Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №12, с. 58–66 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0113*

М.Х. ФАЙЗРАХМАНОВ

РАЗЛОЖИМОСТЬ НИЗКИХ 2-ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ СТЕПЕНЕЙ И ТЬЮРИНГОВЫЕ СКАЧКИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. В работе доказана теорема: для каждого обозначения конструктивного ординала существует низкая 2-вычислимо перечислимая степень, не являющаяся разложимой на две меньшие 2-вычислимо перечислимые степени, скачки которых принадлежат Δ-уровню иерархии Ершова, соответствующему этому обозначению.

Ключевые слова: низкие степени, 2-вычислимо перечислимые степени, иерархия Ершова, тьюринговые скачки, конструктивные ординалы.

УДК: 510.53

Abstract. In this paper we prove the following theorem: For every notation of constructive ordinal, there exists a low 2-computably enumerable degree which is not splittable into two lower 2-computably enumerable degrees, whose jumps belong to the Δ-level of the Ersov hierarchy that corresponds to this notation.

Keywords: low degrees, 2-computably enumerable degrees, Ershov hierarchy, Turing jumps, constructive ordinals.

Пусть $\langle O, <_O\rangle$ — клиниевская система обозначений для конструктивных ординалов и $a \in O$. Множество X принадлежит *классу* Σ_a^{-1} *иерархии Ершова*, если существует частично вычислимая функция от двух переменных ψ такая, что для всех x выполнено

$$x \in X \Leftrightarrow \exists t <_O a\ \forall t' <_O\ a\big[\psi(t,x)\downarrow = 1\,\&\,[\psi(t',x)\downarrow \Rightarrow [t <_O t'\ \vee\ t = t']]\big].$$

Здесь запись $\psi(t,x)\downarrow$ означает, что значение $\psi(t,x)$ определено. Про такую функцию ψ будем говорить, что она *определяет* X *как* Σ_a^{-1}*-множество.* Определим Π_a^{-1}*-класс* и Δ_a^{-1}*-класс*, полагая

$$\Pi_a^{-1} = \{X : \overline{X} \in \Sigma_a^{-1}\},$$
$$\Delta_a^{-1} = \Sigma_a^{-1} \cap \Pi_a^{-1}.$$

Легко видеть, что X принадлежит Δ_a^{-1} в том и только том случае, если существует частичная функция ψ, которая определяет X как Σ_a^{-1}-множество и для всех x найдется $t <_O a$ такое, что $\psi(t,x)\downarrow$. Про такую функцию ψ будем говорить, что она определяет X как Δ_a^{-1}-множество. В работах Ю.Л. Ершова [1]–[3] доказано, что $\Delta_2^0 = \bigcup\limits_{a\in O} \Delta_a^{-1}$. Альтернативные определения уровней иерархии Ершова можно найти в [1]–[3] и в работе М.М. Арсланова [4]. Если a является обозначением для конечного ординала n, пишем $|a|_O = n$, то множества из уровня Σ_a^{-1} называются *n-вычислимо перечислимыми* (*n-в. п.*) *множествами.* Степень

Поступила 08.04.2009

называется *n-в. п. степенью*, если она содержит n-в. п. множество. Вместо 1-в. п. обычно пишут просто в. п.

