ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.51

Т.В. ЕРШОВА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ МОДИФИКАЦИЙ МНОГОЧЛЕНОВ, ПОДОБНЫХ МНОГОЧЛЕНАМ БЕРНШТЕЙНА

В данной статье продолжено исследование свойств модификаций, введенных В.С. Виденским и Т.П. Пендиной для увеличения порядка приближения гладких функций и примененных к многочленам U_n, подобным многочленам Бернштейна. Установлены асимптотики для центральных моментов нечетного порядка ν и порядков, бо́льших ν, модификаций $U_{n,\nu}$. Доказаны асимптотические теоремы Вороновской–Бернштейна для модификаций $U_{n,\nu}$.

Для доказательства теоремы Хлодовского о сходимости последовательности производных многочленов Бернштейна $B_n^{(k)}f$ к производным $f^{(k)}$ в ([1], с. 48) введены полиномиальные операторы U_n, подобные многочленам Бернштейна. Многочлены U_n, $n \in N$, задаются формулой

$$U_n(f,x) = \frac{n}{x(1-x)} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \tag{1}$$

где $f \in C[0,1]$.

В данной работе считаем, что всюду x принадлежит $[0,1]$. Модификации В.С. Виденского и Т.П. Пендиной операторов U_n зададим рекуррентно ([2], с. 52):

$$\begin{aligned} &U_{n,1}f = U_n f, \\ &U_{n,\nu}f = U_n f - \sum_{k=1}^{\nu-1} \frac{S_k(U_n)}{k!} U_{n,\nu-k} f^{(k)} \ \text{ при } \ \nu \ge 2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $f \in C^{(\nu-1)}[0,1]$. Через $S_k(U_n)$ обозначены функции $S_k(U_n,x) = U_n((t-x)^k, x)$, которые называются центральными моментами порядка k, $k \in Z_+$, операторов U_n. В статье рассматриваются центральные моменты многочленов Бернштейна B_n, многочленов U_n и модификаций $U_{n,\nu}$.

Из (1) следует, что

$$S_k(U_n,x) = \frac{n}{x(1-x)} S_{k+2}(B_n,x). \tag{3}$$

Известно [1]–[3], что

$$S_2(B_n,x) = \frac{x(1-x)}{n}, \quad S_3(B_n,x) = \frac{x(1-x)(1-2x)}{n^2}. \tag{4}$$

Ввиду (3) и (4) имеем

$$S_0(U_n) = 1. \tag{5}$$

Применяя (2) и (5), получаем

$$S_0(U_{n,\nu}) = 1, \quad \nu \ge 1. \tag{6}$$

Из свойств модификаций В.С. Виденского и Т.П. Пендиной [4] вытекает, что

$$S_k(U_{n,\nu}) = 0 \ \text{ при } \ 1 \le k \le \nu - 1. \tag{7}$$

Известны следующие пределы ([5], [3] соответственно)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m-1}(B_n,x)}{(2m-1)!}=\frac{(x(1-x))^{m-1}(1-2x)}{3\cdot 2^{m-1}(m-2)!},\tag{8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m}(B_n,x)}{(2m)!}=\frac{(x(1-x))^{m}}{2^m m!}.\tag{9}$$

Из (3), (8), (9) имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m-1}(U_n,x)}{(2m-1)!}=\frac{m(2m+1)}{3\cdot 2^{m-1}(m-1)!}(x(1-x))^{m-1}(1-2x),\tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m}(U_n,x)}{(2m)!}=\frac{2m+1}{2^m m!}(x(1-x))^{m}.\tag{11}$$

В [6] доказано, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m}(U_{n,2m},x)}{(2m)!}=(-1)^{m+1}\sigma_m(x(1-x))^m,\tag{12}$$

где $\sigma_m=\sum\limits_{j=0}^{m}\frac{1}{2^j j!}$ — частная сумма ряда Тейлора функции $y=e^x$ при $x=\frac{1}{2}$. Условимся считать, что $\sigma_{-3}=\sigma_{-2}=\sigma_{-1}=0$.

