ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 6 (529)

УДК 517.968:519.642

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, И.Н. ТИХОНОВ

КВАДРАТУРНО-КУБАТУРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

В этой статье, являющейся естественным продолжением работ [1]–[5], исследуется квадратурно-кубатурный метод решения многомерного нелинейного сингулярного интегрального уравнения с частными интегральными операторами

$$Ax \equiv \lambda F(s,\sigma;x(s,\sigma)) + \mu\Phi(s,\sigma;x(s,\sigma),S_1x,S_2x,S_{12}x) = y(s,\sigma), \tag{1}$$

где сингулярные интегралы

$$S_1x = S_1(x;s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\xi,\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\,d\xi, \qquad -\infty<s<\infty, \tag{2}$$

$$S_2x = S_2(x;s,\sigma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(s,\eta)\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\,d\eta, \qquad -\infty<\sigma<\infty, \tag{3}$$

$$S_{12}x = S_{12}(x;s,\sigma) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\xi,\eta)\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}\,d\xi\,d\eta, \quad -\infty<s,\sigma<\infty, \tag{4}$$

понимаются в смысле главного значения по Коши–Лебегу [6]. Здесь λ и μ — произвольные вещественные параметры; $F(s,\sigma;u)$ и $\Phi(s,\sigma;u,v,w,\omega)$ – известные вещественные непрерывные функции своих аргументов, 2π-периодические по переменным s и σ; $y(s,\sigma)$ и $x(s,\sigma)\in L_2(0,2\pi;0,2\pi)$ — соответственно данная и искомая функции.

Сначала установим существование и единственность решения. Пусть функции $F(s,\sigma;u)$ и $\Phi(s,\sigma;u,v,w,\omega)$ и параметры λ и μ удовлетворяют условиям

(А) $|F(s,\sigma;u)-F(s,\sigma;v)| \le M_1|u-v|$ для любых $s,\sigma,u,v\in\mathbb{R}$ и некоторой постоянной $M_1\in\mathbb{R}^+$;

(Б) $\lambda[F(s,\sigma;u)-F(s,\sigma;v)](u-v)\ge\lambda m_1|u-v|^2$ для любых $s,\sigma,u,v\in\mathbb{R}$ и некоторой $m_1\in\mathbb{R}$;

(В) $|\Phi(s,\sigma;u,v,w,\omega)-\Phi(s,\sigma;u_1,v_1,w_1,\omega_1)|\le M_2|u-u_1|+M_3|v-v_1|+M_4|w-w_1|+M_5|\omega-\omega_1|$ для любых $s,\sigma,u,v,w,\omega,u_1,v_1,w_1,\omega_1\in\mathbb{R}$ и некоторых $M_2,M_3,M_4,M_5\in\mathbb{R}^+$;

(Г) $\mu[\Phi(s,\sigma;u,v,w,\omega)-\Phi(s,\sigma;u_1,v,w,\omega)](u-u_1)\ge\mu m_2|u-u_1|^2$ для любых $s,\sigma,u,v,w,\omega,u_1\in\mathbb{R}$ и некоторой $m_2\in\mathbb{R}$.

Кроме того, без ограничения общности можно считать

(Д) $\lambda F(s,\sigma;0)+\mu\Phi(s,\sigma;0,0,0,0)=0$.

Пусть $L_2=L_2(0,2\pi;0,2\pi)$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых по Лебегу функций от двух переменных, 2π-периодических по каждой из переменных, со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\varphi,\psi)=(\varphi,\psi)_{L_2}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(s,\sigma)\psi(s,\sigma)ds d\sigma \quad (\varphi,\psi\in L_2),$$

$$\|\varphi\|=\|\varphi\|_{L_2}=\left\{\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(s,\sigma)|^2 ds d\sigma\right\}^{1/2} \quad (\varphi\in L_2).$$

Через $C_{2\pi} = C_{2\pi}(0, 2\pi; 0, 2\pi)$ обозначается пространство непрерывных 2π-периодических функций с обычным определением нормы.

Лемма. *Пусть выполнены условия* (А)–(Д)*, где*

$$M_0 \equiv |\lambda| M_1 + |\mu|(M_2 + M_3 + M_4 + M_5) < \infty,$$
$$m_0 \equiv \lambda m_1 + \mu m_2 - |\mu|(M_3 + M_4 + M_5) > 0.$$

Тогда уравнение (1)–(4) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2$ *при любой правой части* $y \in L_2$*, причем*

$$\frac{1}{M_0}\|y\| \le \|x^*\| \le \frac{1}{m_0}\|y\|.$$

Доказательство ведется по схеме доказательства теоремы 1 [4]. Сначала в силу условий (А), (В) и линейности операторов S_i $(i = 1, 2, 12)$ для любых $s, \sigma \in \mathbb{R}$ и $x, z \in L_2$ находим

$$|A(x; s, \sigma) - A(z; s, \sigma)| \le |\lambda| M_1 |x - z| + |\mu| M_2 |x - z| + \\ + |\mu|[M_3|S_1(x - z)| + M_4|S_2(x - z)| + M_5|S_{12}(x - z)|], \quad (5)$$

