ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.928

В.Р. ЗАЧЕПА

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ НЕРАЗРЕШЕННЫМ ИНТЕГРИРОВАНИЕМ

Введение

Первообразная $x(t)$ от (векторной) функции $q(t)$, $q(0)=0$, при условии $x(0)=0$ естественно трактуется как решение задачи Коши

$$\dot{x} = q(t), \quad x(0) = 0. \tag{1}$$

Решение этой задачи будем называть *простым* (*разрешенным*) *интегрированием*. При исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной, возникает ситуация *неразрешенного интегрирования* — решения задачи

$$F(\dot{x}, t) = 0, \quad x(0) = 0, \tag{2}$$

где $F(\dot{x}, t)$ — функция векторного и скалярного переменных из какого-нибудь класса гладкости, для которой $F(0,0)=0$.

Легко убедиться, что в случае задачи (1) тип особенности функции $x(t)$ в нуле определяется особенностью в нуле функции $q(t)$: если $q(t) = o(t^r)$, то $x(t) = o(t^{r+1})$. Естественно возникает существенно более сложный вопрос о типе особенности в нуле функции $x(t)$ в случае задачи (2).

В данной работе изложены соображения, раскрывающие, по мнению автора, механизм формирования особенности $x(t)$ в нуле для гладкой функции F.

Предполагается, что F — аналитическое отображение: $F \in C^a(R^n \times R^1, R^n)$, $x \in R^n$, $t \in R^1$, $F(0,0)=0$, $\dot{x}(0)=0$.

После замены $\dot{x}(t) = y$ уравнение (2) сводится к нелинейному уравнению

$$F(y, t) = 0. \tag{3}$$

Основной интерес представляет случай, в котором точка $(y,t) = (0,0)$ является особым решением (точкой бифуркации) уравнения (3), т. е.

$$\operatorname{rank} \frac{\partial F(0,0)}{\partial y} < n.$$

В противном случае можно было бы воспользоваться теоремой о неявной функции. Таким образом, задача разрешимости уравнения (2) тесно связана с задачей нахождения простых малых решений уравнения (3). При этом первоочередной интерес представляет задача о конечной определенности всех или отдельных простых малых решений, т. е. устойчивости их асимптотик в нуле относительно нелинейных деформаций уравнения, порожденных внесением в левую часть уравнения (3) дополнительных слагаемых достаточно высокого порядка малости в нуле. В этой связи отметим результаты [1], [2], которые легли в основу теории простых малых решений.

При решении таких задач [3] используется ряд априорных оценок, которые в изучаемой задаче выполнены естественным образом. В данной работе рассматриваются понятия бифуркационной и алгебраической кратностей отображения (в случае C^∞-отображения). Основу всех рассуждений представляет полученный автором критерий конечной определенности аналитического уравнения. Этот результат находит естественное приложение к изучаемой здесь задаче и более общей задаче разрешимости дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной.

1. Простые решения для уравнений с параметром

Рассмотрим уравнение (3), где $F : (U, 0) \to (R^n, 0)$ — аналитическое отображение, действующее из окрестности U нуля вещественного пространства $R^n \times R^1$ в пространство R^n, $y \in R^n$, $t \in R^1$, $F(0,0) = 0$. Будем предполагать, что оператор $D_yF(0,0)$ не имеет ограниченного обратного.

Пусть уравнение (3) имеет малое простое решение [2] $y(t) : y(0) = 0$, $y(t)$ непрерывно зависит от t и оператор $D_yF(y(t), t)$ при малых[1] $t \neq 0$ является изоморфизмом.

Лемма 1. *Существуют такие действительное число $c > 0$ и рациональное число $l > 0$, что при $t \neq 0$ верна оценка*

$$\|(D_yF(y(t), t))^{-1}\| < c|t|^{-l}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как

$$\|(D_yF(y(t), t))^{-1}\| = \sup_{\|\xi\|=\|\eta\|=1} \sum_i \sum_j a_{ij}(y(t), t)\xi_i\eta_j,$$

