УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 4 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 544–556 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 517.956

О НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р. Пиров

Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни, г. Душанбе, 733740, Республика Таджикистан

Аннотация

Рассмотрены одна линейная система дифференциальных уравнений в частных производных, встречающаяся в механике деформируемого твердого тела, и класс систем из трех уравнений, содержащих в правых частях нелинейным образом три производные второго порядка одной неизвестной функции.

Путем замены производных первого и второго порядков в правых частях новыми неизвестными функциями осуществлен переход к системам с большим числом неизвестных функций и установлена связь с системами в полных дифференциалах. Для исследуемых переопределенных систем найдены явные условия совместности и описаны многообразия решений, содержащие не более семи произвольных постоянных. Результаты, носящие в основном теоретический характер, могут быть использованы для дальнейшего развития теории систем дифференциальных уравнений с частными производными при решении конкретных задач гидродинамики (точнее, при построении точных («тестовых») решений плоских задач гидродинамики), газовой динамики, теории упругости и ряда разделов механики, физики и других фундаментальных наук.

Ключевые слова: условия совместности, многообразие решений, переопределенные системы

Введение

В гидродинамике, теории упругости и электромагнитной теории поля многие задачи сводятся к переопределенным системам дифференциальных уравнений в частных производных.

В известной монографии Э. Гурса [1] изучались в основном переопределенные системы первого порядка с одной неизвестной функцией. Начиная с 1970 г. ряд классов систем с одной либо с двумя и более неизвестными функциями стал изучаться в работах Л.Г. Михайлова и его учеников [2, § 5], [3]. В этих работах рассмотрены квазилинейные и нелинейные системы двух и трех уравнений с одной неизвестной функцией на плоскости. Основной метод исследования состоит в замене производных первого и второго порядка в правых частях на новые неизвестные функции, в переходе к системам с большим числом неизвестных функций и в установлении связей с достаточно изученными системами в полных дифференциалах (п.д.-системами) [4].

Настоящая работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена исследованию одной переопределенной системы в частных производных второго порядка, встречающейся в механике деформируемого твердого тела (м.д.т.т.). Во второй части изучены некоторые переопределенные системы, содержащие в правых частях нелинейным образом три производные.

1. Исследование одной линейной системы механики деформируемого твердого тела

В классической литературе и современных исследованиях по м.д.т.т (теории пластичности) известны и подробно рассматривались лишь частные случаи реализации процессов однородно-простой деформации в теле [5–7]. Изучение свойств некоторых классов сжимаемых упругопластических тел сводится к вопросам нахождения условий совместности и уточнению многообразия решений переопределенных систем шести линейных уравнений в частных производных второго порядка

$$V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}+V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}-2V_{23}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}=2\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{33}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2}+2\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3},$$

$$V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}+V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}-2V_{31}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}=2\left(\frac{\partial V_{31}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3}+2\left(\frac{\partial V_{31}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{33}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1},$$

$$V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}+V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}-2V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}=2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1}+2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2},$$

$$-V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}+V_{23}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_3}+V_{31}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}-V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}=\left(\frac{\partial V_{33}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{23}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1}+$$
$$+\left(\frac{\partial V_{33}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{31}}{\partial x_3}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2}-\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}-2\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3},\quad (1)$$

$$-V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}+V_{31}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_1}+V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}-V_{23}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}=\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{31}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2}+$$
$$+\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3}-\left(\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial V_{12}}{\partial x_3}-2\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1},$$

$$-V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}+V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_2}+V_{23}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}-V_{31}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}=\left(\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3}+$$
$$+\left(\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{23}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1}-\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}-2\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2},$$

где $V_{ij}=V_{ij}(x_1,x_2,x_3)\in C^2, i,j=1,2,3$ – заданные функции, $A=A(x_1,x_2,x_3)$ – неизвестная функция, которая ищется из класса C^2, а в ряде случаев из C^3 (здесь и далее C^k – класс непрерывно-дифференцируемых функций порядка k). В силу механических свойств задачи заданные коэффициенты этой системы удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2 V_{33}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x_3^2}-2\frac{\partial^2 V_{23}}{\partial x_2\partial x_3}=0,\quad \frac{\partial^2 V_{11}}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2 V_{33}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2 V_{31}}{\partial x_3\partial x_1}=0,$$

$$\frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V_{11}}{\partial x_2^2}-2\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_3\partial x_1}=0,\quad -\frac{\partial V_{33}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_3}\right)=0,$$

$$-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial V_{12}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}\right)=0,$$

$$-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_3}+\frac{\partial V_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{31}}{\partial x_2}\right)=0.$$

Учитывая прикладной характер поставленной задачи, рассмотрим некоторые частные случаи (1) [8], имеющие определенный механический смысл. Полученные ниже результаты свидетельствуют о том, что неоднородно-простые деформации возможны и многообразия их достаточно широки.

