the problems of filtration of viscous compressible multiphase multicomponent mixture on parallel computers. *Doct. Phys.-Math. Sci. Diss. Moscow*, 2012. 183 p. (In Russian)
10. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to Numerical Analysis*. New York, Springer, 2002, 762 p.
11. Durkin S.M. Mathematical model of a well draining fractured porous reservoir. *Cand. Tech. Sci. Diss. Ukhta*, 2014. 150 p. (In Russian)
12. Kashevarov A.A. Hydraulic model for oil and gas reservoirs. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2010, vol. 51, no. 6, pp. 868–876.
13. Friedel T. Numerical simulation of production from tight gas reservoirs by advanced stimulation technologies. *Diss. Freiberg, Tech. Univ. Bergakad. Freiberg*, 2004. 126 p.
14. Soliman M.Y., Boonen P. Review of fracturing horizontal wells technology. *7th Abu Dhabi Int. Petroleum Exhibition and Conference, Abu Dhabi, United Arab Emirates, Oct. 13-16, 1996. Soc. Pet. Eng.*, 1996, art. no. SPE-36289-MS. 17 p.

15. Mazo A.B., Potashev K.A., Khamidullin M.R. Mathematical model of fluid filtration to a multi-stage hydraulically fractured horizontal well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 133–148. (In Russian)
16. Mazo A.B., Potashev K.A., Kalinin E.I., Bulygin D.V. Oil reservoir simulation with the supplement method. *Mat. Model.*, 2013, vol. 25, no. 8, pp. 51–64. (In Russian)
17. Amestoy P.R., Puglisi C. An unsymmetrized multifrontal LU factorization. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 2002, vol. 24, no. 2. pp. 553–569. doi: 10.1137/S0895479800375370.
18. Watkins D.S. *Fundamentals of Matrix Computations*. N. Y., John Wiley & Sons, 2004. 640 p.
19. Hemker P.W. The Incomplete LU-decomposition as a relaxation method in multi-grid algorithms. *Boundary and Interior Layers – Computational and Asymptotic Methods*. Miller J.J.H. (Ed.). Dublin, Boole Press, 1980. pp. 306–311.
20. Wittum G. On the robustness of ILU smoothing. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1989, vol. 10, no. 4, pp. 699–717. doi: 10.1137/0910043.
21. Bolten M. *Multigrid methods for structured grids and their application in particle simulation*. Diss. Wuppertal, Bergische Univ. Wuppertal, 2008. 131 p.
22. Ruge J.W., Stuben K. Algebraic multigrid. *Multigrid Methods, Frontiers in Applied Mathematics*. Vol. 3. McCormick S.F. (Ed.). Philadelphia, SIAM, 1987, pp. 73–130.

Для цитирования: Хамидуллин М.Р. Численное моделирование притока однофазной жидкости к горизонтальной скважине с трещинами многостадийного гидроразрыва пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 287–301.

For citation: Khamidullin M.R. Numerical simulation of one-phase flow to multi-stage hydraulically fractured horizontal well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 287–301. (In Russian)