И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 512.542

С.В. ЛЕЩЕВА, О.В. СУВОРОВА

О φ-СТРУКТУРЕ НА ГРУППЕ ${}^3D_4$

В данной работе исследуется вопрос о несуществовании нетривиального автоморфизма φ в простой группе Π со свойством $x\varphi(x^{-1}) \in sTs^{-1} \Rightarrow x \in T = \{y \in \Pi \mid \varphi(y) = y\}$. Группы, для которых φ существует, называются φ-группами [1]. Работа является очередным звеном в системе доказательства гипотезы, согласно которой нетривиальная φ-группа разрешима. Это равносильно гипотезе о разрешимости конечных леводистрибутивных квазигрупп. Важно отметить, что при переходе к φ-инвариантным подгруппам и факторгруппам по φ-инвариантным нормальным делителям φ-структура сохраняется.

На смежных классах Π/T можно ввести структуру леводистрибутивной квазигруппы, если определить умножение $x \circ y = x\varphi(x^{-1}y)$. Каждая квазигруппа может быть получена таким образом (хотя и с неоднозначно определенной группой Π). Однако каждое представление можно редуцировать к минимальному, уже однозначно определяемому квазигруппой. Это редуцирование производится следующим образом: сначала от Π переходят к главной подгруппе $\Pi_1 = \langle x\varphi(x^{-1}) \mid x \in \Pi\rangle$, а затем факторизуют по наибольшему нормальному делителю из T. Группа Π для минимального представления есть $L'(G)$-коммутант группы левых трансляций квазигруппы G.

В данной работе проводится доказательство гипотезы для простой конечной группы ${}^3D_4$.

Рассмотрим подгруппу φ-неподвижных элементов T. Случай $T = 1$ исключается, поскольку известные простые группы не имеют регулярных автоморфизмов ([2], с. 65). Тогда возможны два случая: 1) T содержит полупростые элементы; 2) T состоит из унипотентных элементов.

Лемма 1. *Полупростой элемент нечетного порядка в $G = {}^3D_4$ сопряжен со своим обратным.*

Доказательство. Конечная группа G получается из группы $\overline{G}$ над алгебраически замкнутым полем k как подгруппа σ-неподвижных элементов ([2], с. 303). Так как $\overline{G}$ односвязна ([3], с. 192), то сопряженность в $\overline{G}$ влечет сопряженность в G над полем F_q.

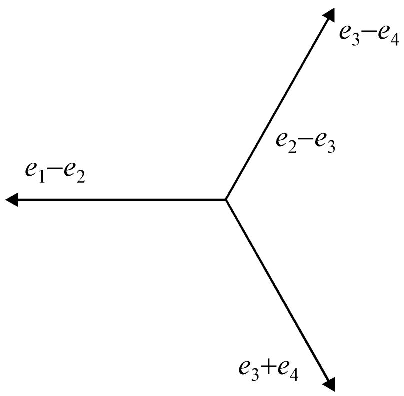
Если основное поле алгебраически замкнуто, то полупростой элемент лежит в некотором максимальном торе. Ввиду того, что все максимальные торы сопряжены, можно считать, что полупростой элемент x лежит в картановской подгруппе из G.

Пусть $w \in W$ — элемент группы Вейля, являющийся композицией n отражений относительно ортогональных корней. Если $x = \Pi h_\alpha(t_\alpha)$, то $wxw^{-1} = \Pi h_{w(\alpha)}(t_\alpha) = \Pi h_{-\alpha}(t_\alpha) = \Pi h_\alpha(t_\alpha^{-1}) = x^{-1}$. Используемое выше равенство $h_{-\alpha}(t) = h_\alpha(t^{-1})$ легко получить из соотношения $h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t^{-1}) = x_\beta(t^{\langle\beta,\alpha\rangle}u)$ ([4], с. 32). Сопряжение элементом $h_{-\alpha}(t)$ обеих частей этого соотношения дает $h_{-\alpha}(t)h_\alpha(t)x_\beta(u)h_\alpha(t^{-1})h_{-\alpha}(t^{-1}) = x_\beta(u)$. Отсюда следует, что $h_{-\alpha}(t)h_\alpha(t)$ принадлежит центру группы. Так как группа проста, то $h_{-\alpha}(t)h_\alpha(t) = 1$.