Первое элементарное различие между полурешетками в. п. и 2-в. п. степеней было найдено М.М. Арслановым. В работе [5] доказано, что каждая ненулевая 2-в. п. степень дополняется наверх, другими словами, если дана 2-в. п. степень $d_0 > 0$, то найдется такая 2-в. п. степень $d_1 < 0'$, что $d_0 \cup d_1 = 0'$. Купером и Ейтсом (не опубликовано) было доказано, что это предложение ложно в полурешетке в. п. степеней. Следующее элементарное различие было найдено Довнеем. В работе [6] доказано, что теорема Лахлана о невложимости ромба [7] не выполняется в 2-в. п. степенях. Наконец, в работе [8] была построена максимальная неполная 2-в. п. степень, что вместе с теоремой о плотности Д. Сакса [9] также дает элементарное различие между полурешетками в. п. и 2-в. п. степеней. Однако ни из одного из приведенных выше результатов не удается вывести элементарное различие между частично упорядоченным множеством низких в. п. степеней и частично упорядоченным множеством низких 2-в. п. степеней, так как в предложениях о дополняемости 2-в. п. степеней и о вложимости ромба фигурирует степень $0'$, а существование максимальной низкой 2-в. п. степени опровергнуто в работе М.М. Арсланова, С.Б. Купера и А. Ли [10]. В данной работе укажем элементарное различие между частично упорядоченными множествами низких в. п. степеней и низких 2-в. п. степеней: покажем, что каковы бы ни были низкие 2-в. п. степени d_0 и d_1, всегда найдется такая низкая 2-в. п. степень d, что для всех 2-в. п. степеней $b_0 \leqslant d_0$, $b_1 \leqslant d_1$ будет выполнено неравенство $d \neq b_0 \cup b_1$. Истинность отрицания этого предложения в низких в. п. степенях следует из результата Л. Велша [11] о том, что полурешетка в. п. степеней порождается двумя главными идеалами из низких в. п. степеней с помощью операции взятия наименьшей верхней грани. Результат о не элементарной эквивалентности частично упорядоченных множеств низких в. п. степеней и низких 2-в. п. степеней независимо получил М.М. Ямалеев, доказав (не опубликовано) истинность следующего предложения в 2-в. п. степенях: $\exists a > 0\ \exists b > a\ \forall c \leqslant b\ [a \leqslant c\ \vee\ c \leqslant a]$. В доказательстве нашей теоремы будем использовать технику работы с множествами, тьюринговые скачки которых лежат в иерархии Ершова. Для выполнения одного из соотношений $b_0 \nleqslant d_0$, $b_1 \nleqslant d_1$ для таких степеней b_0, b_1, что $d = b_0 \cup b_1$, будем добиваться, чтобы либо $B_0' \notin \Delta_a^{-1}$, либо $B_1' \notin \Delta_a^{-1}$, где $b_i = \deg(B_i)$, $d_i = \deg(D_i)$, $i = 0, 1$, и $D_0', D_1' \in \Delta_a^{-1}$.

Через ω обозначаем множество натуральных чисел. Все рассматриваемые в работе множества являются подмножествами ω и все рассматриваемые функции являются операциями на ω. Для множеств X и Y через $X \oplus Y$ обозначим их *сочленение*, которое определяется как множество $\{2x : x \in X\} \cup \{2x+1 : x \in Y\}$. Через $\langle x, y\rangle$ обозначаем образ пары (x, y) относительно функции $\frac{x^2+2xy+y^2+3x+y}{2}$. Для n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ положим $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle\rangle$. Пусть $\{\varphi_e\}_{e\in\omega}$ — эффективная нумерация всех частично вычислимых функций от двух переменных с областью значений в множестве $\{0, 1\}$. Пусть $\{\Phi_e\}_{e\in\omega}$ — эффективная нумерация всех тьюринговых функционалов с областью значений в множестве $\{0, 1\}$ такая, что для любых $X \subset \omega$, $e, x, s \in \omega$ $\operatorname{use}(X; e, x, s)$ есть либо нуль, либо число, большее x (здесь через $\operatorname{use}(X; e, x, s)$ обозначена use-функция функционала Φ_e).

Пусть W_e — в. п. множество с геделевским номером e. Через $2^{<\omega}$ обозначим множество всех конечных строк, состоящих из 0 и 1. Пусть дано в. п. множество $A \subset 2^{<\omega} \times \omega$ такое, что

$$\forall \sigma \in 2^{<\omega}\ \forall \delta \in 2^{<\omega}\ \forall x \in \omega\ [(\sigma, x) \in A \,\&\, \sigma \subset \delta \Rightarrow (\delta, x) \in A]. \tag{1}$$

Тогда определим функционал Γ_A, полагая

$$\Gamma_A^{\sigma}(x)\downarrow = 0 \Leftrightarrow (\sigma, x) \in A,$$

$$\Gamma_A^\sigma(x)\downarrow \Rightarrow (\sigma, x) \in A.$$

Заметим, что $\operatorname{dom}\Gamma_A^X$ в. п. относительно X.