откуда в силу известных соотношений (напр., [7], [8])

$$\|S_i\| = 1, \quad S_i : L_2 \to L_2 \quad (i = 1, 2, 12), \qquad (6)$$

для любых $x, z \in L_2$ получаем оценку

$$\|Ax - Az\| \le M_0\|x - z\| \quad (x, z \in L_2). \qquad (7)$$

Далее для любых $s, \sigma \in \mathbb{R}$ и $x, z \in L_2$ с помощью условий (Б), (В) и (Г) находим неравенство

$$(Ax - Az)(x - z) \ge \lambda m_1|x - z|^2 + \mu m_2|x - z|^2 - |\mu|[M_3|S_1(x - z)| + M_4|S_2(x - z)| + M_5|S_{12}(x - z)|],$$

откуда с учетом (6) получаем оценку

$$(Ax - Az, x - z) \ge m_0\|x - z\|^2 \quad (x, z \in L_2). \qquad (8)$$

В силу неравенств (7) и (8) из соответствующих результатов [9] выводим утверждение леммы.

Заметим, что на основе этой леммы с помощью известных результатов ([9], сс. 104, 131; [10], с. 213–214) могут быть построены итеративные, проекционные и смешанные методы решения уравнения (1)–(4). Поскольку это может быть сделано по аналогии с одномерным случаем [4], то на этом подробно останавливаться не будем, а более детально рассмотрим квадратурно-кубатурный метод, который является наиболее простым для применения на практике и в то же время наиболее трудным для теоретического обоснования. При этом существенным образом будем пользоваться результатами (и обозначениями) по многомерному интерполированию тригонометрическими полиномами из работ [1], [2], [5], [7], [8].

Сначала приведем вычислительные схемы квадратурно-кубатурного метода, устанавливаемые на основе работ [1]–[5], [7], [8]. Введем равномерные сетки узлов

$$s_i = \frac{2i\pi}{N}, \quad i = \overline{1, N}; \quad \sigma_j = \frac{2j\pi}{M}, \quad j = \overline{1, M} \quad (N, M \in \mathbb{N}), \qquad (9)$$

и приближенное решение уравнения (1)–(4) с непрерывными коэффициентами и непрерывной правой частью будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_{nm}(s, \sigma) = \frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\alpha_{kr}\Delta_n(s - s_k)\Delta_m(\sigma - \sigma_r), \quad n = [\tfrac{N}{2}], \quad m = [\tfrac{M}{2}], \qquad (10)$$

$\Delta_r(\varphi)$ — обычное или модифицированное ядро Дирихле порядка $r = [R/2]$ при R нечетном и соответственно при R четном, где $r+1 \in \mathbb{N}$. Приближенные значения $\alpha_{ij} = x_{nm}(s_i, \sigma_j)$ искомой функции $x^*(s,\sigma)$ в узлах (9) будем определять как решение следующей системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ):

$$\lambda F(s_i,\sigma_j;\alpha_{ij}) + \mu\Phi\Bigl(s_i,\sigma_j;\alpha_{ij}, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\alpha_{kj}, \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\alpha_{ir},$$
$$\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\alpha_{kr}\Bigr) = y(s_i,\sigma_j), \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{1,M}, \quad (11)$$

где

$$\beta_{i-k}(R) = \Bigl\{\operatorname{tg}\frac{i-k}{2R}\pi, \quad \text{если} \quad i-k \quad \text{четно}; \quad -\operatorname{ctg}\frac{i-k}{2R}\pi, \quad \text{если} \quad i-k \quad \text{нечетно}\Bigr\}$$

при $R = 2l+1$ $(l = 0,1,\dots)$, а при $R = 2l$ $(l = 1,2,\dots)$

$$\beta_{i-k}(R) = \Bigl\{0, \quad \text{если} \quad i-k \quad \text{четно}; \quad -2\operatorname{ctg}\frac{i-k}{R}\pi, \quad \text{если} \quad i-k \quad \text{нечетно}\Bigr\}.$$

Для вычислительной схемы (1)–(4), (9)–(11) справедлива

Теорема 1. *Если $y \in C_{2\pi}$, то в условиях леммы СНАУ* (11) *имеет единственное решение $\alpha^*_{11},\dots,\alpha^*_{NM} \in \mathbb{R}$ при любых $N, M \in \mathbb{N}$, а приближенное решение*

$$x^*_{nm}(s,\sigma) = \frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\alpha^*_{kr}\Delta_n(s-s_k)\Delta_m(\sigma-\sigma_r), \quad n,m \in \mathbb{N}, \quad (10^*)$$

удовлетворяет неравенствам

$$\|x^*_{nm}(s,\sigma)\| \le \Bigl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\alpha^*_{ij}|^2\Bigr\}^{1/2} \le \frac{1}{m_0}\Bigl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|y(s_i,\sigma_j)|^2\Bigr\}^{1/2} \quad (N,M \in \mathbb{N}), \quad (12)$$

$$\frac{1}{M_0}\|\mathcal{L}_{nm}(y;s,\sigma)\| \le \|x^*_{nm}(s,\sigma)\| \le \frac{1}{m_0}\|\mathcal{L}_{nm}(y;s,\sigma)\| \quad (N,M \in \mathbb{N}). \quad (12')$$