1. Асимптотическая теорема Вороновской–Бернштейна

Асимптотику для центральных моментов порядка $2m-1$ модификаций $U_{n,2m-1}$ устанавливает

Лемма 1. *Для любых* $x\in[0,1]$ *и* $m\geq 1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m S_{2m-1}(U_{n,2m-1},x)}{(2m-1)!}=(-1)^{m+1}(\sigma_{m-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-2})(x(1-x))^{m-1}(1-2x).\tag{13}$$

Доказательство. Применим индукцию. Пусть $m=1$. Применяя (3), (4) и соглашение о том, что $\sigma_{-1}=0$, легко проверить выполнимость (13) при $m=1$. Предполагая (13) доказанным для $m-1$, рассмотрим случай m. Полагая в (2) $\nu=2m-1$ и $f(t)=(t-x)^{2m-1}$, имеем

$$\frac{S_{2m-1}(U_{n,2m-1})}{(2m-1)!}=\frac{S_{2m-1}(U_n)}{(2m-1)!}-\sum_{k=1}^{2m-2}\frac{S_k(U_n)}{k!}\frac{S_{2m-1-k}(U_{n,2m-1-k})}{(2m-1-k)!}.\tag{14}$$

Рассмотрим случаи четного и нечетного k. Пусть $k=2j$. Ясно, что $j=1,\ldots,m-1$. Если $k=2j-1$, то j принимает те же значения $1,\ldots,m-1$.

Умножим (14) на n^m и перейдем к пределу при $n\to\infty$. Учитывая (10)–(12) и предположение индукции, после очевидных преобразований получаем

$$(-1)^{m+1}(\sigma_{m-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-2})=\frac{m(2m+1)}{3\cdot 2^{m-1}(m-1)!}-\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(2j+1)}{2^j j!}(-1)^{m-j+1}(\sigma_{m-j-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-j-2})-\\ -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{j(2j+1)}{3\cdot 2^{j-1}(j-1)!}(-1)^{m-j+1}\sigma_{m-j}.\tag{15}$$

Заметим, что

$$\frac{2j+1}{2^j j!}=\sigma_j-\sigma_{j-2},\quad j=\overline{1,m-1};\qquad \frac{j(2j+1)}{3\cdot 2^{j-1}(j-1)!}=(\sigma_{j-1}-\sigma_{j-3})+\tfrac{1}{6}(\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}),\quad j=\overline{1,m}.$$

Выполняя в соотношении (15) соответствующую замену, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j(\sigma_j-\sigma_{j-2})(\sigma_{m-j-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-j-2})+\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sigma_{m-j}[(\sigma_{j-1}-\sigma_{j-3})+\tfrac{1}{6}(\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4})]=0. \quad (16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_1 &= \sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\sigma_j\sigma_{m-j-1}, & \textstyle\sum_2 &= -\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\sigma_j\sigma_{m-j-2},\\
\textstyle\sum_3 &= -\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\sigma_{j-2}\sigma_{m-j-1}, & \textstyle\sum_4 &= \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j\sigma_{j-2}\sigma_{m-j-2},\\
\textstyle\sum_5 &= \sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sigma_{m-j}\sigma_{j-1}, & \textstyle\sum_6 &= -\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sigma_{m-j}\sigma_{j-3},\\
\textstyle\sum_7 &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sigma_{m-j}\sigma_{j-2}, & \textstyle\sum_8 &= -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{m}(-1)^j\sigma_{m-j}\sigma_{j-4}.
\end{aligned}$$

Перепишем (16) в виде

$$\textstyle\sum_1+\cdots+\sum_8=0. \quad (17)$$

Для доказательства (17) достаточно показать, что

$$\textstyle\sum_1+\sum_5=\sum_2+\sum_7=\sum_3+\sum_6=\sum_4+\sum_8=0. \quad (18)$$

Действительно, заменяя переменную суммирования j на $t=j-1$ в суммах $\sum_5$, $\sum_6$, j на $t=j-2$ в суммах $\sum_7$, $\sum_8$, убеждаемся в справедливости (18). □

Получим далее оценки функций $S_k^*(A_n,x) = A_n(|t-x|^k,x)$, где A_n — последовательность линейных положительных операторов (л.п.о.), заданных на пространстве $C[0,1]$, причем $A_n 1=1$.