то достаточно показать, что при всех i, j верна оценка

$$|a_{ij}(y(t), t)| < c_{ij}|t|^{-l_{ij}},$$

где $a_{ij}(y(t), t) = (-1)^{i+j}M_{ij}(y(t), t)/\det D_yF(y(t), t)$, M_{ij} — минор матрицы D_yF, $c_{ij} \in R$, $l_{ij} \in Q$. Последнее выполнено, т. к. малое решение $y = y(t)$ можно представить в виде ряда Пьюизо по дробным степеням переменной t и $G(t) = |\det D_yF(y(t), t)| \neq 0$ при $t \neq 0$. Следовательно,

$$G(t) = at^\alpha + o(t^\alpha), \quad \alpha \in Q, \quad a \neq 0,$$
$$M_{ij}(y(t), t) = a_{ij}t^{\alpha_{ij}} + o(t^{\alpha_{ij}}), \quad \alpha_{ij} \in Q.$$

Легко видеть, что $-l_{ij} = \alpha_{ij} - \alpha, l = \max\limits_{ij} l_{ij}$. Число l называется асимптотическим порядком простого решения $y = y(t)$. $\square$

Заметим, что если $F \in C^\infty$, то лемма неверна. Это легко увидеть на примере уравнения

$$(y + t)^2 - e^{-\frac{1}{t^2}} = 0. \tag{5}$$

Данное уравнение имеет пару простых решений $y(t) = -t \pm e^{-\frac{1}{2t^2}}$, для которых оценка (4) не верна ни при каких c, l.

Лемма 2. *Пусть $F \in C^\infty(U, R^n)$, $y = y(t)$ — малое простое решение уравнения* (3), *идеал $(\|F(y,t)\|^2 + (\det D_yF(y,t))^2)C^\infty(R^n)$ замкнут*[2] *и $\Sigma(F) \bigcap F^{-1}(0) = \{0\}$.*[3] *Тогда существуют действительные числа $c, l > 0$ такие, что верна оценка* (4).

Доказательство. Условие замкнутости идеала позволяет применить неравенство Лоясевича [4]

$$\|F(y,t)\|^2 + (\det D_yF(y,t))^2 > d\|(y,t)\|^\gamma,$$

$d, \gamma > 0$. Подставив $y = y(t)$, получим

$$|\det D_yF(y,t)| > d^{\frac{1}{2}}\|(y(t),t)\|^{\frac{\gamma}{2}} > d^{\frac{1}{2}}|t|^{\frac{\gamma}{2}}.$$

[1] Для определенности будем считать $t \geq 0$.

[2] Условия замкнутости идеала см. в [4].

[3] $\Sigma(F) = \{y \mid \det D_yF(y,t) = 0\}$.

Следовательно, верна оценка (4).

Определение. Простое малое решение $y = y(t)$ уравнения (3) назовем r-определенным, если для любого C^{r+1}-отображения $F_1(y,t) \in j_0^r(F)$ [1] существует простое малое решение $y = \overline{y}(t)$ уравнения

$$F_1(y,t) = 0, \tag{6}$$

для которого $\overline{y}(t) = y(t) + o(t^l)$ $(o(t^l)/t^l \to 0$ при $t \to 0)$.

Простое малое решение $y = y(t)$ назовем конечно-определенным, если существует такое r, при котором оно r-определено.

Следующая теорема показывает, что определение корректно. Другими словами, существует инъективное соответствие между r-определенными простыми решениями $y = y(t)$ уравнения (3) и соответствующими им простыми решениями $y = \overline{y}(t)$ уравнения (6).

Теорема 1. *Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — различные простые решения уравнения (3) с асимптотическими порядками l_1 и l_2 соответственно. Пусть $\overline{y}(t)$ — решение уравнения* (6). *Тогда не может быть одновременно*

$$\overline{y}(t) = y_1(t) + o_1(|t|^{l_1}),$$
$$\overline{y}(t) = y_2(t) + o_2(|t|^{l_2}).$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть

$$y_2(t) = y_1(t) + o(|t|^{l_1})$$

при $l_2 \geq l_1$, $o(t^{l_1}) \neq 0$. Тогда

$$F(y_2(t),t) = F(y_1(t),t) + D_yF(y_1(t),t)o(|t|^{l_1}) + \omega(t)o^2(|t|^{l_1}) = 0.$$