Доказательство. Обозначим через X_{nm} множество всех двойных тригонометрических полиномов порядка (n,m), а через $\mathcal{L}_{nm} = \mathcal{L}^{s\sigma}_{nm} : L_2 \to X_{nm} \subset L_2$ — оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\varphi \in C_{2\pi}$ ее двумерный тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа вида

$$\mathcal{L}_{nm}(\varphi;s,\sigma) = \frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\varphi(s_k,\sigma_r)\Delta_n(s-s_k)\Delta_m(\sigma-\sigma_r) \quad (13)$$

по узлам (9). Если один из параметров N, M четный (или же они оба четные), то существует однопараметрическое (соответственно двупараметрическое) множество интерполяционных полиномов. Из этого множества выбирается (согласно [7], [8]; [11], гл. 3) полином с минимальной нормой в L_2. Тогда [5], [7], [8] СНАУ (11) эквивалентна операторному уравнению

$$A_{nm}x_{nm} \equiv \mathcal{L}_{nm}\{\lambda F(s,\sigma;x_{nm}) + \mu\Phi(s,\sigma;x_{nm},S_1x_{nm},S_2x_{nm},S_{12}x_{nm})\} = \mathcal{L}_{nm}y \quad (x_{nm},\mathcal{L}_{nm}y \in X_{nm}), \quad (14)$$

аппроксимирующему уравнение (1) в подпространстве $X_{nm} \subset L_2$.

Пусть $\overline{X}$ — пространство NM-мерных векторов с нормой

$$\|\overline{x}\|_{\overline{X}} = \Bigl\{\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}|a_{kr}|^2\Bigr\}^{1/2}, \quad \overline{x} = \{a_{kr}\}_{1\ 1}^{N\,M} \in \overline{X} \quad (N,M \in \mathbb{N}),$$

и со скалярным произведением

$$(\overline{x},\overline{z})_{\overline{X}}=\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}a_{kr}b_{kr}\quad(\overline{x}=\{a_{kr}\}_{1\ 1}^{N\ M}\in\overline{X},\ \ \overline{z}=\{b_{kr}\}_{1\ 1}^{N\ M}\in\overline{X}).$$

Тогда СНАУ (11) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$\overline{A}\overline{x}=\overline{y}\quad(\overline{x},\overline{y}\in\overline{X}),\tag{15}$$

где $\overline{x}=\{\alpha_{ij}\}_{1\ 1}^{N\ M}$, $\overline{y}=\{y(s_i,\sigma_j)\}_{1\ 1}^{N\ M}$, $\overline{A}\overline{x}=\overline{\eta}=\{\eta_{ij}\}_{1\ 1}^{N\ M}$, а

$$\eta_{ij}=\lambda F(s_i,\sigma_j;\alpha_{ij})+\mu\Phi\Big(s_i,\sigma_j;\alpha_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\alpha_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\alpha_{ir},$$
$$\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\alpha_{kr}\Big),\quad i=\overline{1,N},\quad j=\overline{1,M}.\tag{16}$$

Покажем, что для любых $\overline{x}=\{a_{kr}\}_{1\ 1}^{N\ M}$ и $\overline{z}=\{b_{kr}\}_{1\ 1}^{N\ M}$ матричный оператор $\overline{A}:\overline{X}\to\overline{X}$ удовлетворяет неравенствам

$$\|\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z}\|_{\overline{X}}\le M_0\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}},\tag{17}$$
$$(\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z},\overline{x}-\overline{z})_{\overline{X}}\ge m_0\|\overline{x}-\overline{z}\|^2_{\overline{X}},\tag{18}$$

где постоянные M_0 и m_0 приведены в лемме, а скалярное произведение и норма определены в пространстве $\overline{X}$.

Из (15), (16) для любых $\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}$ находим

$$\|\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z}\|_{\overline{X}}\le|\lambda|\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|F(s_i,\sigma_j;a_{ij})-F(s_i,\sigma_j;b_{ij})|^2\Big\}^{1/2}+|\mu|\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\cdot|^2\Big\}^{1/2},$$

где

$$|\cdot|=\Big|\Phi\Big(s_i,\sigma_j;a_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)a_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)a_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)a_{kr}\Big)-$$
$$-\Phi\Big(s_i,\sigma_j;b_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)b_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)b_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)b_{kr}\Big)\Big|;$$

отсюда с учетом условий (A) и (B) для любых $\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}$ получаем

$$\|\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z}\|_{\overline{X}}\le|\lambda|M_1\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2\Big\}^{1/2}+|\mu|M_2\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2\Big\}^{1/2}+$$
$$+|\mu|M_3\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Big|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)(a_{kj}-b_{kj})\Big|^2\Big\}^{1/2}+$$
$$+|\mu|M_4\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Big|\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)(a_{ir}-b_{ir})\Big|^2\Big\}^{1/2}+$$
$$+|\mu|M_5\Big\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\Big|\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)(a_{kr}-b_{kr})\Big|^2\Big\}^{1/2}=$$
$$=(|\lambda|M_1+|\mu|M_2)\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}+|\mu|M_3\tau_1+|\mu|M_4\tau_2+|\mu|M_5\tau_{12}.\tag{19}$$

Здесь смысл обозначений τ_i $(i=1,2,12)$ очевиден, оценим их сверху.