Обозначим через f такую вычислимую функцию, что для любого обозначения $a \in O$

$$W_{f(a)} = \{b \in O : b <_O a\}.$$

Фиксируем обозначение $a \in O$. Определим функции от трех переменных $b : \omega^3 \to O \cup \{-1\}$, $b_{\lim} : \omega^3 \to O \cup \{-1\}$ и $h : \omega^3 \to \omega$. Если $\{b' \in W_{f(a),s} : \varphi_{p,s}(b', z)\downarrow\} = \varnothing$, то $b(p, z, s) = -1$. Предположим, что $\{b' \in W_{f(a),s} : \varphi_{p,s}(b', z)\downarrow\} \neq \varnothing$. Тогда $b(p, z, s)$ — такое обозначение из $W_{f(a),s}$, что $\varphi_{p,s}(b(p, z, s), z)\downarrow$ и

$$[b' \in W_{f(a),s} - \{b(p, z, s)\} \,\&\, \varphi_{p,s}(b', z)\downarrow] \Rightarrow b(p, z, s) <_O b'.$$

Если $b(p, z, s) = -1$, то $b_{\lim}(p, z, s) = -1$. Предположим, что $b(p, z, s) \neq -1$. Тогда $b_{\lim}(p, z, s)$ определяется следующим образом:

(a) $b_{\lim(p,z,s)} <_O b(p, z, s)$ или $b_{\lim}(p, z, s) = b(p, z, s)$,

(b) $|b_{\lim}(p, z, s)|_O$ — предельный ординал или нуль,

(c) если $\beta = |b(p, z, s)|_O$, $\beta_{\lim} = |b_{\lim}(p, z, s)|_O$, то $\beta_{\lim} < \gamma \leqslant \beta$ влечет γ — непредельный ординал.

Полагаем $h(p, z, s) = -1$, если $b(p, z, s) = -1$, и $h(p, z, s) = |b(p, z, s)|_O - |b_{\lim}(p, z, s)|_O$ в противном случае. Интуитивно $b(p, z, s)$ можно представить как обозначение для наименьшего ординала, меньшего $|a|_O$, которое можем эффективно определить на шаге s, если такое обозначение существует. Обозначение $b_{\lim}(p, z, s)$ можно представить как обозначение предельного ординала, ближайшего к $|b(p, z, s)|_O$, или как 0, если нет предельных ординалов, меньших $|b(p, z, s)|_O$.

Для строки $\sigma \in 2^{<\omega}$ обозначим через $lh(\sigma)$ длину σ. Для $u < lh(\sigma)$ и $v \in \{0, 1\}$ пишем $\sigma(u) = v$, если в строке σ символом с номером u является v. Пусть даны в. п. множества D_0, D_1 и 2-в. п. множество $D = D_0 - D_1$. Обозначим $D_s = D_{0,s} - D_{1,s}$. Пишем $\Phi_{n,s}^{\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}}(x)\downarrow = v$, если существуют строки σ_0, $\sigma_1 \in 2^{<\omega}$ такие, что

$$\forall y < lh(\sigma_0)\ \forall z < lh(\sigma_1)\ [\Phi_{m,s}^{D_s}(y) = \sigma_0(y) \,\&\, \Phi_{l,s}^{D_s}(z) = \sigma_1(z)] \,\&\, \Phi_{n,s}^{\sigma_0 \oplus \sigma_1}(x)\downarrow = v.$$

Для всех $s, d \in \omega$ и $v \in \{0, 1\}$ определим функцию $k_{v,d}^s$. Если $\Phi_{n,s}^{\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}}(x)\uparrow$, то полагаем $k_{v,d}^s(x) = -1$. Если $\Phi_{n,s}^{\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}}(x)\downarrow$, то

$$k_{0,d}^s(x) = \max\{\operatorname{use}(D_s; m, x, s) : 2x \leqslant \operatorname{use}(\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}; n, x, s)\},$$
$$k_{1,d}^s(x) = \max\{\operatorname{use}(D_s; l, x, s) : 2x + 1 \leqslant \operatorname{use}(\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}; n, x, s)\}.$$

Конечную последовательность $x_0, \ldots, x_u$ назовем $\langle d, s\rangle$-*последовательностью*, где $d = \langle e, i, j, k, n, m, l, p, q\rangle$, если

(a) $\forall v \leqslant u\ \ [\Phi_{n,s}^{\Phi_{m,s}^{D_s} \oplus \Phi_{l,s}^{D_s}}(x_v)\downarrow]$,

(b) $\forall v < u\ \ [x_{v+1} > \max\{k_{0,d}^s(x_v), k_{1,d}^s(x_v)\}]$.