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$S_k^*(A_n,x)\le \alpha_k(n,x), \quad (19)$$

причем для всякого $k\in Z_+$ существует $\widetilde{k}\in N$ такое, что $\alpha_{\widetilde{k}}(n,x)=o(\alpha_k(n,x))$.

Лемма 2. *Пусть л.п.о. A_n удовлетворяет условию (19) в некоторой точке x; функция $f\in C[0,1]$ дифференцируема в точке x ν раз. Тогда*

$$A_n(f,x)=f(x)+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}S_j(A_n,x)+o(\alpha_\nu(n,x)). \quad (20)$$

Доказательство. Напишем разложение f в точке x по формуле Тейлора

$$f(t)=f(x)+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}(t-x)^j+r_\nu(f,t,x), \quad (21)$$

где $r_\nu(f,t,x)$ — остаточный член. Применяя A_n к обеим частям (21), получим

$$A_n(f,x)=f(x)+\sum_{j=1}^{\nu}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}S_j(A_n,x)+A_n(r_\nu(f,t,x),x). \quad (22)$$

Оценка остаточного члена в (22) производится аналогично оценке из доказательства леммы 1 [7]. □

Замечание 1. В [7] было сформулировано условие, при котором $S_k^*(A_n,x)$ обладали свойством функций $\alpha_k(n,x)$ из (19). Но введение функций $\alpha_k(n,x)$ облегчает соответствующую проверку и достаточно для целей данной работы.

Замечание 2. Как известно ([2], с. 28), для многочленов Бернштейна при всех $x\in[0,1]$ выполняется

$$S_k^*(B_n,x)\le M(k)\frac{x(1-x)}{n^{k/2}}, \tag{23}$$

где $M(k)$ — постоянная, зависящая только от k. Из (1) и (23) легко вывести неравенство

$$S_k^*(U_n,x)\le M(k)\frac{1}{n^{k/2}}. \tag{24}$$

Следовательно, в случае многочленов U_n остаточным членом в (20) на $(0,1)$ будет $o(n^{-\nu/2})$.

Следующая теорема является асимптотической теоремой типа теорем Вороновской–Бернштейна для модификаций $U_{n,2m-1}$.

Теорема 1. *Если функция $f\in C^{(2m-2)}[0,1]$, $m\ge 1$, дифференцируема в точке x $2m$ раз, то*

$$\lim_{n\to\infty} n^m(U_{n,2m-1}(f,x)-f(x)) = f^{(2m-1)}(x)(-1)^{m+1}(\sigma_{m-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-2})(x(1-x))^{m-1}(1-2x)+ \\ + f^{(2m)}(x)(-1)^{m+1}\sigma_m(x(1-x))^m.$$

Доказательство. Применим оператор $U_{n,2m-1}$ к обеим частям (21) при $\nu=2m$. Ввиду (6), (7) имеем

$$U_{n,2m-1}(f,x)=f(x)+f^{(2m-1)}(x)\frac{S_{2m-1}(U_{n,2m-1},x)}{(2m-1)!}+ \\ +f^{(2m)}(x)\frac{S_{2m}(U_{n,2m-1},x)}{(2m)!}+U_{n,2m-1}(r_{2m}(f,t,x),x). \tag{25}$$

Для оценки остаточного члена последнего равенства применим формулу (6.9) из [4]:

$$U_{n,2m-1}(r_{2m}(f,t,x),x)=U_n(r_{2m}(f,t,x),x)-\sum_{k=1}^{2m-2}\frac{S_k(U_{n,k},x)}{k!}U_n(r_{2m-k}(f^{(k)},t,x),x).$$