1.1. Случай $V_{12} \equiv V_{21} \equiv V_{13} \equiv V_{31} \equiv V_{23} \equiv V_{32} \equiv 0$, $V_{ii}(x_1, x_2, x_3) \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Система (1) при $2V_{11} \cdot V_{22} \cdot V_{33} \neq 0$ приводится к виду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} &= a^{(1)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(1)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(1)} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} &= a^{(2)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(2)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(2)} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2} &= a^{(3)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(3)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(3)} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} &= a^{(4)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(4)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(4)} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_3} &= a^{(5)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(5)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(5)} \frac{\partial A}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_1} &= a^{(6)} \frac{\partial A}{\partial x_1} + b^{(6)} \frac{\partial A}{\partial x_2} + c^{(6)} \frac{\partial A}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{2}$$

где $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ имеют вид

$$a^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\ln(V_{22}) \cdot V_{33}\right], \quad b^{(1)} = \frac{V_{11}}{V_{22}} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\ln\left(\frac{V_{33}}{V_{11}}\right)\right], \quad c^{(1)} = \frac{V_{11}}{V_{33}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln\left(\frac{V_{22}}{V_{11}}\right)\right],$$

$$a^{(2)} = -\frac{V_{22}}{V_{11}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\ln\left(\frac{V_{33}}{V_{22}}\right)\right], \quad b^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\ln(V_{22} \cdot V_{33})\right], \quad c^{(2)} = -\frac{V_{22}}{V_{33}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln\left(\frac{V_{22}}{V_{11}}\right)\right],$$

$$a^{(3)} = -\frac{V_{33}}{V_{11}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\ln\left(\frac{V_{33}}{V_{22}}\right)\right], \quad b^{(3)} = -\frac{V_{33}}{V_{22}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln\left(\frac{V_{33}}{V_{11}}\right)\right], \quad c^{(3)} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln(V_{11} \cdot V_{22})\right],$$

$$a^{(4)} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\ln V_{33}\right], \quad b^{(4)} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\ln V_{33}\right], \quad c^{(4)} = 0,$$

$$a^{(5)} = 0, \quad b^{(5)} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln V_{33}\right], \quad c^{(5)} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\ln V_{11}\right),$$

$$a^{(6)} = -\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\ln V_{22}\right], \quad b^{(6)} = 0, \quad c^{(6)} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\ln V_{22}\right),$$

связанные между собой соотношениями

$$V_{33} a^{(2)} + V_{22} a^{(3)} = 0, \quad V_{33} b^{(1)} + V_{11} b^{(3)} = 0, \quad V_{22} c^{(1)} + V_{11} c^{(2)} = 0.$$

Заменой

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = p(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial A}{\partial x_3} = q(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{\partial A}{\partial x_1} = R(x_1, x_2, x_3),$$

где p, q и R являются новыми неизвестными функциями, связанными между собой равенствами

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \frac{\partial q}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial q}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_1}$$

(они вытекают из тождеств

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_3}$$

соответственно) приведем (2) к п.д.-системе относительно A, p, q, R

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x_1} = p, \quad \frac{\partial A}{\partial x_2} = q, \frac{\partial A}{\partial x_3} = R, \quad \frac{\partial p}{\partial x_1} = a^{(1)}p + b^{(1)}q + c^{(1)}R, \\
&\frac{\partial p}{\partial x_2} = a^{(4)}p + b^{(4)}q, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial R}{\partial x_1} = a^{(6)}p + c^{(6)}R, \\
&\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = a^{(4)}p + b^{(4)}q, \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} = a^{(2)}p + b^{(2)}q + c^{(2)}R, \\
&\frac{\partial q}{\partial x_3} = b^{(5)}q + c^{(5)}R, \quad \frac{\partial R}{\partial x_1} = a^{(6)}p + c^{(6)}R, \\
&\frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial q}{\partial x_3} = b^{(5)}q + c^{(5)}R, \quad \frac{\partial R}{\partial x_3} = a^{(3)}p + b^{(3)}q + c^{(3)}R,
\end{aligned} \tag{3}$$

для которой имеется достаточно полная теория (см., например, [2, 4]). Из 12 равенств смешанных производных, обеспечивающих совместность этой системы, первые три выполняются автоматически, а остальные девять после замены появляющихся производных первого порядка правыми частями из (3) приводят к девяти линейным уравнениям

$$L_i \equiv M_i p + N_i q + Q_i R = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 9. \tag{4}$$

где M_i, N_i и Q_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$, явно выражаются через коэффициенты системы (3) и их частные производные первого порядка [8]. Поскольку L_2, L_6 и L_9 связаны непосредственно проверяемым тождеством $L_2 + L_6 \equiv L_9$, то в дальнейших рассуждениях, отбрасывая $L_9 = 0$, будем исходить из первых восьми уравнений (4).

Теорема 1. *Пусть дана система* (1), *где* $V_{12} \equiv V_{21} \equiv V_{13} \equiv V_{31} \equiv V_{23} \equiv V_{32} \equiv 0$, $V_{ii} \neq 0$ *– известные функции класса* C^2, A *– искомая функция класса* C^3. *Тогда при выполнении условий* $M_i \equiv 0$, $N_i \equiv 0$, $Q_i \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, 8$ *задача* (1), *в которой*

$$[A]_0 = c_1, \left[\frac{\partial A}{\partial x_1}\right] = c_2, \quad \left[\frac{\partial A}{\partial x_2}\right] = c_3, \quad \left[\frac{\partial A}{\partial x_3}\right] = c_4, \tag{5}$$

c_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *– произвольные постоянные, однозначно разрешима.*

Другими словами, при выполнении условия теоремы, в котором фигурирует (5), многообразие решений (1) содержит четыре произвольные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4.