Теорема 1. *Пусть дано обозначение $a \in O$. Тогда существует низкое 2-в. п. множество D такое, что каковы бы ни были 2-в. п. множества E и F, если $E' \in \Delta_a^{-1}$ и $F' \in \Delta_a^{-1}$, то $D \not\equiv_T E \oplus F$.*

Доказательство. Достаточно построить 2-в. п. множество $D = D_0 - D_1 \subset \omega$, D_0, D_1 — в. п. множества, и в. п. множество $A \subset 2^{<\omega} \times \omega$, для которого выполнено условие (1), удовлетворяющие для всех $d = \langle e, i, j, k, n, m, l, p, q\rangle$ требованиям

$$R_d : D = \Phi_n^{(W_e - W_i)\oplus(W_j - W_k)} \,\&\, W_e - W_i = \Phi_m^D \,\&\, W_j - W_k = \Phi_l^D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ функция } \varphi_p \text{ не определяет } (\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}) \text{ как } \Delta_a^{-1}\text{-множество} \vee$$

$$\vee \text{ функция } \varphi_q \text{ не определяет } (\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_j - W_k}) \text{ как } \Delta_a^{-1}\text{-множество},$$

$$N_d : \exists^\infty t\ [\Phi_{d,8t+8}^{D_{8t+8}}(d)\downarrow] \Rightarrow \Phi_d^D(d)\downarrow.$$

Стратегия удовлетворения одного требования R_d. Рассмотрим сначала случай, когда $|a|_O = \omega$. Предположим, что $D = \Phi_n^{(W_e - W_i)\oplus(W_j - W_k)}$, $W_e - W_i = \Phi_m^D$ и $W_j - W_k = \Phi_l^D$. Выбираем различные свидетели z_0, z_1. Ждем, что найдутся обозначения $b_0 <_O a$, $b_1 <_O a$ такие, что

$$\varphi_p(b_0, z_0)\downarrow = 0 \,\&\, \varphi_q(b_1, z_1)\downarrow = 0.$$

Ищем $\langle d, s\rangle$-последовательность $x_0, \ldots, x_b$, где $b = |b_0|_O + |b_1|_O$. Полагаем

$$\Gamma_A^{W_e - W_i}(z_0)\downarrow = 0, \quad \gamma^{W_e - W_i}(z_0) = k_{0,d}^s(x_b),$$
$$\Gamma_A^{W_j - W_k}(z_1)\downarrow = 0, \quad \gamma^{W_j - W_k}(z_1) = k_{1,d}^s(x_b).$$

Здесь через γ обозначается use-функция функционала Γ_A. Теперь начинаем диагонализировать значения

$$\big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}\big)(z_0), \quad \big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_j - W_k}\big)(z_1),$$

последовательно перечисляя в D_0 элементы $x_b, x_{b-1}, \ldots$. Опишем процесс диагонализации более подробно. Ждем такой шаг s_0, на котором

$$\varphi_{p,s_0}(b(p, z_0, s_0), z_0)\downarrow = 0 \,\&\, \varphi_{q,s_0}(b(q, z_1, s_0), z_1)\downarrow = 0.$$

Затем положим

$$\Gamma_{A_{s_0}}^{W_{e,s_0} - W_{i,s_0}}(z_0)\downarrow = 0, \quad \gamma^{W_{e,s_0} - W_{i,s_0}}(z_0) = k_{0,d}^s(z_0),$$
$$\Gamma_{A_{s_0}}^{W_{j,s_0} - W_{k,s_0}}(z_1)\downarrow = 0, \quad \gamma^{W_{j,s_0} - W_{k,s_0}}(z_1) = k_{1,d}^s(z_1).$$

Далее ждем такой шаг s_1, на котором

$$\varphi_{p,s_1}(b(p, z_0, s_1), z_0)\downarrow = 1 \,\&\, \varphi_{q,s_1}(b(q, z_1, s_1), z_1)\downarrow = 1.$$

Перечислим x_b в D_0 и начинаем ждать шаг s_2, на котором либо $\Gamma_{A_{s_2}}^{W_{e,s_2} - W_{i,s_2}}(z_0)\uparrow$, либо $\Gamma_{A_{s_2}}^{W_{j,s_2} - W_{k,s_2}}(z_1)\uparrow$, и

$$\varphi_{p,s_2}(b(p, z_0, s_2), z_0)\downarrow = \big(\operatorname{dom}\Gamma_{A_{s_2}}^{W_{e,s_2} - W_{i,s_2}}\big)(z_0),$$
$$\varphi_{q,s_2}(b(p, q_1, s_2), z_1)\downarrow = \big(\operatorname{dom}\Gamma_{A_{s_2}}^{W_{j,s_2} - W_{k,s_2}}\big)(z_1).$$