Положим $\psi(s,\sigma)=x_{nm}(s,\sigma)-z_{nm}(s,\sigma)$, где

$$x_{nm}(s,\sigma)=\frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}a_{kr}\Delta_n(s-s_k)\Delta_m(\sigma-\sigma_r),\quad a_{kr}=x_{nm}(s_k,\sigma_r),$$

$$z_{nm}(s,\sigma)=\frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}b_{kr}\Delta_n(s-s_k)\Delta_m(\sigma-\sigma_r),\quad b_{kr}=z_{nm}(s_k,\sigma_r).$$

Известно ([7], [8]; [11], гл. 3), что для любой функции $\varphi\in C_{2\pi}$

$$S_1(\mathcal{L}_n^{\xi}\varphi;s_i,\sigma_j)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\varphi(s_k,\sigma_j),\tag{20}$$

$$S_2(\mathcal{L}_m^{\eta}\varphi;s_i,\sigma_j)=\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\varphi(s_i,\sigma_r),\tag{21}$$

$$S_{12}(\mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}\varphi;s_i,\sigma_j)=\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\varphi(s_k,\sigma_r).\tag{22}$$

Отметим также (напр., [7], [8]; [11], гл. 3), что для любой функции $\varphi\in C_{2\pi}$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|S_1\mathcal{L}_n^{\xi}\varphi(s_i,t)|^2\le\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|\varphi(s_i,t)|^2,\quad -\infty<t<\infty,\tag{23}$$

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}|S_2\mathcal{L}_m^{\eta}\varphi(t,\sigma_j)|^2\le\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}|\varphi(t,\sigma_j)|^2,\quad -\infty<t<\infty,\tag{24}$$

где операторы S_1 и S_2 определены в (2) и (3) соответственно. Из (22)–(24) находим

$$\begin{aligned}\tau_{12}&=\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\psi(s_k,\sigma_r)\right|^2\right\}^{1/2}=\\&=\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|S_{12}\mathcal{L}_{nm}^{\xi\eta}\psi(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}=\left\{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|S_1\mathcal{L}_n^{\xi}S_2\mathcal{L}_m^{\eta}\psi(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}\le\\&\le\left\{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|S_2\mathcal{L}_m^{\eta}\psi(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}=\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}|S_2\mathcal{L}_m^{\eta}\psi(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}\le\\&\le\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\psi(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}=\|\overline{\psi}\|_{\overline{X}}=\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}.\end{aligned}\tag{25}$$

Аналогично, используя (20), (21) и (23), (24), получаем

$$\tau_1=\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\psi(s_k,\sigma_j)\right|^2\right\}^{1/2}\le\|\overline{\psi}\|_{\overline{X}}=\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}},\tag{26}$$

$$\tau_2=\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\psi(s_i,\sigma_r)\right|^2\right\}^{1/2}\le\|\overline{\psi}\|_{\overline{X}}=\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}.\tag{27}$$

Из (19), (25)–(27) для любых $\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}$ следует неравенство (17).

Далее для любых $\overline{x}=\{a_{kr}\}_{1\ 1}^{N\,M}$ и $\overline{z}=\{b_{kr}\}_{1\ 1}^{N\,M}\in\overline{X}$ из (15), (16) находим

$$(\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z},\overline{x}-\overline{z})_{\overline{X}}=\frac{\lambda}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[F(s_i,\sigma_j;a_{ij})-F(s_i,\sigma_j;b_{ij})](a_{ij}-b_{ij})+$$
$$+\frac{\mu}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}(a_{ij}-b_{ij})(A_{ij}+B_{ij})=\lambda\Sigma_1+\mu\Sigma_2+\mu\Sigma_3,$$

где

$$A_{ij}=\Phi\biggl(s_i,\sigma_j;a_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)a_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)a_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)a_{kr}\biggr)-$$
$$-\Phi\biggl(s_i,\sigma_j;b_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)a_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)a_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)a_{kr}\biggr),$$

$$B_{ij}=\Phi\biggl(s_i,\sigma_j;b_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)a_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)a_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)a_{kr}\biggr)-$$
$$-\Phi\biggl(s_i,\sigma_j;b_{ij},\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)b_{kj},\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)b_{ir},\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)b_{kr}\biggr),\quad(28)$$

и смысл сумм Σ_i $(i=\overline{1,3})$ очевиден. Оценим Σ_1 и Σ_2 снизу, а Σ_3 — сверху.

В силу условия (Б)

$$\lambda\Sigma_1\geq\frac{\lambda m_1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2=\lambda m_1\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}^2\quad(\overline{x},\overline{z}\in\overline{X});\quad(29)$$

аналогично, в силу условия (Г)

$$\mu\Sigma_2\geq\frac{\mu m_2}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2=\mu m_2\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}^2\quad(\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}).\quad(30)$$

Из (28)–(30) получаем неравенство

$$(\overline{A}\overline{x}-\overline{A}\overline{z},\overline{x}-\overline{z})_{\overline{X}}\geq(\lambda m_1+\mu m_2)\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}^2-|\mu|\,|\Sigma_3|,\quad\overline{x},\overline{z}\in\overline{X},\quad(31)$$