Поскольку фундаментальная группа $\overline{G} = D_4$ тривиальна, то x сопряжен с x^{-1} в $G = {}^3D_4$.

Система корней группы D_4 имеет вид $\pm e_i \pm e_j$ $(i, j < 4)$.

Исследуем вопрос о строении группы ${}^3D_4$ [5]. Рассмотрим группу $D_4(q^3)$ над полем F_{q^3} с выделенным автоморфизмом $x \to \overline{x}$ порядка 3. В схеме Дынкина поворот вокруг $e_2 - e_3$ индуцирует следующую перестановку корней:



$e_1 - e_2 \to e_3 - e_4 \to e_3 + e_4$, $e_1 - e_3 \to e_2 - e_4 \to e_2 + e_4$, $e_1 - e_4 \to e_2 + e_3 \to e_1 + e_4$, $e_1 + e_2$, $e_1 + e_3$, $e_2 - e_3$ неподвижны (указаны лишь переходы положительных корней).

Группа ${}^3D_4(q)$ порождается элементами вида (где $x_{i\pm j}$ — корневая подгруппа, соответствующая корню $e_i \pm e_j$)

$$
\begin{gathered}
x_1 = x_{\pm(1+2)}(a), \quad x_2 = x_{\pm(1+3)}(b), \quad x_3 = x_{\pm(2-3)}(c), \\
X_1(u) = x_{1-3}(u)x_{2-4}(\overline{u})x_{2+4}(\overline{\overline{u}}), \quad X_{-1}(u) = x_{-1+3}(u)x_{-2+4}(\overline{u})x_{-2-4}(\overline{\overline{u}}), \\
X_2(v) = x_{3-4}(v)x_{3+4}(\overline{v})x_{1-2}(\overline{\overline{v}}), \quad X_{-2}(v) = x_{-3+4}(v)x_{-3-4}(\overline{v})x_{1+2}(\overline{\overline{v}}), \\
X_3(w) = x_{1-4}(w)x_{2+3}(\overline{w})x_{1+4}(\overline{\overline{w}}), \quad X_{-3}(w) = x_{-1+4}(w)x_{-2-3}(\overline{w})x_{-1-4}(\overline{\overline{w}}),
\end{gathered}
$$

где $a, b, c \in F_q^*$, $u, v, w \in F_{q^3}^*$, $\overline{\overline{u}}$ — результат двукратного применения полевого автоморфизма к u.

Элементы каждого из перечисленных типов составляют корневую подгруппу. Эти элементы инвариантны относительно композиции полевого автоморфизма в аргументах x_α с перестановкой корней в D_4, описанной выше. Корневые группы $x_{1,2,3}(a)$ и $X_{1,2,3}(u)$ порождают силовскую подгруппу U в ${}^3D_4(q)$ порядка q^{12}. Картановская подгруппа H в ${}^3D_4(q)$ порождается элементами $h(x) = h_{1-2}(x)h_{3-4}(\overline{x})h_{3+4}(\overline{\overline{x}})$ и $h_{2-3}(t)$ ($x \in F_{q^3}$, $t \in F_q$). Порядок ее равен $(q^3 - 1)(q - 1)$.

Сопряжение $x_{1,2,3}$ и $X_{1,2,3}$ картановскими элементами умножает аргументы на множители, указанные в таблице 1.