Следовательно,

$$D_yF(y_1(t),t)\left(o(|t|^{l_1}) + (D_yF(y_1(t),t))^{-1}\omega(t)o^2(|t|^{l_1})\right) = 0.$$

Последнее неверно, т. к.

$$\|o(|t|^{l_1}) + (D_yF(y_1(t),t))^{-1}\omega(t)o^2(|t|^{l_1})\| \geq \|o(|t|^{l_1})\| - c_1|t|^{-l_1}\|\omega(t)\|\,\|o(|t|^{l_1})\|^2 > \frac{1}{2}\|o(|t|^{l_1})\|. \quad \square$$

2. Достаточный признак r-определенности простого малого решения

Максимальное из чисел s, удовлетворяющих неравенству

$$\|y(t)\| < c|t|^s,$$

назовем порядком в нуле решения $y = y(t)$. Заметим, что если F — аналитическое отображение, то $s \in Q$ и является степенью первого слагаемого разложения решения $y = y(t)$ в ряд Пьюизо.

Теорема 2. *Пусть $y = y(t)$ — простое малое решение уравнения* (3), *l — асимптотический порядок $y = y(t)$, s — его порядок в нуле. Тогда решение $y = y(t)$ является r-определенным для r, удовлетворяющих соотношению $(r+1)\min\{s,1\} > 2l$, и решение (возмущенного) уравнения* (6) *можно представить в виде*

$$\overline{y}(t) = y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t),$$

где $\varepsilon > 0$, $\delta(t) \in C_{[0,t_0]}$ при некотором t_0.

[1] Символом $j_0^r(F)$ обозначается струя r-го порядка отображения F в нуле.

Доказательство. Уравнение (6) представим в виде

$$F_1(y,t) = F(y,t) + \omega^{r+1}(y,t) = 0,$$

где $\|\omega^{r+1}(y,t)\|/\|(y,t)\|^{r+1} < c$ при $(y,t) \to 0$. Подставив в последнее уравнение $\overline{y}(t) = y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t)$, где $\varepsilon = (r+1)\min\{s,1\} - 2l$, получим

$$F(y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t), t) + \omega^{r+1}(y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t), t) = 0$$

или

$$F(y(t),t) + D_yF(y(t),t)|t|^{l+\varepsilon}\delta(t) + G(t)|t|^{2(l+\varepsilon)}\delta^2(t) + \\ + \omega^{r+1}(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t)|t|^{l+\varepsilon}\delta(t) + Q(t)|t|^{2(l+\varepsilon)}\delta^2(t) = 0.$$

Следовательно,

$$|t|^{l+\varepsilon}(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))\delta(t) = -\omega^{r+1}(y(t),t) - |t|^{2(l+\varepsilon)}(G(t)+Q(t))\delta^2(t). \qquad (7)$$

Доказательство теоремы свелось к разрешимости уравнения (7) в пространстве $C_{[0,t_0]}$ относительно $\delta(t)$ при условии $(r+1)\min\{s,1\} > 2l$.

Покажем, что оператор $D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t)$ обратим при малых $t \neq 0$. Действительно, разложим в ряд

$$(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1} = (D_yF(y(t),t))^{-1} - \\ - (D_yF(y(t),t))^{-1}D_y\omega^{r+1}(y(t),t)(D_yF(y(t),t))^{-1} + \\ + (D_yF(y(t),t))^{-1}D_y\omega^{r+1}(y(t),t)(D_yF(y(t),t))^{-1}D_y\omega^{r+1}(y(t),t)(D_yF(y(t),t))^{-1} - \cdots .$$

Следовательно, в силу $\|D_y\omega^{r+1}(y(t),t)\| < c_0|t|^m$, $m = r\min\{s,1\}$, получаем

$$\|(D_yF(y(t),t)) + (D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1}\| < c|t|^{-l} + \\ + c|t|^{-l}c_0|t|^m c|t|^{-l} + c|t|^{-l}c_0|t|^m c|t|^{-l}c_0|t|^m c|t|^{-l} + \cdots = \frac{c|t|^{-l}}{1 - c_0c|t|^{m-l}} < 2c|t|^{-l}$$

($m > l$, т. к. $r\min\{s,1\} + \min\{s,1\} > 2l$, следовательно, $r\min\{s,1\} > l$).