После наступления такого шага положим Γ_A неопределенным на аргументах z_0, z_1 и начнем выполнять такие же действия с элементами $x_{b-1}, x_{b-2} \ldots$. Так как число элементов выбранной $\langle d, s\rangle$-последовательности равно $|b_0|_O + |b_1|_O + 1$, то в конечном итоге либо

$$\varphi_p(b_0', z_0) \neq \big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}\big)(z_0),$$

либо

$$\varphi_q(b_1', z_1) \neq \big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_j - W_k}\big)(z_1),$$

где $b_0' <_O a$, $b_1' <_O a$ и $b_0'' <_O b_0' \Rightarrow \varphi_p(b_0'', z_0)\uparrow$, $b_1'' <_O b_1' \Rightarrow \varphi_q(b_1'', z_1)\uparrow$. Обозначим эту стратегию через $\mathbf{S}$.

Такие рассуждения не удается применить, когда $|a|_O > \omega$. При $|a|_O > \omega$ опять предположим, что $D = \Phi_{n,s}^{(W_e - W_i)\oplus(W_j - W_k)}$, $W_e - W_i = \Phi_{m,s}^{D_s}$ и $W_j - W_k = \Phi_{l,s}^{D_s}$. Выбираем различных свидетелей y_0, y_1, z_0, z_1. Будем диагонализировать значения

$$\big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}\big)(y_0), \qquad \big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_j - W_k}\big)(y_1),$$
$$\big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}\big)(z_0) \quad \text{и} \quad \big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_j - W_k}\big)(z_1).$$

Выберем элемент c, который еще не перечислен в $D_0 \cup D_1$. Ищем обозначения $b_0 <_O a$, $b_1 <_O a$, для которых

$$\varphi_p(b_0, y_0)\downarrow = 0 \,\&\, \varphi_q(b_1, y_1)\downarrow = 0.$$

Определим $\Gamma_A^{W_e - W_i}(y_0)\downarrow = 0$, $\Gamma_A^{W_j - W_k}(y_1)\downarrow = 0$ с достаточно большим значением use-функции. Перечислим $c = c_0$ в D_0 и обозначим через w_0 такой элемент, что при перечислении c_0 в D_0 изменилось значение $(W_e - W_i)(w_0)$ или $(W_j - W_k)(w_0)$. Пусть для определенности изменилось значение $(W_e - W_i)(w_0)$. Тогда $\Gamma_A^{W_e - W_i}(y_0)\uparrow$. Теперь выберем новый элемент c', перечисление которого в D_0 не нарушит вычисления $\Phi_n^{(W_e - W_i)\oplus(W_j - W_k)}(c)$, и выполним действия, описанные выше с элементом c' вместо c. Продолжая такие рассуждения, добьемся, что либо

$$\big(\operatorname{dom}\Gamma_A^{W_e - W_i}\big)(y_0) \neq \varphi_p(b_0', y_0),$$

где $b_0' <_O a$, $\varphi_p(b_0', y_0)\downarrow$ и $b_0'' <_O b_0' \to \varphi_p(b_0'', y_0)\uparrow$, либо из-за перечисления некоторого элемента c_1 в D_0 произойдет смена значения $(W_j - W_k)(w_1)$ на некотором элементе w_1. Предположим, что такие c_1, w_1 существуют. Тогда начинаем действовать согласно стратегии $\mathbf{S}$, определяя значения $\gamma^{W_e - W_i}(z_0)$ и $\gamma^{W_j - W_k}(z_1)$ больше, чем $\max\{w_0, w_1\}$, до тех пор, пока не наступит шаг t, на котором

$$b_{\lim}(p, z_0, t) \neq b_{\lim}(p, z_0, t+1) \vee b_{\lim}(q, z_1, t) \neq b_{\lim}(q, z_1, t+1).$$

Если такой шаг t наступил, перечислим c_1 в D_1. Теперь $\Gamma_A^{W_j - W_k}(z_1)\uparrow$ и значение $(W_j - W_k)(w_1)$ изменилось уже два раза. Далее перечислим c_0 в D_1, и теперь $\Gamma_A^{W_e - W_i}(z_0)\uparrow$. Важно заметить, что при перечислении c_0 в D_1 значение $\Gamma_A^{W_j - W_k}(z_1)$ не становится определенным, так как значение $(W_j - W_k)(w_1)$ изменилось уже два раза. Продолжая такие рассуждения, получим, что требование R_d удовлетворено за конечное число шагов, так как не существует последовательности обозначений из O, которая бесконечно убывает:

$$\cdots <_O b_2 <_O b_1 <_O a.$$

Стратегия удовлетворения одного требования N_d. Ждем такого шага $s = 8t + 8$, на котором $\Phi_{d,s}^{D_s}(d)\downarrow$. Если такой шаг найдется, то запрещаем D от изменений на всех элементах, не больших $\operatorname{use}(D_s; d, d, s)$.