Если в системе

$$V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}+V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}=-2\frac{\partial V_{33}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_2}-2\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_3},$$

$$V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}+V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}=-2\frac{\partial V_{11}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_2}-2\frac{\partial V_{33}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_1},$$

$$V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2}+V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}=-2\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_1}-2\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_2},$$

$$-V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial V_{33}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{33}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_2},$$

$$-V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}=\frac{\partial V_{11}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_3}+\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_2},$$

$$-V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}=\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_3}+\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_1}$$

$V_{ii}\neq 0$ являются постоянными (простое продолжение деформированного состояния с фиксированными в теле осями деформации), то условия $M_i\equiv 0,\ N_i\equiv 0,\ Q_i\equiv 0,\ i=1,2,\cdots,8$, выполняются автоматически, и для нее имеет место теорема 1 без указанных условий.

1.2. Пусть, кроме тождеств $V_{ij}\equiv 0,\ i\neq j$, имеет место равенство $V_{11}\equiv 0$, тогда (1) упрощается, коэффициенты будут связаны соотношениями

$$\frac{\partial^2 V_{33}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x_3^2}=0,\quad \frac{\partial^2 V_{33}}{\partial x_3^2}=0,\frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x_1^2}=0.$$

Представляет особый интерес изучение полученной системы в случаях, когда

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln\frac{V_{33}}{V_{22}}\right)\equiv 0,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln\frac{V_{33}}{V_{22}}\right)\neq 0.$$

Из условия $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln\dfrac{V_{33}}{V_{22}}\right)\equiv 0$ имеем

$$V_{33}=V_{22}\cdot\Phi(x_2,x_3),$$

где $\Phi(x_2,x_3)=\exp(\varphi(x_2,x_3))$ – произвольно заданная дважды непрерывно-дифференцируемая функция. При $\dfrac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\neq 0$, $\dfrac{\partial V_{33}}{\partial x_1}\neq 0$ система приводится к виду

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x_1}=\frac{1}{V_{22}^2}\cdot\Phi,\quad \frac{\partial V_{33}}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_2}=-V_{33}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\Phi}{V_{33}^2}\right)-\frac{\partial V_{33}}{\partial x_2}\cdot\frac{\Phi}{V_{33}^2},\\
&\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial A}{\partial x_3}=-V_{22}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\Phi}{V_{33}^2}\right)-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_3}\cdot\frac{\Phi}{V_{33}^2},\\
&\alpha(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\beta(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial^2 x_3^2}+\gamma(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}+\\
&\qquad\qquad+\delta(x_1,x_2,x_3)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}+\sigma(x_1,x_2,x_3)\Phi=0,
\end{aligned}\tag{6}$$

Через $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \sigma$ обозначены вполне определенные выражения, содержащие коэффициенты исходной системы и их производные первого и второго порядков.

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) $V_{11} \equiv V_{ij} \equiv 0,\ i \neq j,\ V_{22} \neq 0,\ V_{33} \neq 0$ – *заданные в* C^2 *функции, удовлетворяющие уравнениям* (6), A – *искомая функция класса* C^3. *Тогда при* $\dfrac{\partial V_{22}}{\partial x_1} \neq 0,\ \dfrac{\partial V_{33}}{\partial x_1} \neq 0$ *и выполнении условий*

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\ln \frac{V_{33}}{V_{22}}\right] \equiv 0, \quad \alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv \delta \equiv \sigma \equiv 0,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_1}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_2 \partial x_3} \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_2}, \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_3} \equiv \frac{\partial^2 A}{\partial x_3 \partial x_1}$$

в некоторой окрестности точки (x_1^0, x_2^0, x_3^3) *многообразия решений системы* (1), *содержат одну произвольную функцию* $\Phi(x_2, x_3)$ *и одну произвольную постоянную.*

В частности, если $\alpha \equiv \beta \neq 0,\ \gamma \equiv \delta \equiv \sigma \equiv 0$, то $\Phi(x_2, x_3)$ входит в решение как гармоническая функция.

Если

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \beta}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \delta}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial \sigma}{\partial x_1} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\delta}{\alpha}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sigma}{\alpha}\right) \equiv 0,$$

то в обоих случаях будем иметь уравнение в частных производных второго порядка, в котором коэффициенты и искомые функции зависят от двух переменных x_2 и x_3. С помощью известного метода Римана можно найти решение с двумя произвольными функциями от одной переменной.

Теперь предположим, что $\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left[\dfrac{V_{33}}{V_{22}}\right] \neq 0$. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\ln \frac{V_{33}}{V_{22}}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0,$$

следовательно, $A = A(x_2, x_3)$, и далее выясняется, что при $\dfrac{\partial V_{22}}{\partial x_1} \neq 0$ и $\dfrac{\partial V_{33}}{\partial x_1} \neq 0$ справедливы равенства $\dfrac{\partial A}{\partial x_2} = 0$ и $\dfrac{\partial A}{\partial x_3} = 0$.

Итак, в этом случае имеем $A = \mathrm{const}$.