Таким образом, показано, что оператор $D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t)$ обратим при малых $t \neq 0$. Следовательно, уравнение (7) запишется в виде

$$\delta(t) = -|t|^{-l-\varepsilon}(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1}\omega^{r+1}(y(t),t) - \\ - |t|^{l+\varepsilon}(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1}(G(t)+Q(t))\delta^2(t). \quad (8)$$

Покажем, что уравнение (8) разрешимо относительно $\delta(t)$ в любом конечном шаре в $C_{[0,t_0]}$ при достаточно малом $t_0 \in R^1$. Для этого необходимо, чтобы, во-первых, первое слагаемое правой части лежало в пространстве $C_{[0,t_0]}$. Это следует из оценки

$$|t|^{-l-\varepsilon}\|(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1}\|\,\|\omega^{r+1}(y(t),t)\| < |t|^{-l-\varepsilon}2c|t|^{-l}c_1|t|^{(r+1)\min\{s,1\}} = 2cc_1,$$

т. к. $\varepsilon = (r+1)\min\{s,1\} - 2l$.

Во-вторых, покажем, что второе слагаемое правой части уравнения (7) есть оператор, сжимающий по $\delta(t)$ на любом конечном шаре в пространстве $C_{[0,t_0]}$, при достаточно малом t_0. Для этого перепишем

$$|t|^{l+\varepsilon}(D_yF(y(t),t) + D_y\omega^{r+1}(y(t),t))^{-1}(G(t)+Q(t))\delta^2(t) = |t|^{\varepsilon}P(t)\delta^2(t),$$

где $\|P(t)\| < c_2$. В конечном шаре из пространства $C_{[0,t_0]}$ радиуса $R : \|\delta(t)\| < R$ получим

$$\||t|^{\varepsilon}P(t)\delta_1^2(t) - |t|^{\varepsilon}P(t)\delta_2^2(t)\| < |t|^{\varepsilon}c_2 \sup_{\|\delta\|\leq R}\|D_\delta\delta^2(t)\|\,\|\delta_1(t) - \delta_2(t)\|.$$

Если выбрать окрестность $[0, t_0]$ такую, что

$$|t|^{\varepsilon} c_2 \sup_{\|\delta\| \le R} \|D_\delta \delta^2(t)\| < 1,$$

то оператор $|t|^{\varepsilon} P(t) \delta^2(t)$ будет сжимающим по $\delta(t)$ в пространстве $C_{[0,t_0]}$. Согласно принципу сжатых отображений уравнение (8) имеет единственное решение $\delta(t)$. Следовательно, уравнение (6) имеет малое решение вида $\overline{y}(t) = y(t) + |t|^{(r+1)\min\{s,1\}-l}\delta(t)$, $\delta(t) \in C_{[0,t_0]}$. Покажем простоту решения $\overline{y}(t)$. Запишем

$$(D_y F_y(y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t), t) + D_y\omega^{r+1}(y(t) + |t|^{l+\varepsilon}\delta(t), t))^{-1} = \\ = (D_y F_y(y(t), t) + D_y\omega^{r+1}(y(t), t) + O(|t|^{l+\varepsilon}, \delta(t)))^{-1},$$

где $O(|t|^{l+\varepsilon}, \delta(t))$ имеет в нуле порядок не меньше $l+\varepsilon$. Далее, аналогично доказательству оценки $\|(D_y F(y(t), t) + D_y\omega^{r+1}(y(t), t))^{-1}\| < 2c|t|^{-l}$ получаем

$$\|(D_y F_y(y(t), t) + D_y\omega^{r+1}(y(t), t) + O(|t|^{l+\varepsilon}, \delta(t)))^{-1}\| \le \\ \le 2c|t|^{-l} + 2c|t|^{-l}c_3|t|^{l+\varepsilon}2c|t|^{-l} + \dots \le \frac{2c|t|^{-l}}{1 - 2cc_3|t|^{\varepsilon}} < 4c|t|^{-l}.$$

Отсюда следует простота решения $y = \overline{y}(t)$ уравнения (6). $\square$

Следствие. Пусть $y = y(t)$ — простое аналитическое решение уравнения (3), l — его асимптотический порядок. Тогда решение $y = y(t)$ является r-определенным, если выполнено $r \ge 2l$.