где в силу условия (В) находим

$$|\Sigma_3|\leq\biggl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|a_{ij}-b_{ij}|^2\biggr\}^{1/2}\biggl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|B_{ij}|^2\biggr\}^{1/2}\leq$$
$$\leq\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}\biggl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\biggl(M_3\biggl|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)a_{kj}-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)b_{kj}\biggr|+$$
$$+M_4\biggl|\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)a_{ir}-\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)b_{ir}\biggr|+$$
$$+M_5\biggl|\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)a_{kr}-\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)b_{kr}\biggr|\biggr)^2\biggr\}^{1/2}\leq$$
$$\leq\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}\biggl\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\biggl[\biggl(M_3\biggl|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\psi(s_k,\sigma_j)\biggr|\biggr)^2+\biggl(M_4\biggl|\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\psi(s_i,\sigma_r)\biggr|\biggr)^2+$$

$$+\left(M_5\left|\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\psi(s_k,\sigma_r)\right|\right)^2\Bigg]\Bigg\}^{1/2}\leq$$

$$\leq\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}\Bigg\{M_3\left(\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\psi(s_k,\sigma_j)\right|^2\right)^{1/2}+$$

$$+M_4\left(\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\psi(s_i,\sigma_r)\right|^2\right)^{1/2}+$$

$$+M_5\left(\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\left|\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\psi(s_k,\sigma_r)\right|^2\right)^{1/2}\Bigg\}=$$

$$=\|\overline{x}-\overline{z}\|_{\overline{X}}(M_3\tau_1+M_4\tau_2+M_5\tau_{12}).$$

Отсюда и из соотношений (25)–(27) следует

$$\left|\Sigma_3\right|\leq(M_3+M_4+M_5)\|\overline{x}-\overline{z}\|^2_{\overline{X}}\quad(\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}).\tag{32}$$

Из (31) и (32) для любых $\overline{x},\overline{z}\in\overline{X}$ находим неравенство (18).

Таким образом, в силу (17) и (18) матричный оператор $\overline{A}$ в пространстве $\overline{X}$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной M_0 и является сильно монотонным с постоянной m_0. Поэтому из теории монотонных операторов [9] следует, что уравнение (15) однозначно разрешимо; СНАУ (11), эквивалентная уравнению (15), также имеет единственное решение $\overline{x}^*=\{\alpha^*_{kr}\}_1^N{}_1^M$ и для него справедливы соотношения

$$\|\overline{x}^*\|_{\overline{X}}=\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|\alpha^*_{ij}|^2\right\}^{1/2}\leq\frac{1}{m_0}\left\{\frac{1}{NM}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}|y(s_i,\sigma_j)|^2\right\}^{1/2}.\tag{33}$$

Для любого тригонометрического полинома $\phi_{nm}(s,\sigma)$ вида (10) известно ([7], [8]; [11], гл. 3), что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi_{nm}(s,\sigma)|^2ds\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}|\phi_{nm}(s_k,\sigma)|^2,\quad-\infty<\sigma<\infty,\tag{34}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi_{nm}(s,\sigma)|^2d\sigma\leq\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}|\phi_{nm}(s,\sigma_r)|^2,\quad-\infty<s<\infty.\tag{35}$$

Из (10^*), (34), (35) находим

$$\|x^*_{nm}\|^2_{L_2}=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|x^*_{nm}(s,\sigma)|^2dsd\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x^*_{nm}(s,\sigma)|^2ds\leq$$

$$\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|x^*_{nm}(s_k,\sigma)|^2d\sigma\leq\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}|x^*_{nm}(s_k,\sigma_r)|^2=\|\overline{x}^*_{nm}\|^2_{\overline{X}}=\|\overline{x}^*\|^2_{\overline{X}}.\tag{36}$$

Из (33) и (36) следуют оценки (12).

Поскольку операторные уравнения (14) и (15) эквивалентны, то из сказанного выше следует существование обратного оператора $A^{-1}_{nm}:X_{nm}\to X_{nm}$ и $\|A^{-1}_{nm}\|\leq m_0^{-1}$ $(n,m\in\mathbb{N})$; можно показать также, что для него справедливо неравенство $\|A^{-1}_{nm}\|\geq M_0^{-1}$ $(n,m\in\mathbb{N})$. Из последних двух неравенств выводятся оценки ($12'$). □

Теорема 2. *Пусть непрерывные функции $F(s,\sigma;u)$, $\Phi(s,\sigma;u,v,w,\omega)$ и $y(s,\sigma)$ таковы, что в условиях леммы решение $x^*\in C_{2\pi}$ и функции $S_k(x^*;s,\sigma)\in C_{2\pi}$ $(k=1,2,12)$. Тогда метод*

(9)–(11) *сходится в пространстве* L_2, *причем для любых* $n,m\in\mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$\|x^*-x^*_{nm}\|\le\|x^*-\widetilde{x}_{nm}\|+m_0^{-1}[(|\lambda|M_1+|\mu|M_2)\|\mathcal{L}_{nm}x^*-\widetilde{x}_{nm}\|+|\mu|M_3\|\mathcal{L}_{nm}S_1(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|+$$
$$+|\mu|M_4\|\mathcal{L}_{nm}S_2(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|+|\mu|M_5\|\mathcal{L}_{nm}S_{12}(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|],\quad(37)$$

где $\widetilde{x}_{nm}$ — *произвольный элемент из подпространства* X_{nm}, *а* $\mathcal{L}_{nm}=\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}$ — *определенный в* (13) *оператор Лагранжа.*