1.3. Рассмотрим систему (1) на плоскости. При этом предположим, что $V_{13} \equiv V_{31} \equiv V_{23} \equiv V_{32} \equiv 0$, $V_{11},\ V_{12},\ V_{21},\ V_{22}$ – заданные функции, связанные уравнением

$$\frac{\partial^2 V_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_{11}}{\partial x_2^2} - 2\frac{\partial^2 V_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

и условием $V_{33} - \mathrm{const} \neq 0$; $A = A(x_1, x_2)$ – неизвестная функция (соответствует случаю плоской деформации). Тогда система (1) приводится к виду

$$V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = 0, \quad -V_{33}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} - 2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2} = 2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1}.$$

При выполнении условий

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{V_{11}}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\right]\equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{1}{V_{11}}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)\right]\equiv 0$$

решение системы имеет вид

$$A(x_1,x_2)=c_1x_1+\int\Big\{\exp\left(2\int\frac{1}{V_{11}}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)dx_2\right)\Big[c_2+$$
$$+2c_1\int\exp\left(-2\int\frac{1}{V_{11}}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)dx_2\right)\frac{1}{V_{11}}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)dx_2\Big]\Big\}dx_2+c_3.$$

1.4. Теперь предположим, что $V_{13}\equiv V_{31}\equiv V_{23}\equiv V_{32}\equiv V_{33}\equiv 0$, все остальные коэффициенты в (1) являются заданными функциями (x_1,x_2); $A\equiv A(x_1,x_2,x_3)$ (это простое пространственное продолжение плоской деформации). Содержание данного пункта в определенной степени обобщает п. 1.3. Сама система при сделанных предположениях примет вид

$$\begin{aligned}
&V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}=0, \quad -V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}=0, \quad V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3^2}=0,\\
&-V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}+V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_2}=\left(\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3},\\
&V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1}-V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2\partial x_3}=\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial x_3}-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_3},\\
&V_{22}\frac{\partial^2 A}{\partial^2 x_1}+V_{11}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2}-2V_{12}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1\partial x_2}=\\
&\qquad\qquad=2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial A}{\partial x_1}+2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial A}{\partial x_2}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Если $\Delta\equiv V_{11}V_{22}-V_{12}^2\neq 0$, то при выполнении условий

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(J_1)-\frac{\partial}{\partial x_1}(J_2)\equiv 0,$$

$$2V_{12}\,J_1\,J_2-V_{22}\,J_1^2-V_{11}\,J_2^2+2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\cdot J_1+2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)J_2\equiv 0,$$

где J_1 и J_2 имеют вид

$$J_1=\frac{V_{11}}{\Delta}\left(-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right)+\frac{V_{12}}{\Delta}\left(-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right),$$

$$J_2=\frac{V_{12}}{\Delta}\left(-\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)+\frac{V_{22}}{\Delta}\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right),$$

система допускает решение в виде

$$A(x_1,x_2,x_3)=c_1x_3\exp(W(x_1,x_2))+\varphi(x_1,x_2).\tag{8}$$

В (8) $c_1 = \mathrm{const}$, $W(x_1,x_2) = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} J_1 dx_1 + \int\limits_{x_2^0}^{x_2} J_2(x_1^0,x_2)dx_2$, а $\varphi(x_1,x_2)$ – функция, удовлетворяющая уравнению

$$V_{22}(x_1,x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + V_{11}(x_1,x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} -$$
$$- 2V_{12}(x_1,x_2)\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2} - 2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial V_{22}}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - 2\left(\frac{\partial V_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{11}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 0.$$

Если $\Delta \equiv V_{11}\,V_{22} - V_{12}^2 \equiv 0$, то при $V_{11}\left(\dfrac{\partial V_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right) + V_{12}\left(\dfrac{\partial V_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right) \neq 0$, умножая четвертое уравнения системы (7) на V_{11}, а пятое на V_{12} и складывая, получим уравнение

$$0 = \Delta\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1} = (-V_{11}\,V_{22} + V_{12}^2)\,\frac{\partial^2 A}{\partial x_3\partial x_1} =$$
$$= \left(V_{11}\left(\frac{\partial V_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right) + V_{12}\left(\frac{\partial V_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right)\right)\frac{\partial A}{\partial x_3},$$

откуда находим $\dfrac{\partial A}{\partial x_3} = 0$. Ясно, что здесь имеет место случай 3.

При $V_{11}\cdot V_{22} - V_{12}^2 = 0$ и $V_{11}\left(\dfrac{\partial V_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial V_{12}}{\partial x_2}\right) + V_{12}\left(\dfrac{\partial V_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial V_{12}}{\partial x_1}\right) \equiv 0$ четвертое и пятое уравнения системы (7) совпадают, решение находится с двумя произвольными функциями $\varphi(\omega)$ и $\psi(x_1,x_2)$:

$$A(x_1,x_2,x_3) = x_3F(x_1,x_2)\varphi(\omega) + \psi(x_1,x_2),$$

$\Big(F(x_1,x_2)$ – известная функция, а $\omega = \omega(x_1,x_2)$ удовлетворяет уравнению $V_{12}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_1} - V_{11}\dfrac{\partial\omega}{\partial x_2} \equiv 0\Big)$.