Таким образом, r-определенные простые малые решения аналитических уравнений до l-го порядка включительно однозначно определяются отрезками ряда Тейлора r-го порядка уравнения. При возмущении уравнения слагаемыми, начиная с $(r+1)$-го порядка, сохранится свойство простоты r-определенного решения и его разложение по степеням переменной t, начиная со степеней t^s до степеней $t^{l+\varepsilon}$, где $\varepsilon = (r+1)\min\{s,1\} - 2l$.

С другой стороны, всякое простое решение $y = y(t)$ аналитического уравнения будет конечно-определенным, т. е. найдется такое натуральное $r : (r+1)\min\{s,1\} > 2l$, что $y = y(t)$ r-определено.

В случае $F \in C^\infty(U, R^n)$ теорема 2 имеет место, если предположить выполнение оценки (5) для простого решения $y = y(t)$, или согласно лемме 2 замкнутость идеала

$$(\|F(y,t)\|^2 + (\det D_y F(y,t))^2) C^\infty(R^n).$$

3. Конечная определенность уравнения и кратность особого решения

В этом разделе рассмотрим связь понятия конечной определенности уравнения с понятием бифуркационной кратности отображения F.

Напомним, что решение $y = y(t)$ уравнения (3) называется конечно-определенным, если найдется такое натуральное r, при котором решение $y = y(t)$ является r-определенным.

Уравнение (3) назовем r-определенным, если для любого C^{r+1}-отображения $F_1(y,t)$, $F_1 \in j_0^r(F)$, ростки множеств $F^{-1}(0)$ и $F_1^{-1}(0)$ в точке $(0,0)$ гомеоморфны, а ростки множеств $F^{-1}(0) \setminus (0,0)$ и $F_1^{-1}(0) \setminus (0,0)$ в точке $(0,0)$ диффеоморфны.

Уравнение (3) назовем конечно-определенным, если оно r-определено при некотором r. Очевидно, из r-определенности (конечной определенности) уравнения следует r-определенность (конечная определенность) всех его малых решений. Возникает вопрос, верно ли обратное утверждение?

Пусть $y = y_1(t)$, $y = y_2(t), \dots, y = y_k(t)$ — все малые решения уравнения (3) и все эти решения являются простыми. Согласно теореме 2 найдутся числа $r_1, r_2, \dots, r_k$ такие, что решение $y = y_i(t)$ является r_i-определенным, $i = 1, 2, \dots, k$. При этом r_i достаточно взять удовлетворяющим неравенству $(r_i+1)\min\{s_i, 1\} > 2l_i$, где s_i — порядок в нуле, l_i — асимптотический порядок решения $y = y_i(t)$. Следовательно, если выбрать $r = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, то все простые малые решения $y = y_i(t)$ будут r-определены и решения $\overline{y}_i(t) = y_i(t) + |t|^{(r_i+1)\min\{s_i,1\}-l_i}\delta_i(t)$ возмущенного уравнения (6) также будут простыми. Возникает вопрос, будет ли уравнение (3) r-определено? Не появятся ли наряду с решениями $y = \overline{y}_i(t)$ другие решения? Отрицательный ответ на первый вопрос дает следующий элементарный пример.

Рассмотрим уравнение

$$f(y,t) = (y - t^2)(y^2 - 2yt + t^2 + t^4) = 0,$$

где $f : R^2 \to R^1$. Единственным малым вещественным решением уравнения будет $y(t) = t^2$. Порядок s в нуле этого решения равен 2. Так как

$$(D_y f(t^2,t))^{-1} = (2t^4 - 2t^3 + t^2)^{-1} < 2|t|^{-2},$$

то асимптотический порядок l решения $y(t) = t^2$ равен 2. Таким образом, решение $y(t) = t^2$ согласно теореме 2 является 4-определенным. Тем не менее, возмутив уравнение слагаемыми не ниже 5-го порядка, получим уравнение

$$f_1(y,t) = f(y,t) + 2(t^2 - y)t^4 = 0.$$

Последнее уравнение имеет три простых решения: $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t+t^2$, $y_3(t) = t-t^2$. При этом решение $y_1(t)$ будет по-прежнему 4-определенным, решения $y_2(t)$, $y_3(t)$ будут 6-определенными.