По лемме 2 (см. замечание 2) $U_n(r_{2m}(f,t,x),x)=o(n^{-m})$, $U_n(r_{2m-k}(f^{(k)},t,x),x)=o(n^{-m+k/2})$. Замечая, что $|S_k(U_n)|\le S_k^*(U_n)$, из (2) и (24) выводим, что $S_k(U_{n,k})=O(n^{-k/2})$. Таким образом, остаточный член в (25) есть $o(n^{-m})$. Кроме того, из свойств модификаций В.С. Виденского и Т.П. Пендиной следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^mS_{2m}(U_{n,2m-1})}{(2m)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^mS_{2m}(U_{n,2m})}{(2m)!}$$

(см. также (26)). Для завершения доказательства осталось применить (12) и (13). $\square$

2. Обобщенная асимтпотическая теорема Вороновской–Бернштейна

По лемме 3 определим главные члены центральных моментов порядков, бо́льших ν, операторов $U_{n,\nu}$.

Лемма 3. *Для любых* $x \in [0,1]$ *и* $m \ge 1$, $\nu \ge 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m S_{2m}(U_{n,\nu},x)}{(2m)!} = (-1)^{[\frac{\nu-1}{2}]}\Big(\frac{\sigma_{[\frac{\nu+1}{2}]-1}}{2^{[\frac{2m-\nu}{2}]}[\frac{2m-\nu}{2}]!} + \frac{1}{2^m m!}C_{m-1}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}\Big)(x(1-x))^m$$
$$\text{при } 2m \ge \nu, \tag{26}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m S_{2m-1}(U_{n,\nu},x)}{(2m-1)!} = (-1)^{[\frac{\nu-1}{2}]}\frac{1}{3}\frac{\sigma_{\frac{\nu}{2}-1}(2m-1-\nu)}{2^{m-\frac{\nu}{2}}(m-1-\frac{\nu}{2})!}(x(1-x))^{m-1}(1-2x)$$
$$\text{при четном } \nu,\ \ 2m-1 > \nu, \tag{27}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m S_{2m-1}(U_{n,\nu},x)}{(2m-1)!} = (-1)^{[\frac{\nu-1}{2}]}\{\sigma_{\frac{\nu-1}{2}}(\sigma_{\frac{2m-\nu-1}{2}} + \tfrac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-3}{2}} - \sigma_{\frac{2m-\nu-5}{2}} - \tfrac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-7}{2}}) -$$
$$- \sigma_{\frac{\nu-3}{2}}(\tfrac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-1}{2}} - \tfrac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-5}{2}})\}(x(1-x))^{m-1}(1-2x)$$
$$\text{при нечетном } \nu,\ \ 2m-1 \ge \nu. \tag{28}$$

Квадратные скобки в (26)–(28) *и далее означают целую часть числа.*

Доказательство. Применим рассуждения, которые были использованы автором в случае многочленов Бернштейна и Канторовича.

Докажем (26). Согласно теореме 5.1 из [4]

$$\frac{S_{2m}(U_{n,\nu})}{(2m)!} = \sum_{k=0}^{2m-\nu} \frac{S_k(U_n)}{k!}\frac{S_{2m-k}(U_{n,2m-k})}{(2m-k)!}. \tag{29}$$

Умножим (29) на n^m.

Рассмотрим случай нечетных k. Известно ([2], с. 27), что $S_k(B_n) = O(n^{-[\frac{k+1}{2}]})$. Отсюда легко вывести, что $S_k(U_n) = O(n^{-[\frac{k+1}{2}]})$, $S_k(U_{n,k}) = O(n^{-[\frac{k+1}{2}]})$. Пусть $k = 2j-1$. Тогда $S_k(U_n)S_{2m-k}(U_{n,2m-k}) = o(n^{-m})$. Следовательно, предел слагаемых с нечетным k равен нулю.