В завершение этой часты работы отметим, что система

$$a_{11}(x,y,z)U_{yy} + a_{12}(x,y,z)U_{zz} + a_{13}(x,y,z)U_{yz} = f^1(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$
$$a_{21}(x,y,z)U_{zz} + a_{22}(x,y,z)U_{xx} + a_{23}(x,y,z)U_{zx} = f^2(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$
$$a_{31}(x,y,z)U_{xx} + a_{32}(x,y,z)U_{yy} + a_{33}(x,y,z)U_{xy} = f^3(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$
$$a_{41}(x,y,z)U_{xy} + a_{42}(x,y,z)U_{xz} + a_{43}(x,y,z)U_{yz} + V_{44}(x,y,z)U_{zz} =$$
$$= f^4(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$
$$a_{51}(x,y,z)U_{yz} + a_{52}(x,y,z)U_{yx} + a_{53}(x,y,z)U_{zx} + V_{54}(x,y,z)U_{xx} =$$
$$= f^5(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$
$$a_{61}(x,y,z)U_{zx} + a_{62}(x,y,z)U_{zy} + a_{63}(x,y,z)U_{xy} + V_{64}(x,y,z)U_{yy} =$$
$$= f^6(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z),$$

где $U = U(x,y,z) \in C^3$, заданные коэффициенты $a_{ij} \equiv a_{ij}(x,y,z)$, правые части $f^k \equiv f^k(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z)$, $i,k = 1,2,\ldots,6$, $j = 1,2,3,4$, исследуется аналогично.

2. Некоторые нелинейные системы

Рассмотрим три из всевозможных $C_6^3 = 20$ систем вида [9, 10]

$$\begin{cases} U_{xx} = f^1(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xy},U_{yz},U_{zx}),\\ U_{yy} = f^2(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xy},U_{yz},U_{zx}),\\ U_{zz} = f^3(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xy},U_{yz},U_{zx}),\end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} U_{xy} = f^1(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xx},U_{yy},U_{zz}),\\ U_{yz} = f^2(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xx},U_{yy},U_{zz}),\\ U_{zx} = f^3(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xx},U_{yy},U_{zz}),\end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} U_{xx} = f^1(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xz},U_{yz},U_{zz}),\\ U_{yy} = f^2(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xz},U_{yz},U_{zz}),\\ U_{xy} = f^3(x,y,z;U,U_x,U_y,U_z,U_{xz},U_{yz},U_{zz}),\end{cases} \tag{11}$$

где правые части известны, а $U = U(x,y,z)$ – неизвестная функции которая ищется в классе C^4.

2.1. Рассмотрим систему (9). С помощью замен $U_x = p(x,y,z)$, $U_y = q(x,y,z)$, $U_z = R(x,y,z)$, $U_{xy} = p_y = Q(x,y,z)$, $U_{yz} = q_z = \tau(x,y,z)$, $U_{zx} = R_x = t(x,y,z)$ и обязательного тождественного выполнения равенств $p_y = q_x$, $q_z = R_y$, $R_x = p_z$, приходим к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z), \quad U_y = q(x,y,z), \quad U_z = R(x,y,z),\\ p_x = f^1(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), \quad p_y = Q(x,y,z), \quad p_z = t(x,y,z),\\ q_x = Q(x,y,z), \quad q_y = f^2(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau), \quad q_z = \tau(x,y,z),\\ R_x = t(x,y,z), \quad R_y = \tau(x,y,z), \quad R_z = f^3(x,y,z;U,p,q,R,Q,t,\tau).\end{cases} \tag{12}$$

С целью дополнения (12) до систем в полных дифференциалах относительно функций U, p, q, R, Q, t, τ проделаем операции перекрестного дифференцирования (о.п.д.) $U_{xy} = U_{yx}$, $U_{yz} = U_{zy}$, $U_{xz} = U_{zx}$, $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{xz} = p_{zx}$, $p_{yz} = p_{zy}$, $q_{xy} = q_{yx}$, $q_{yz} = q_{zy}$, $q_{xz} = q_{zx}$, $R_{xy} = R_{yx}$, $R_{yz} = R_{zy}$, $R_{zx} = R_{xz}$. Первые три из вышеприведенных равенств вторых смешанных производных выполняются автоматически, а остальные девять, после замены всех появившихся производных первого порядка правыми частями из (12) приведут к системе девяти неразрешенных уравнений

$$\begin{aligned}
&Q_x - f^2_Q Q_y - f^2_\tau \tau_y - f^2_t t_y = f^1_y + f^1_U q + f^1_P Q + f^1_q f^2 + f^1_R \tau, \quad (U_{xy} = U_{yx}),\\
&Q_z - t_y = 0, \quad (p_{yz} = p_{zy}),\\
&f^1_Q Q_z + f^1_\tau \tau_z + f^1_t t_z - t_x = f^1_z + f^1_U R + f^1_U R + f^1_P t + f^1_q \tau + f^1_R f^3, \quad (p_{qx} = p_{xq}),\\
-&f^2_Q Q_x + Q_y - f^2_\tau \tau_x - f^2_t t_x = f^2_x + f^2_U p + f^2_P f^1 + f^2_q Q, \quad (q_{xy} = q_{yx}),\\
&f^2_Q Q_x - \tau_y + f^2_\tau \tau_z + f^2_t t_z = -f^2_z - f^2_U R - f^2_P t - f^2_q \tau - f^2_R f^3, \quad (q_{yz} = q_{zy}),\\
&Q_z - \tau_x = 0, \ (q_{xz} = q_{zx}),\\
-&f^3_Q Q_y - f^3_\tau \tau_y + \tau_z - f^3_t t_y = f^3_y + f^3_U q + f^1_p Q + f^3_q f^2, \quad (q_{yz} = q_{zy}),\\
&t_y - \tau_x = 0, \quad (R_{xy} = R_{yx})\\
-&f^3_Q Q_x - f^3_\tau \tau_x - f^3_t t_x + t_z = f^3_x + f^3_U P + f^3_P f^1 + f^3_q Q, \quad (R_{xz} = R_{zx}).
\end{aligned} \tag{13}$$