Таким образом, на этом примере убедились, что для r-определенности уравнения недостаточно иметь r-определенность всех его малых решений, т. к. при возмущениях уравнения слагаемыми не ниже $(r+1)$-го порядка могут ответвиться новые решения (переходить из комплексного пространства в вещественное). Как будет показано ниже, для того, чтобы из r-определенности всех малых решений вытекала r-определенность уравнения, достаточно, чтобы число решений уравнения (3) совпадало с бифуркационной кратностью нуля отображения $F(y,0)$.

Пусть $F(y)$ — C^r-отображение, действующее в вещественном пространстве R^n, $F(0) = 0$. Будем рассматривать различные гладкие деформации $F_t(y)$ отображения $F(y)$ (т. е. $F_t(y)$ гладко зависит от $t \in R^k$ и $F_0(y) = F(y)$).

Натуральное число $\rho(F,0)$ назовем бифуркационной кратностью отображения $F(y)$ в нуле, если выполнены условия:

1) при всех деформациях $F_t(y)$ количество малых решений $y(t)$ уравнения $F(y,t) = 0$ не превышает $\rho(F,0)$ (если такого числа нет, то полагаем $\rho(F,0) = +\infty$);
2) найдется такая деформация $\overline{F}_t(y)$, что уравнение $\overline{F}(y,t) = 0$ ($\overline{F}(y,t) = \overline{F}_t(y)$) имеет ровно $\rho(F,0)$ малых решений $y = y(t)$.

Из результатов [5], [6] следует, что бифуркационная кратность не превосходит алгебраической кратности (размерности локального кольца особенности [6]) отображения в нуле.

На вопрос, поставленный в начале раздела, отвечает

Теорема 3. *Пусть отображение $F(y,0)$ ($F \in C^a(R^n \times R^1, R^n)$) имеет в нуле конечную бифуркационную кратность $\rho(F,0) = k$ и пусть уравнение (3) имеет ровно k простых решений $y = y_1(t)$, $y = y_2(t), \ldots, y = y_k(t)$ с порядками в нуле s_i, асимптотическими порядками l_i. Тогда уравнение (3) r-определено относительно возмущений вида $\omega^{r+1}(y,t)$, где $\omega^{r+1}(y,0) = 0$, $\|\omega^{r+1}(y,t)\|/\|(y,t)\|^{r+1} < c$, при $(y,t) \to 0$ для $r = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, $(r_i + 1)\max\{s_i, 1\} > 2l_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 2 и определения бифуркационной кратности отображения в нуле. Заметим, что r-определенность здесь отличается от введенной выше, т. к. рассматривается устойчивость относительно возмущений $\omega^{r+1}(y,t)$, удовлетворяющих условию $\omega^{r+1}(y,0) = 0$. В случае, когда бифуркационная кратность $\rho(F,0)$ равна алгебраической кратности, условие $\omega^{r+1}(y,0) = 0$ можно отбросить.

В изученном выше примере уравнение

$$f_1(y,t) = (y-t^2)(y-t-t^2)(y-t+t^2) = 0$$

будет конечно определено относительно возмущений вида $\omega^7(y,t)$, $\omega^7(y,0) = 0$, т. к. имеет три простых решения и $\rho(f_1(y,0)) = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = r_3 = 6$.

4. Критерий конечной определенности

В предыдущем разделе получено достаточное условие r-определенности уравнения в зависимости от числа его простых решений и их асимптотики в нуле (чисел s_i, l_i). В этом разделе получим критерий конечной определенности уравнения без применения этой информации и в более общем случае.

Рассмотрим аналитическое уравнение

$$F(x) = 0, \tag{9}$$

где $F : (R^{n+p}, 0) \to (R^n, 0)$. Обозначим $\sum(F) = \{x \mid \operatorname{rank} DF(x) < n\}$ — росток в нуле множества особых решений уравнения (9). Будем предполагать, что $0 \in \sum(F)$. В [7] получена

Теорема 4. *Уравнение* (9) *r-определено тогда и только тогда, когда для любого C^{r+1}-отображения $F_1 \in j_0^r(F)$ росток множества особых решений уравнения $F_1(x) = 0$ состоит из одной точки $x = 0$ $\left(\sum(F_1) \bigcap F_1^{-1}(0) = \{0\}\right)$.*

Заметим, что теорема 4 верна для $F \in C^{r+1}$.