Следствие 1. В условиях теоремы погрешность приближенной формулы $x^*(s,\sigma)\approx x^*_{nm}(s,\sigma)$ для любых N и $M\in\mathbb{N}$ может быть оценена неравенством

$$\|x^*-x^*_{nm}\|\le 2E_{n_1m_1}(x^*)_{C_{2\pi}}+m_0^{-1}[|\mu|M_3\|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_1(x^*-\mathcal{L}^{\xi\sigma}_{nm}x^*)\|+$$
$$+|\mu|M_4\|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_2(x^*-\mathcal{L}^{s\eta}_{nm}x^*)\|+|\mu|M_5\|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_{12}(x^*-\mathcal{L}^{\xi\eta}_{nm}x^*)\|],\quad(38)$$

где $n_1=\left[\frac{N-1}{2}\right]$, $m_1=\left[\frac{M-1}{2}\right]$, $N,M\in\mathbb{N}$, а $E_{nm}(\varphi)_{C_{2\pi}}$ — наилучшее равномерное приближение функции $\varphi\in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше (n,m).

Следствие 2. Пусть коэффициенты уравнения (1)–(4) таковы, что его решение $x^*(s,\sigma)\in H^{r+\alpha,\,l+\beta}$ $(r+1,l+1\in\mathbb{N};\ 0<\alpha,\beta\le 1)$. Тогда рассматриваемый метод сходится в среднем со скоростью

$$\|x^*-x^*_{nm}\|=O(N^{-r-\alpha}+M^{-l-\beta}).\quad(39)$$

Доказательство. Справедливо неравенство

$$\|x^*-x^*_{nm}\|\le\|x^*-\widetilde{x}_{nm}\|+\|x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm}\|,\quad(40)$$

где $\widetilde{x}_{nm}$ — произвольный элемент из подпространства X_{nm}. Так как $x^*_{nm},\widetilde{x}_{nm}\in X_{nm}$, то для слагаемого $\|x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm}\|$ в силу неравенства (18) имеем оценки

$$m_0\|x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm}\|^2\le(A_{nm}x^*_{nm}-A_{nm}\widetilde{x}_{nm},x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm})\le\|\mathcal{L}_{nm}Ax^*_{nm}-\mathcal{L}_{nm}A\widetilde{x}_{nm}\|\|x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm}\|.\quad(41)$$

Поскольку $\mathcal{L}_{nm}Ax^*_{nm}=\mathcal{L}_{nm}y=\mathcal{L}_{nm}Ax^*$, то из соотношений (41) получаем

$$\|x^*_{nm}-\widetilde{x}_{nm}\|\le m_0^{-1}\|\mathcal{L}_{nm}Ax^*-\mathcal{L}_{nm}A\widetilde{x}_{nm}\|.\quad(42)$$

Из формул (1)–(4) с учетом свойств оператора Лагранжа $\mathcal{L}_{nm}$ находим

$$\mathcal{L}_{nm}Ax^*=\lambda\mathcal{L}_{nm}F(s,\sigma;\mathcal{L}_{nm}x^*(s,\sigma))+\mu\mathcal{L}_{nm}\Phi(s,\sigma;\mathcal{L}_{nm}x^*(s,\sigma),\mathcal{L}_{nm}S_1x^*,\mathcal{L}_{nm}S_2x^*,\mathcal{L}_{nm}S_{12}x^*),$$
$$\mathcal{L}_{nm}A\widetilde{x}_{nm}=\lambda\mathcal{L}_{nm}F(s,\sigma;\widetilde{x}_{nm}(s,\sigma))+\mu\mathcal{L}_{nm}\Phi(s,\sigma;\widetilde{x}_{nm}(s,\sigma),S_1\widetilde{x}_{nm},S_2\widetilde{x}_{nm},S_{12}\widetilde{x}_{nm}),$$

где $S_i\varphi=S_i(\varphi;s,\sigma)$ $(i=1,2,12)$ для любой $\varphi\in C_{2\pi}$. Отсюда с учетом (5), (7) находим

$$\|\mathcal{L}_{nm}Ax^*-\mathcal{L}_{nm}A\widetilde{x}_{nm}\|\le(|\lambda|M_1+|\mu|M_2)\|\mathcal{L}_{nm}(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|+|\mu|M_3\|\mathcal{L}_{nm}S_1(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|+$$
$$+|\mu|M_4\|\mathcal{L}_{nm}S_2(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|+|\mu|M_5\|\mathcal{L}_{nm}S_{12}(x^*-\widetilde{x}_{nm})\|.\quad(43)$$

Из соотношений (40)–(43) следует оценка (37).