Непосредственной проверкой установим, что квадратная матрица 9×9

$$\begin{Vmatrix}
1 & -f_Q^2 & 0 & 0 & -f_\tau^2 & 0 & 0 & -f_t^2 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & f_Q^1 & 0 & 0 & f_\tau^1 & -1 & 0 & f_t^1\\
-f_Q^2 & 1 & -f_\tau^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_t^2\\
f_Q^2 & 0 & 0 & 0 & -1 & f_\tau^2 & 0 & 0 & f_t^2\\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & f_Q^3 & 0 & 0 & -f_\tau^3 & 1 & 0 & -f_t^3 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-f_Q^3 & 0 & 0 & -f_\tau^3 & 0 & 0 & -f_t^3 & 0 & 1
\end{Vmatrix}$$

составленная из коэффициентов при производных $Q_x,\ Q_y,\ Q_z,\ \tau_x,\ \tau_y,\ \tau_z,\ t_x,$ $t_y,\ t_z$ уравнений (13), в некоторой окрестности точки $(x_0,y_0,z_0;U_0,Q_0,q_0,R_0,t_0,\tau_0)$ имеет ранг, равный 9. В силу этого алгебраическими разрешениями (13) можно выразить через

$$Q_x,Q_y,\tau_x,\tau_y,\tau_z,t_x,t_y,t_z = f^i(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t),\ i=4,5,\ldots,12, \tag{14}$$

где правые части f^4-f^{12} явно выражаются через f^i, $i=1,2,3$, и их производные с первого до третьего порядков. Уравнения (12), (14) составляют п.д.-систему относительно семи неизвестных функций U, p, q, R, Q, t, τ и условий полной интегрируемости (у.п.и.)

$$\begin{aligned}
H^1 \equiv\ & f_y^4 - f_x^5 + f_u^4\cdot q - f_u^5\cdot P + f_P^4\cdot\theta - f_P^4\cdot f^1 + f_q^4\cdot f^2 - f_q^5\cdot\theta +\\
& + f_R^4\cdot\tau - f_R^5\cdot t + f_\theta^4\cdot f^5 - f_\theta^5\cdot f^4 + f_\tau^4\cdot f^8 - f_\tau^5\cdot f^7 + f_t^4\cdot f^{11} - f_t^5\cdot f^{10} = 0,\\[2mm]
H^2 \equiv\ & f_z^5 - f_y^6 + f_u^5\cdot R - f_u^6\cdot q + f_P^5\cdot t - f_P^6\cdot\theta + f_q^5\cdot\tau - f_q^6\cdot f^2 + f_R^5\cdot f^3 -\\
& - f_R^6\cdot\tau + f_\theta^5\cdot f^6 - f_\theta^6\cdot f^5 + f_\tau^5\cdot f^9 - f_\tau^6\cdot f^8 + f_t^5\cdot f^{12} - f_t^6\cdot f^{11} = 0,\\[2mm]
H^3 \equiv\ & f_z^4 - f_x^6 + f_u^4\cdot R - f_u^6\cdot P + f_P^4\cdot t - f_P^6\cdot f^1 + f_q^4\cdot\tau - f_q^6\cdot\theta + f_R^4\cdot f^3 -\\
& - f_R^6\cdot t + f_\theta^4\cdot f^6 - f_\theta^6\cdot f^4 + f_\tau^4\cdot f^9 - f_\tau^6\cdot f^7 + f_t^4\cdot f^{12} - f_t^6\cdot f^{10} = 0,\\[2mm]
H^4 \equiv\ & f_y^7 - f_x^8 + f_u^7\cdot q - f_u^8\cdot P + f_P^7\cdot\theta - f_P^8\cdot f^1 + f_q^7\cdot f^2 - f_q^8\cdot\theta + f_R^7\cdot\tau -\\
& - f_R^8\cdot t + f_\theta^7\cdot f^5 - f_\theta^8\cdot f^7 + f_\tau^7\cdot f^8 - f_\tau^8\cdot f^7 + f_t^7\cdot f^{11} - f_t^8\cdot f^{10} = 0,\\[2mm]
H^5 \equiv\ & f_z^8 - f_y^9 + f_u^8\cdot R - f_u^9\cdot q + f_P^8\cdot t - f_P^9\cdot\theta + f_q^8\cdot\tau - f_q^9\cdot f^2 + f_R^8\cdot f^3 -\\
& - f_R^9\cdot\tau + f_\theta^8\cdot f^6 - f_\theta^9\cdot f^5 + f_\tau^8\cdot f^9 - f_\tau^9\cdot f^8 + f_t^8\cdot f^{12} - f_t^9\cdot f^{11} = 0, \qquad (15)\\[2mm]
H^6 \equiv\ & f_z^7 - f_x^9 + f_u^7\cdot R - f_u^9\cdot P + f_q^7\cdot\theta - f_q^4\cdot\theta + f_R^7\cdot f^3 - f_R^9\cdot t + f_\theta^7\cdot f^6 -\\
& - f_\theta^9\cdot f^4 + f_\tau^7\cdot f^9 - f_\tau^9\cdot f^7 + f_t^7\cdot f^{11} - f_\tau^9\cdot f^7 = 0,\\[2mm]
H^7 \equiv\ & f_y^{10} - f_x^{11} + f_u^{10}\cdot q - f_u^{10}\cdot P + f_P^{10}\cdot\theta - f_P^{11}\cdot f^1 + f_q^{10}\cdot f^2 - f_q^{11}\cdot\theta + f_R^{10}\cdot\tau -\\
& - f_R^{11}\cdot t + f_\theta^{10}\cdot f^5 - f_\theta^{11}\cdot f^5 + f_\tau^{10}\cdot f^8 - f_\tau^{11}\cdot f^7 + f_t^{10}\cdot f^{11} - f_t^{11}\cdot f^{10} = 0,\\[2mm]
H^8 \equiv\ & f_z^{11} - f_y^{12} + f_u^{11}\cdot R - f_u^{12}\cdot q + f_P^{11}\cdot t - f_P^{12}\cdot\theta + f_q^{11}\cdot\tau - f_q^{12}\cdot f^2 +\\
& + f_R^{11}\cdot f^3 - f_R^{12}\cdot\tau + f_\theta^{11}\cdot f^6 - f_\theta^{12}\cdot f^5 + f_\tau^{11}\cdot f^9 - f_\tau^{12}\cdot f^8 + f_t^{11}\cdot f^{12} - f_t^{12}\cdot f^{11} = 0,
\end{aligned}$$