Таблица 1. Множители аргументов $x_{1,2,3}$, $X_{1,2,3}$
при сопряжении их картановскими элементами $h(x)$ и $h_{2-3}(t)$

	$x_{1+2}(a)$	$x_{1+3}(b)$	x_{2-3}©	$X_1(u)$	$X_2(v)$	$X_3(w)$
$h(x)$	1	Nx	$1/Nx$	x^2/Nx	$\overline{x}^2$	$Nx/\overline{\overline{x}}^2$
$h_{2-3}(t)$	T	t^{-1}	t^2	t	t^{-1}	1

(через Nx обозначено произведение $x \cdot \overline{x} \cdot \overline{\overline{x}}$).

Группа Вейля имеет порядок 12. Действие ее на базисе e_1, e_2, e_3, e_4 и образующие группы U_w из разложения Брюа ${}^3D_4 = \mathop{\mathbf{Y}}\limits_{w \in W} BwU_w$ ($B = UH$ — борелевская подгруппа) даются в таблице 2.

Таблица 2. Действие группы Вейля и образующие группы U_w

$w = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\ .&.&.&.\end{smallmatrix}\right)$	U_w	$\lvert U_w \rvert$
1 2 3 4	1	1
−1−2−3−4	x_{1+2}, x_{1+3}, x_{2-3}, X_1, X_2, X_3	q^{12}
2 1−3−4	X_2	q^3
−2−1 3 4	x_{1+2}, x_{1+3}, x_{2-3}, X_1, X_3	q^9
1 3 2 4	x_{2-3}	q
−1−3−2 4	x_{1+2}, x_{1+3}, X_1, X_2, X_3	q^{11}
3 1−2−4	x_{1+3}, X_2	q^4
−3−1 2 4	x_{1+2}, x_{2-3}, X_1, X_3	q^8
2−3 1−4	x_{2-3}, X_1	q^4
−2 3−1 4	x_{1+2}, x_{1+3}, X_2, X_3	q^8
3−2 1−4	x_{1+2}, x_{2-3}, X_1	q^5
−3 2−1 4	x_{1+3}, X_2, X_3	q^7

Лемма 2. *Унипотентный элемент в $^3D_4(q)$ сопряжен с одним из элементов $x_{1+3}(b)X_1(u)$, $x_{1+2}(a)X_1(u)X_2(v)$, $x_{1+3}(b)X_3(w)x_{2-3}(c)$, $X_2(v)x_{2-3}(c)$.*

Доказательство. Достаточно рассматривать элементы из силовской подгруппы U. Очевидно, что каждый из них относится к одной из следующих восьми форм:

1. $x_{1+2}(a)$,
2. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)$, $b \neq 0$,
3. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_1(u)$, $u \neq 0$,
4. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_3(w)$, $w \neq 0$,
5. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_1(u)X_3(w)$, $u, w \neq 0$,
6. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_1(u)X_3(w)X_2(v)$, $v \neq 0$,
7. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_1(u)X_3(w)x_{2-3}(c)$, $c \neq 0$,
8. $x_{1+2}(a)x_{1+3}(b)X_1(u)X_3(w)X_2(v)x_{2-3}(c)$, $v, c \neq 0$.

Нормализация этих форм осуществляется подходящими унипотентами из U и вейлевскими элементами (отождествленными заданным способом с элементами из фактора NH/H). Укажем эти сопряжения:

2. x_{2-3}ⓒ, а затем $w = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\ 1&3&2&4\end{smallmatrix}\right)$,
3. $X_3(w)$,
4. $X_2(v)$,
5. сопряжение подходящим $X_2(v)$ уничтожает $X_3(w)$ и сводит к п. 3,
6. X_1, X_3 редуцирует к $x_{1+2}(a)X_1(u)X_2(v)$,
7. X_2, X_1 редуцирует к $x_{1+3}(b)X_3(w)x_{2-3}(c)$,
8. X_1, X_2, x_{1+3} сводит к $X_2(v)x_{2-3}$ⓒ.