Для завершения доказательства теоремы в неравенстве (37) положим $\widetilde{x}_{nm}=F_{nm}x^*$, где $F_{nm}(x^*;s,\sigma)$ — прямоугольная сумма Фейера порядка (n_1,m_1) для функции $x^*(s,\sigma)\in C_{2\pi}$. Тогда, учитывая известное [7] соотношение $\|\mathcal{L}_{nm}\|_{C_{2\pi}\to L_2}=1$ $(n,m\in\mathbb{N})$, получаем

$$\|x^*-x^*_{nm}\|\le\|x^*-F_{nm}x^*\|+m_0^{-1}[(|\lambda|M_1+|\mu|M_2)\|\mathcal{L}_{nm}x^*-F_{nm}x^*\|+$$
$$+|\mu|M_3\|S_1(x^*-F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}}+|\mu|M_4\|S_2(x^*-F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}}+|\mu|M_5\|S_{12}(x^*-F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}}].\quad(44)$$

Ясно, что $F_{nm}x^*=\mathcal{L}_{nm}F_{nm}x^*$, поэтому

$$\|\mathcal{L}_{nm}x^*-F_{nm}x^*\|\le\|\mathcal{L}_{nm}\|_{C_{2\pi}\to L_2}\|x^*-F_{nm}x^*\|_{C_{2\pi}}=\|x^*-F_{nm}x^*\|_{C_{2\pi}}.\quad(45)$$

Из соотношений (44), (45) находим оценку

$$\|x^* - x^*_{nm}\| \le [1 + m_0^{-1}(|\lambda| M_1 + |\mu| M_2)] \|x^* - F_{nm}x^*\|_{C_{2\pi}} + m_0^{-1}|\mu|[M_3\|S_1(x^* - F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}} + \\ + M_4\|S_2(x^* - F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}} + M_5\|S_{12}(x^* - F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}}]. \quad (46)$$

Покажем, что нормы $\|x^* - F_{nm}x^*\|_{C_{2\pi}}$ и $\|S_k(x^* - F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}}$ $(k = 1, 2, 12)$ из правой части неравенства (46) стремятся к нулю. Для любой непрерывной 2π-периодической функции $g(s,\sigma)$ сумма Фейера $F_{nm}(g; s,\sigma)$ сходится равномерно к $g(s,\sigma)$, поэтому

$$\|x^* - F_{nm}x^*\|_{C_{2\pi}} \to 0 \quad (n, m \to \infty). \quad (47)$$

Поскольку оператор Фейера перестановочен с любым из операторов S_k $(k = 1, 2, 12)$, то для остальных слагаемых находим

$$\|S_k(x^* - F_{nm}x^*)\|_{C_{2\pi}} \le \|S_kx^* - F_{nm}S_kx^*\|_{C_{2\pi}} = \|g_k - F_{nm}g_k\|_{C_{2\pi}} \to 0 \quad (n, m \to \infty), \quad (48)$$

где $g_k(s,\sigma) = S_k(x^*; s,\sigma) \in C_{2\pi}$. В силу предельных соотношений (47), (48) из неравенства (46) получаем $\|x^* - x^*_{nm}\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. □

Полагая $\widetilde{x}_{nm} = \mathcal{L}_{nm}x^*$ в неравенстве (37), имеем

$$\|x^* - x^*_{nm}\| \le \|x^* - \mathcal{L}_{nm}x^*\| + m_0^{-1}[|\mu| M_3 \|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_1(x^* - \mathcal{L}^{\xi\sigma}_{nm}x^*)\| + \\ + |\mu| M_4 \|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_1(x^* - \mathcal{L}^{s\eta}_{nm}x^*)\| + |\mu| M_5 \|\mathcal{L}^{s\sigma}_{nm}S_{12}(x^* - \mathcal{L}^{\xi\eta}_{nm}x^*)\|]. \quad (49)$$

Пусть $Q_{n_1m_1}$ — тригонометрический полином наилучшего равномерного приближения функции $x^* \in C_{2\pi}$ порядка не выше (n_1, m_1), тогда, учитывая равенство $Q_{n_1m_1} = \mathcal{L}_{nm}Q_{n_1m_1}$, находим

$$\|x^* - \mathcal{L}_{nm}x^*\| \le \|x^* - Q_{n_1m_1}\| + \|\mathcal{L}_{nm}x^* - Q_{n_1m_1}\| \le \\ \le \|x^* - Q_{n_1m_1}\|_{C_{2\pi}} + \|\mathcal{L}_{nm}\|_{C_{2\pi}\to L_2}\|x^* - Q_{n_1m_1}\|_{C_{2\pi}} = 2E_{n_1m_1}(x^*)_{C_{2\pi}}. \quad (50)$$

Из соотношений (49) и (50) получаем оценку (38).

Для доказательства оценки (39) в неравенстве (44) за F_{nm} достаточно принять оператор Валле-Пуссена порядка (n, m) или же операторы обобщенного суммирования рядов Фурье с помощью так называемых λ-матриц, в том числе матриц Фавара и Валле-Пуссена (подробнее, напр., в [11], гл. 3, 4). □

Рассмотрим вкратце *кубатурно-итерационный метод.* На практике решение системы нелинейных уравнений (11) часто имеет значительные трудности. В связи с этим нам представляется полезным следующий итерационный метод ее решения:

$$\alpha^{l+1}_{ij} = \alpha^l_{ij} + \frac{m_0}{M_0^2}\Big\{ y(s_i,\sigma_j) - \lambda F(s_i,\sigma_j;\alpha^l_{ij}) - \\ -\mu\Phi\Big(s_i,\sigma_j;\alpha^l_{ij}, \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\beta_{i-k}(N)\alpha^l_{kj}, \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}\beta_{j-r}(M)\alpha^l_{ir}, \frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\beta_{i-k}(N)\beta_{j-r}(M)\alpha^l_{kr}\Big)\Big\}, \\ i = \overline{1,N}, \quad j = \overline{1,M}, \quad l = 0, 1, \ldots, \quad (51)$$