$$H^9 \equiv f_z^{10} - f_x^{12} + f_u^{10} \cdot R - f_u^{12} \cdot P + f_P^{10} \cdot t - f_P^{12} \cdot f^1 +$$
$$+ f_q^{10} \cdot \tau - f_q^{12} \cdot \theta + f_R^{10} \cdot f^3 - f_R^{12} \cdot t + f_\theta^{10} \cdot f^6 - f_\theta^{12} \cdot f^4 + f_\tau^{10} \cdot f^9 - f_\tau^{12} \cdot f^7 + f_t^{10} \cdot f^{12} - f_t^{12} \cdot f^{10} = 0$$

При их тождественном выполнении относительно входящих в них аргументов для исходной системы будет корректна следующая задача с начальными данными

$$\begin{gathered} [U]_0 = c_1, \quad [U_x] = c_2, \quad [U_y]_0 = c_3, \quad [U_z]_0 = c_4, \\ [U_{xy}]_0 = c_5, \quad [U_{yz}]_0 = c_6, \quad [U_{zx}]_0 = c_7, \end{gathered} \tag{16}$$

для которой можно считать доказанной следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть в системе* (9) *выполнены условия* f^1, f^2, f^3, U – *функции из* C^4, $f_t^2 \neq 0$ *и* $\alpha < \min(a, b/M)$, $M = |f^i|$, $i = 1, 2, 3$. *Если соотношения* (15) *в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0; U_0, U_x^0, U_y^0, U_z^0, U_{xy}^0, U_{yz}^0, U_{zx}^0)$ *выполняются тождественно, то задача* (9), (16) *разрешима единственным образом.*

Иными словами, многообразие решений содержит семь произвольных постоянных.

2.2. Теперь рассмотрим систему (10). Здесь осуществление замены $U_x = p$, $U_y = q$, $U_z = R$, $q_x = Q$, $R_z = \tau$, $p_z = t$ с учетом тождественного выполнения равенств $p_y = q_x$, $q_z = R_y$, $p_z = R_x$ приводит к квазилинейной системе

$$\begin{cases} U_x = p(x,y,z), \quad U_y = q(x,y,z), \quad U_z = R(x,y,z), \\ p_x, p_y = f^k(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t), \quad k = 1,2, \quad p_z = t(x,y,z), \\ q_x, q = f^k(x,y,z;U,p,q,R,Q,\tau,t), \quad k = 1,2, \quad q_z = Q(x,y,z), \\ R_x = t(x,y,z), \quad R_y = f^3(x,y,z;U,p,q,R,\tau,t), \quad R_z = \tau(x,y,z). \end{cases} \tag{17}$$

Имея систему (17), приходим к ситуации, сходной с той, которая изучалась в п. 2.1, то есть для этой системы можно утверждать, что многообразие решений содержит семь произвольных постоянных.

2.3. В отличие от систем (9) и (10), в левых частях системы (11) нет частных производных по z: (U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}). Осуществив замены $U_x = p$, $U_y = q$, $U_z = R$, $U_{yz} = q_z = Q$, $U_{xz} = p_z = \tau$, $U_{zz} = R_z = t$, придем к системе

$$\begin{cases} U_x = p, \quad U_x = q, \quad U_z = R, \quad p_x = f^1, \quad p_y = f^3, \quad p_z = \tau \\ q_x = f^3, \quad q_y = f^2, \quad q_x = Q, \quad R_x = \tau, \quad R_y = Q, \quad R_z = t. \end{cases}$$

Повторив процедуру, аналогичную проведенной в п. 2.1 и 2.2, получим еще девять неразрешенных относительно τ_x, τ_y, τ_z, Q_x, Q_y, Q_z, t_x, t_y, t_z уравнений. Разрешив их, снова приходим к п.д.-системе относительно семи неизвестных функций, для которой имеют место теоремы, аналогичные теоремам п. 2.1 и 2.2, с девятью явными условиями совместности, совершенно отличающимися от (15).