Теперь рассмотрим случай четных $k = 2j$. Ясно, что $j = 0,\dots,[\frac{2m-\nu}{2}]$. Перейдем в (29) к пределу при $n \to \infty$. Используя (11) и (12), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2m}(U_{n,\nu},x)}{(2m)!} = \sum_{j=0}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}(-1)^{m-j+1}\left(\frac{1}{2^j j!} + \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\right)\sigma_{m-j}(x(1-x))^m$$

(при $j = 0$ сомножитель в скобках считается равным 1). Для вычисления суммы

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{j=0}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}(-1)^j\left(\frac{1}{2^j j!} + \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\right)\sigma_{m-j} = \sum_{j=0}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^j\left(\frac{1}{2^j j!} + \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\right)\frac{1}{2^k k!}$$

изменим порядок суммирования. Тогда

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{k=m-[\frac{2m-\nu}{2}]}^{m}\frac{1}{2^k k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^j\left(\frac{1}{2^j j!} + \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\right) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-[\frac{2m-\nu}{2}]-1}\frac{1}{2^k k!}\sum_{j=0}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}(-1)^j\left(\frac{1}{2^j j!} + \frac{1}{2^{j-1}(j-1)!}\right) = \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 .$$

Легко понять, что внутренние суммы у $\sum_2$ и $\sum_3$ равны $(-1)^{m-k}\frac{1}{2^{m-k}(m-k)!}$ и $(-1)^{[\frac{2m-\nu}{2}]}\frac{1}{2^{[\frac{2m-\nu}{2}]}[\frac{2m-\nu}{2}]!}$ соответственно. Сначала вычислим $\sum_2$. Имеем $\sum_2 = (-1)^m\frac{1}{2^m m!}\sum\limits_{k=m-[\frac{2m-\nu}{2}]}^{m}(-1)^k C_m^k$. Используя известные тождества для биномиальных коэффициентов, получим, что внутренняя сумма у $\sum_2$ равна $(-1)^{m-[\frac{2m-\nu}{2}]}C_{m-1}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}$. После несложных преобразований будем иметь

$$\sum\nolimits_2 = (-1)^{[\frac{\nu-1}{2}]}\frac{1}{2^m m!}C_{m-1}^{[\frac{2m-\nu}{2}]}.$$

Ясно, что

$$\sum\nolimits_3 = (-1)^{[\frac{2m-\nu}{2}]}\frac{1}{2^{[\frac{2m-\nu}{2}]}[\frac{2m-\nu}{2}]!}\sigma_{m-[\frac{2m-\nu}{2}]-1}.$$

Тем самым найдена сумма $\sum_1$. Дальнейшие вычисления очевидны. Соотношение (26) доказано.

Докажем (27). В соответствии с теоремой 5.1 [4]

$$\frac{S_{2m-1}(U_{n,\nu})}{(2m-1)!} = \sum_{k=0}^{2m-1-\nu}\frac{S_k(U_n)}{k!}\frac{S_{2m-1-k}(U_{n,2m-1-k})}{(2m-1-k)!}. \tag{30}$$

Рассмотрим случаи четного и нечетного k. При $k=2j$ имеем $j=0,\dots,\frac{2m-2-\nu}{2}$. В случае $k=2j-1$ получаем $j=1,\dots,\frac{2m-\nu}{2}$. Умножаем (30) на n^m, переходим к пределу при $n\to\infty$. После применения (10)–(13) приходим к задаче вычисления суммы

$$\sum_{j=0}^{\frac{2m-\nu-2}{2}}(-1)^j(\sigma_j-\sigma_{j-2})(\sigma_{m-j-1}-\tfrac{1}{6}\sigma_{m-j-2}) + \sum_{j=1}^{\frac{2m-\nu}{2}}(-1)^j(\sigma_{j-1}-\sigma_{j-3}+\tfrac{1}{6}(\sigma_{j-2}-\sigma_{j-4}))\sigma_{m-j}.$$

С этой целью составим восемь сумм:

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 &= \sum_{j=0}^{\frac{2m-\nu-2}{2}}(-1)^j\sigma_j\sigma_{m-j-1}, & \sum\nolimits_2 &= -\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\frac{2m-\nu-2}{2}}(-1)^j\sigma_j\sigma_{m-j-2},\\
\sum\nolimits_3 &= -\sum_{j=0}^{\frac{2m-\nu-2}{2}}(-1)^j\sigma_{j-2}\sigma_{m-j-1}, & \sum\nolimits_4 &= \frac{1}{6}\sum_{j=0}^{\frac{2m-\nu-2}{2}}(-1)^j\sigma_{j-2}\sigma_{m-j-2},\\
\sum\nolimits_5 &= \sum_{j=1}^{\frac{2m-\nu}{2}}(-1)^j\sigma_{j-1}\sigma_{m-j}, & \sum\nolimits_6 &= -\sum_{j=1}^{\frac{2m-\nu}{2}}(-1)^j\sigma_{j-3}\sigma_{m-j},\\
\sum\nolimits_7 &= \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{\frac{2m-\nu}{2}}(-1)^j\sigma_{j-2}\sigma_{m-j}, & \sum\nolimits_8 &= -\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{\frac{2m-\nu}{2}}(-1)^j\sigma_{j-4}\sigma_{m-j}.
\end{aligned}$$

Легко понять, что $\sum_1+\sum_5=\sum_3+\sum_6=0$, $\sum_2+\sum_7=(-1)^{\frac{2m-\nu}{2}}\frac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-2}{2}}\sigma_{\frac{\nu-2}{2}}$, $\sum_4+\sum_8=(-1)^{\frac{2m-\nu-2}{2}}\frac{1}{6}\sigma_{\frac{2m-\nu-6}{2}}\sigma_{\frac{\nu-2}{2}}$. Несложные вычисления приводят к соотношению (27).

Доказательство (28) аналогично доказательству (27). $\square$

Следующую теорему естественно назвать обобщенной теоремой Вороновской–Бернштейна для операторов $U_{n,2m}$. Теорема Вороновской–Бернштейна для операторов $U_{n,2m-1}$ формулируется аналогично.

Теорема 2. *Если функция $f \in C^{(2m-1)}[0,1]$, $m \geq 1$, дифференцируема в точке x $2m+2l$ раз, $l \geq 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} n^{m+l}\Big(U_{n,2m}(f,x) - f(x) - \sum_{k=0}^{2l-2} \frac{S_{2m+k}(U_{n,2m+k},x)}{(2m+k)!} f^{(2m+k)}(x)\Big) =$$
$$= f^{(2m+2l-1)}(x)(-1)^{m+1}\frac{1}{3}\frac{\sigma_{m-1}(2l-1)}{2^l(l-1)!}(x(1-x))^{m+l-1}(1-2x) +$$
$$+ f^{(2m+2l)}(x)(-1)^{m+1}\left(\frac{\sigma_{m-1}}{2^l l!} + \frac{C^l_{m+l-1}}{2^{m+l}(m+l)!}\right)(x(1-x))^{m+l}.$$

Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1 с соответствующими изменениями, в частности, используются предельные равенства (26) и (27) вместо (12) и (13), поэтому доказательство теоремы приводить не будем.

Литература

1. Виденский В.С. *Линейные положительные операторы конечного ранга.* – Л.: Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, 1985. – 68 с.
2. Виденский В.С. *Многочлены Бернштейна.* – Л.: Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, 1990. – 63 с.
3. Бернштейн С.Н. *Добавление к статье Е.В. Вороновской “Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С.Н. Бернштейна”* // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 155–158.
4. Ершова Т.В. *Модификации линейных операторов.* – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. пед. ун-та, 1995. – 26 с.
5. Волков Ю.И. *О некоторых линейных положительных операторах* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 23. – № 5. – С. 659–669.
6. Ершова Т.В. *О модификациях многочленов, подобных многочленам Бернштейна* // Вестн. Челяб. ун-та. – 1996. – Сер. 3. – № 1. – С. 49–54.
7. Ершова Т.В. *О приближении непрерывных функций модификациями линейных положительных операторов* // Прим. функц. анализа в теории прибл. – Тверь, 1997. – С. 73–79.

Челябинский государственный педагогический университет

Поступила 28.01.1999