где $\{\alpha^0_{kr}\}_{1\ 1}^{N\ M} \in \overline{X}$ — произвольное начальное приближение.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 1 *итерационный метод* (51) *сходится к единственному решению* $\alpha^*_{11}, \ldots, \alpha^*_{NM}$ *системы уравнений* (11), *причем для* l*-го* ($l \in \mathbb{N}$) *приближения справедливы оценки*

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}|\alpha^*_{kr} - \alpha^l_{kr}|^2\Big)^{1/2} \le \frac{q^l}{1-q}\Big(\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}|\alpha^1_{kr} - \alpha^0_{kr}|^2\Big)^{1/2}, \quad q = \Big\{1 - \Big(\frac{m_0}{M_0}\Big)^2\Big\}^{1/2}.$$

Доказательство. Итерационный метод (51) эквивалентен методу

$$\overline{x}^{l+1} = \overline{x}^l + \frac{m_0}{M_0^2}(\overline{y} - \overline{A}\overline{x}^l), \quad l = 0, 1, \dots, \quad \overline{x}^0 = \{\alpha_{kr}^0\}_{1\ 1}^{N\ M} \in \overline{X}, \tag{52}$$

являющемуся универсальным итерационным методом решения уравнения (15). Тогда с учетом доказательства теоремы 1 находим, что матричный оператор

$$\overline{B} = \overline{E} - \frac{m_0}{M_0^2}\,\overline{A} : \overline{X} \to \overline{X}$$

является оператором сжатия с коэффициентом q, где $\overline{E}$ — тождественный оператор пространства $\overline{X}$. Отсюда и из (52) получаем требуемое утверждение. □

Из теорем 2 и 3 выводится

Теорема 4. *В условиях леммы и теоремы* 2 *единственное решение уравнения* (1)–(4) *можно найти как предел*

$$x^*(s, \sigma) = \lim_{l\to\infty} \lim_{n,\, m\to\infty} x_{nm}^l(s, \sigma)$$

в L_2 *кубатурно-итерационной последовательности полиномов*

$$x_{nm}^l(s, \sigma) = \frac{4}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}\alpha_{kr}^l \Delta_n(s - s_k)\Delta_m(\sigma - \sigma_r), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (N, M \in \mathbb{N}),$$

где $\{\alpha_{kr}^l\}_{1\ 1}^{N\ M}$ *определены согласно* (51). *При этом для любых* $l, N, M \in \mathbb{N}$ *и* $\widetilde{x}_{nm} \in X_{nm}$ *справедлива оценка*

$$\|x^* - x_{nm}^l\| \le \|x^* - \widetilde{x}_{nm}\| + m_0^{-1}[(|\lambda|M_1 + |\mu|M_2)\|\mathcal{L}_{nm}x^* - \widetilde{x}_{nm}\| + |\mu|M_3\|\mathcal{L}_{nm}S_1(x^* - \widetilde{x}_{nm})\| +$$
$$+ |\mu|M_4\|\mathcal{L}_{nm}S_2(x^* - \widetilde{x}_{nm})\| + |\mu|M_5\|\mathcal{L}_{nm}S_{12}(x^* - \widetilde{x}_{nm})\|] + \frac{q^l}{1-q}\left(\frac{1}{NM}\sum_{k=1}^{N}\sum_{r=1}^{M}|\alpha_{kr}^1 - \alpha_{kr}^0|^2\right)^{1/2}.$$

Замечание 1. Результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также при замене СНАУ (11) на систему

$$\lambda F(s_i, \sigma_j; \alpha_{ij}) + \mu\Phi\Bigg(s_i, \sigma_j; \alpha_{ij}, \frac{1}{N}\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{N}\operatorname{ctg}\frac{(k-i)\pi}{N}\alpha_{kj}, \frac{1}{M}\sum_{\substack{r=1\\r\ne j}}^{M}\operatorname{ctg}\frac{(r-j)\pi}{M}\alpha_{ir},$$
$$\frac{1}{MN}\sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{N}\sum_{\substack{r=1\\r\ne j}}^{M}\operatorname{ctg}\frac{(k-i)\pi}{N}\operatorname{ctg}\frac{(r-j)\pi}{M}\alpha_{kr}\Bigg) = y(s_i, \sigma_j), \quad i = \overline{1, N}; \quad j = \overline{1, M},$$

где $N, M \in \mathbb{N}$.

Замечание 2. Выше мы считали все функции и пространства вещественными. Однако аналогичные результаты имеют место и в том случае, когда функции F, Φ, x и y являются комплекснозначными, а параметры λ и μ и пространство L_2 — комплексными.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 9. – С. 1504–1516.
2. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33. – № 3. – С. 400–410.

4. Габдулхаев Б.Г., Рахимов И.К. *Методы решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений с монотонными операторами* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 7. – С. 15–27.
5. Габдулхаев Б.Г. *Методы решения бисингулярных интегральных уравнений с внутренними коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 8. – С. 11–25.
6. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademie-Verlag, 1980. – 514 S.
7. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов.* I // Тр. Матем. ин-та АН Болгарии. – 1970. – Т. 11. – С. 181–196.
8. Габдулхаев Б.Г. *Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов.* II // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 4. – С. 3–13.
9. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
11. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

Казанский государственный университет

Поступила
20.09.2005