Литература

1. *Goursat E.* Leçonq sur l'intéqration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. – Paris, 1921. – 454 p.

2. *Михайлов Л.Г.* Некоторые переопределенные системы уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями. – Душанбе: Дониш, 1986. – 116 с.

3. *Пиров Р.* Исследование некоторых нелинейных систем уравнений в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией на плоскости // Крайові задачі для диференціалних рівнянь. – Чернівці: Прут, 2006. – Вып. 14. – С. 313–320.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Ильюшин А.А.* Пластичность. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 479 с.
6. *Бровко Г.Л.* Необходимые и достаточные условия однородно-простой деформации // Прикл. матем. и механика. – 1978. – Т. 42. – С. 701–710.
7. *Ленская С.Э.* О неоднородно-простых процессах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем., механика. – 1988. – № 1. – С. 100–103.
8. *Пиров Р.* Об одной переопределенной системе уравнений в частных производных второго порядка. – Душанбе, 1989. – 15 с. – Деп. в Тадж. НИИНТИ 19.06.89. № 22(622).
9. *Пиров Р.* Об условиях совместности и многообразиях решения одного класса нелинейных переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка в пространстве // Вест. Ин-та предпринимательства и сервиса. – Душанбе, 2010 – № 20. – С. 89–95.
10. *Пиров Р.* О совместности некоторых переопределенных систем уравнений в частных производных второго порядка с двумя неизвестными функциями // Докл. АН Респ. Тадж. – 2011. – Т. 54, № 5. – С. 359–366.

Поступила в редакцию
20.01.16

Пиров Рахмон, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа

Таджикский государственный педагогический университет имени С. Айни
пр. Рудаки, д. 121, г. Душанбе, 733740, Республика Таджикистан
E-mail: *pirov_60@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 4, pp. 544–556

On Some Overdetermined Systems of Three Differential Equations in Second-Order Partial Derivatives

R. Pirov

S. Aini Tajik State Pedagogical University, Dushanbe, 733740 Republic of Tadzhikistan
E-mail: *pirov_60@mail.ru*

Received January 20, 2016

Abstract

This paper considers carefully a linear system of differential equations in partial derivatives from the deformable solid body mechanics and a class of systems of three equations including three second-order derivatives of one unknown function on the right-hand side in a non-linear manner. Using replacement of the first and second orders in the right parts with new unknown functions, transition to systems with a larger number of unknown functions has been performed and links with systems in total differentials have been established. For the studied overdetermined systems, the explicit compatibility conditions have been found and the variety of solutions containing not more than seven arbitrary constants have been determined. The obtained results, though mainly theoretical, can be used for further development of the theory of systems of differential equations with partial derivatives to solve specific problems of hydrodynamics (i.e., for construction of exact ("test") solutions of the plane problems of hydrodynamics), gas dynamics, theory of elasticity, as well as a number of branches of mechanics, physics, and other basic sciences.

Keywords: compatibility conditions, variety of solutions, overdetermined systems

References

1. Goursat E. Leçonq sur l'intéqration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris, 1921. 454 p. (In French)
2. Mikhailov L.G. Some Overdetermined Systems of Partial Differential Equations with Two Unknown Functions. Dushanbe, Donish, 1986. 116 p. (In Russian)
3. Pirov R. The study of certain nonlinear systems of second-order partial differential equations with one unknown function on the plane. *Kraiovy Zadachi Difer. Rivnyan'*. Chernivtsi, Prut, 2006, vol. 14, pp. 313–320. (In Russian)
4. Hartman. F. Ordinary Differential Equations. Moscow, Mir, 1970. 720 p. (In Russian)
5. Il'yushin G.L. Plasticity. Moscow, GITTL, 1948. 479 p. (In Russian)
6. Brovko G.L. The necessary and sufficient conditions for simple uniform - deformation. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1978, vol. 42, pp. 701–710. (In Russian)
7. Lenskaya S.E. On inhomogeneously simple processes. *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1: Mat., Mekh.*, 1988, no. 1, pp. 100–103. (In Russian)
8. Pirov R. On an Overdetermined System of Second-Order Partial Differential Equations. Dushanbe, 1989. 15 p. Dep. Tadzh. NIINTI: June 19, 1989, no. 22 (622). (In Russian)
9. Pirov R. On the compatibility conditions and manifold solutions for one class of nonlinear overdetermined systems of differential equations in second-order partial derivatives in space. *Vestn. Inst. Predprinimatel'stva Servisa*, Dushanbe, 2010, no. 20, pp. 89–95. (In Russian)
10. Pirov R. On the compatibility of some overdetermined systems of equations in second-order partial derivatives with two unknown functions. *Dokl. Akad. Nauk Resp. Tadzh.*, 2011, vol. 54, no. 5, pp. 359–366. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Пиров Р.* О некоторых переопределенных системах дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 544–556. ⟩

⟨ ***For citation*:** Pirov R. On some overdetermined systems of three differential equations in second-order partial derivatives. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 544–556. (In Russian) ⟩