Критерий конечной определенности аналитического уравнения (9) дает

Теорема 5. *Пусть $F \in C^a(R^{n+p}, R^n)$. Уравнение* (9) *конечно определено тогда и только тогда, когда $x = 0$ — изолированное особое решение уравнения* (9), *т. е.*

$$\sum(F) \bigcap F^{-1}(0) = \{0\}.$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4. Пусть $x = 0$ — изолированное особое решение уравнения (9). Рассмотрим неотрицательную аналитическую функцию

$$\varphi(x) = \|F(x)\|^2 + \det(D_x F(x)(D_x F(x))^\top),$$

локальное множество нулей которой состоит из одной точки $x = 0$. По неравенству Лоясевича [4] для всех x из некоторой замкнутой окрестности нуля верна оценка $\varphi(x) > cd(x, \varphi^{-1}(0))^\alpha$, где $c, \alpha > 0$, $d(x, \varphi^{-1}(0))$ — расстояние от точки x до множества $\varphi^{-1}(0)$. Учитывая, что существует окрестность $U(0)$ такая, что $\varphi^{-1}(0) \bigcap U(0) = \{0\}$, получаем

$$\|F^2(x)\| + \det(D_x F(x)(D_x F(x))^\top) > c\|x\|^\alpha.$$

Выберем $r > \alpha$. Покажем, что уравнение (9) r-определено. Для этого согласно теореме 4 необходимо и достаточно, чтобы для любого отображения $F_1 \in j_0^r(F)$, $F_1(x) = F(x) + \omega^{r+1}(x)$ ($\|\omega^{r+1}(x)\|/\|x\|^{r+1} < c$, при $x \to 0$) система

$$F_1(x) = 0, \quad \det(D_x F_1(x)(D_x F_1(x))^\top) = 0$$

имела изолированное решение $x = 0$. Рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \|F_1(x)\|^2 + \det(D_x F_1(x)(D_x F_1(x))^\top),$$

для которой верна оценка

$$\psi(x) = \|F(x)\|^2 + O(\|x\|^{r+2}) + \det(D_x F(x)(D_x F(x))^\top) + \\ + O(\|x\|^r) > c\|x\|^\alpha + O(\|x\|^{r+2}) + O(\|x\|^r) > \frac{c}{2}\|x\|^\alpha$$

($O(\|x\|^k)/\|x\|^k < c$ при $x \to 0$). Отсюда следует, что решение $x = 0$ системы изолировано.

Для случая, когда $F \in C^\infty(R^{n+p}, R^n)$, теорема не верна, т. к. неравенство Лоясевича выполняется только при дополнительных предположениях.

Рассмотрим уравнение $f(x) = (x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, где $x, y \in R^1$, $f(x) \in C^\infty(R^2, R^1)$. Легко видеть, что $(x, y) = 0$ — изолированное особое решение. Неравенство Лоясевича не выполнено, т. к. ни при каком α не верна оценка

$$((x+y)^2 - e^{-\frac{1}{x^2}})^2 + 4(x+y)^2 + 4\left(x + y - e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^3}\right)^2 > c\|(x,y)\|^\alpha$$

(достаточно проверить при $x = -y$). Уравнение не является конечно-определенным, т. к. уравнение

$$f_1(x,y) = f(x,y) + e^{-\frac{1}{x^2}} = (x+y)^2 = 0$$

имеет особое решение $x = -y$.

Теорема 6. *Пусть $F \in C^\infty(R^{n+p}, R^n)$ и идеал*

$$(\|F(x)\|^2 + \det(D_x F(x)(D_x F(x))^\top))C^\infty$$

замкнут. Уравнение (9) конечно определено тогда и только тогда, когда $x = 0$ — его изолированное особое решение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5, т. к. замкнутость идеала позволяет применить неравенство Лоясевича к бесконечно гладкой функции.