Предложение. *В нечетной характеристике унипотенты в $^3D_4(q)$ сопряжены со своими обратными.*

Доказательство. Сопряжение форм, перечисленных в лемме 2, картановскими элементами $h_{2-3}(-1)$, $h_{2-3}(-1)$, $h(-1)$, $h_{2-3}(-1)$ (соответственно) меняет знаки аргументов в множителях. Далее применяем процедуру, связанную с циклической перестановкой множителей и перестановками, коммутирующими с ними ([4], с. 32). Это и дает необходимый результат.

Следствие 1. В φ-группе $^3D_4(q)$ порядок T четен.

Обратимся теперь к строению централизаторов инволюций.

а) В нечетной характеристике имеется один класс инволюций [5], в качестве представителя которого можно взять $\sigma = h_{2-3}(-1)$. Централизатор его есть $C(\sigma) = (SL_2(q^3) \circ SL_2(q)) \cdot 2$ и порождается группами $\langle x_{2-3}(a), x_{-2+3}(b)\rangle$ и $\langle X_3(u), X_{-3}(v)\rangle$.

Следствие 2. В нечетной характеристике φ-структура на ${}^3D_4(q)$ тривиальна.

Доказательство. Легко устанавливается отсутствие полевой части в φ: беря инволюцию из T и переходя к централизатору, получаем тривиальность последнего из-за простоты его фактора по центру и φ-тривиальности классических групп $L_2(q)$ [6]. Сопрягающая часть должна лежать в центре централизатора, т.е. быть инволюцией, следовательно, $\varphi^2 = 1$. Но в этом случае группа разрешима. Противоречие.

б) В четной характеристике два класса инволюций с представителями $\sigma_1 = x_{1+2}(1)$ и $\sigma_2 = X_1(1)$. Порядки централизаторов равны $C(\sigma_1) = q^{12}(q^6 - 1)$ и $C(\sigma_2) = q^{10}(q^2 - 1)$ соответственно. Централизатор $C(\sigma_1)$ порождается группами $\langle x_{1+2}(a)\rangle$, $\langle x_{1+3}(b)\rangle$, $\langle x_{2-3}(c)\rangle$, $\langle X_1(u)\rangle$, $\langle X_2(v), X_{-2}(w)\rangle$, $\langle X_3(w)\rangle$ и, следовательно, равен $q^9 \cdot SL_2(q^3)$. Централизатор же $C(\sigma_2)$ порождается силовской подгруппой U и $\langle x_{-1-3}(b)\rangle$, т. е. равен $q^9 \cdot SL_2(q)$.

Теорема. *φ-структура на группе ${}^3D_4(q)$ тривиальна.*

Доказательство. Осталось рассмотреть случай четного q. При $q > 2$ $SL_2(q)$ и $SL_2(q^3)$ имеют тривиальную φ-структуру. Поэтому опять рассмотрение централизаторов приводит к $\varphi^2 = 1$. При $q = 2$ полевой части в φ нет, но в $SL_2(2)$ есть нетривиальная φ-структура (сопряжение инволюцией). Однако и здесь сопрягающая часть φ есть 2-элемент. Поэтому она должна лежать в центре силовской подгруппы и снова $\varphi^2 = 1$. Противоречие.

Литература

1. Галкин В.М. *Леводистрибутивные квазигруппы конечного порядка* // Матем. исслед. – Кишинев, 1979. – № 51. – С. 43–54.
2. Горенстейн Д. *Конечные простые группы. Введение в их классификацию.* – М.: Мир, 1985. – 352 с.
3. *Семинар по алгебраическим группам.* – М.: Мир, 1973.
4. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* – М.: Мир, 1975. – 262 с.
5. Kleidman P. *The maximal subgroups of the Steinberg triality groups ${}^3D_4$* // J. Algebra. – 1988. – V. 115. – P. 182–199.
6. Лещева С.В., Суворова О.В. *О φ-структуре на проективной группе $L_2(q)$* // Матем. заметки. – 1988. – Т. 63. – № 5.

Нижегородский государственный технический университет

Поступила 10.12.1996