Предыдущий пример показывает, что для бесконечно гладких отображений из изолированности нулевого особого решения не следует его конечная определенность.

5. Неразрешенное интегрирование

Рассмотрим неразрешенное дифференциальное уравнение (2), $F \in C^a(R^n \times R^1, R^n)$, $x \in R^n$, $t \in R^1$, $F(0,0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Из полученных выше результатов вытекают 4 утверждения.

I. Если $y(t)$ — простое малое решение уравнения (3) с асимптотическим порядком l и порядком в нуле s $(y(t) = at^s + o(t^s))$, то $\forall F_1 \in j_0^r(F)$ уравнение $F_1(\dot{x}(t), t) = 0$ имеет решение

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau + o(t^{l+\varepsilon+1})$$

при $(r+1)\min\{s,1\} > 2l$, $\varepsilon = (r+1)\min\{s,1\} - 2l$. При этом $x(t) = \frac{a}{s+1}t^{s+1} + \dots + bt^{l+\varepsilon+1} + o(t^{l+\varepsilon+1})$. Разложение решения по степеням t, со степени t^{s+1} до $t^{l+\varepsilon+1}$, определяется исходным уравнением (2)–(3).

II. В случае $F \in C^\infty$ это утверждение верно, если идеал $(\|F(y,t)\|^2 + (\det(D_y F(y,t))^2)C^\infty$ замкнут.

III. Пусть $y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)$ — простые малые решения уравнения (3) с асимптотическими порядками l_i, порядками в нуле s_i и бифуркационная кратность в нуле отображения $F(y,0)$ равна k. Тогда для любого уравнения

$$F(\dot{x}(t), t) + \omega^{r+1}(\dot{x}(t), t) = 0,$$

где $\omega^{r+1}(y,0) = 0$, $\|\omega^{r+1}(y,t)\|/\|(y,t)\|^{r+1} < c$ при $(y,t) \to (0,0)$ все его решения имеют вид

$$x_i(t) = \int_0^t y_i(\tau)d\tau + o(t^{(r_i+1)\min\{s_i,1\} - l_i + 1}),$$

где $(r_i+1)\min\{s_i,1\} > 2l_i$, $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_k\}, i = 1, 2, \dots, k$.

В случае равенства алгебраической кратности в нуле отображения $F(y,0)$ числу k условие $\omega^{r+1}(y,0) = 0$ можно отбросить.

IV. Пусть отображение $F(y,t)$ аналитическое и уравнение $F(y,0) = 0$ имеет только нулевое решение $y = 0$. Тогда, если $(y,t) = (0,0)$ — изолированное особое решение уравнения $F(y,t) = 0$

$(\sum(F)\bigcap F^{-1}(0)=(0,0))$, все малые решения $y=y_i(t)$ являются простыми, то существует такое r, что $\forall F_1\in j_0^r(F)$ все решения уравнения $F_1(\dot{x}(t),t)=0$ находятся по формулам

$$x_i(t)=\int_0^t y_i(\tau)d\tau+o(t^{l_i+\varepsilon_i+1}).$$

Для $F\in C^\infty$ последнее выполнено в случае замкнутости идеала

$$(\|F(y,t)\|^2+\det(D_{(y,t)}F(y,t)(D_{(y,t)}F(y,t))^\top))C^\infty(R^n).$$

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М., 1969. – 456 с.
3. Зачепа В.Р. *О продолжении по параметру простых решений* // Операторные методы в нелинейном анализе. – Воронеж, 1982. – С. 44–47.
4. Мальгранж Б. *Идеалы дифференцируемых функций.* – М., 1968. – 131 с.
5. Паламодов В.П. *О кратности голоморфного отображения* // Функц. анализ и его прилож. – 1967. – Т.1. – Вып.3. – С. 54–65.
6. Химшиашвили Г.Н. *О локальной степени гладкого отображения* // Сообщ. АН ГрузССР. – 1977. – Т. 85. – № 2. – С. 309–311.
7. Зачепа В.Р. *О v-определенности ростка гладкого отображения в особой точке* // Глобальный анализ и нелинейные уравнения. – Воронеж, 1988. – С. 119–126.

Воронежский государственный педагогический университет

Поступила 25.06.2003