Стратегия совместного удовлетворения требований R_d, N_d, $d \in \omega$. Расположим требования в порядке убывания их приоритетов:

$$R_0,\ N_0,\ R_1,\ N_1, \ldots .$$

Для удовлетворения требования R_0 необходимо лишь конечное число шагов. Следовательно, начиная с некоторого шага $s = 8t + 8$, если $\Phi_{0,s}^{D_s}(0)\downarrow$, то это вычисление останется истинным на всех последующих шагах и требование N_0 не ставит больше никаких запретов. Продолжая такие рассуждения по индукции, получим, что в конечном итоге все требования R_d и N_d удовлетворены.

Приведем теперь конструкцию множеств D_0, D_1, A. Конструкция будет состоять из шагов восьми типов, первые семь из которых обладают общим завершением. Далее будем пользоваться символом d как номером девятки $\langle e, i, j, k, n, m, l, p, q\rangle$.

Конструкция множеств D_0, D_1, A.

<u>Шаг $s = 0$.</u>

Полагаем $A_0 = D_{0,0} = D_{1,0} = \varnothing$,

$c^0_{0,d} = c^0_{1,d} = c^0_d = -1$,

$y^0_{0,d} = \langle 0, 2d\rangle$, $y^0_{1,d} = \langle 0, 2d+1\rangle$,

$z^0_{0,d} = \langle 1, 2d\rangle$, $z^0_{1,d} = \langle 1, 2d+1\rangle$,

$R(d, 0) = r_R(d, 0) = r_N(d, 0) = 0$,

$\sigma^0_{0,d} = \sigma^0_{1,d} = \lambda$,

$x^s_{u,d} = -1$, $u \in \omega$,

$g_0(d, 0) = g_1(d, 0) = 0$ для всех $d \in \omega$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 1$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $c^s_d = -1$, и либо $c^s_{0,d} = -1$, либо $c^s_{1,d} = -1$,

(b) существует $x \in \omega^{[d]} \upharpoonright s$ такое, что

$$x > R(d, s), \quad x \notin D_{0,s} \cup D_{1,s}, \quad \Phi^{\Phi^{D_s}_{m,s} \oplus \Phi^{D_s}_{l,s}}_{n,s}(x)\downarrow.$$

Если такое d существует, то полагаем $c^{s+1}_d = x$ и $r_R(d, s+1) = \max\{k^s_{0,d}(x), k^s_{1,d}(x)\}$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 2$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $c^s_d \neq -1$ и $c^s_d \notin D_{0,s} \cup D_{1,s}$,

(b) $x \leqslant k^s_{0,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{m,s}(x)\downarrow = (W_{e,s} - W_{i,s})(x)$, $x \leqslant k^s_{1,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{l,s}(x)\downarrow = (W_{j,s} - W_{k,s})(x)$,

(c) $(\operatorname{dom}\Gamma^{\sigma_0}_{A_s})(y^s_{0,d}) = \varphi_p(b(p, y^s_{0,d}, s), y^s_{0,d})$, $(\operatorname{dom}\Gamma^{\sigma_1}_{A_s})(y^s_{1,d}) = \varphi_q(b(q, y^s_{q,d}, s), y^s_{q,d})$,

где $\sigma_0 = \Phi^{D_s}_{m,s} \upharpoonright k^s_{0,d}(c^s_d)$ и $\sigma_1 = \Phi^{D_s}_{l,s} \upharpoonright k^s_{1,d}(c^s_d)$. Предположим, что такое d существует. Полагаем $\sigma^{s+1}_{0,d} = \sigma_0$, $\sigma^{s+1}_{1,d} = \sigma_1$. Если хотя бы одна из пар $(\sigma_w, y^s_{w,d})$ не лежит в A_s, $w = 0, 1$, то перечислим в A_{s+1} эту пару, а также все пары вида $(\delta_w, y^s_{w,d})$, $\sigma_w \subset \delta_w$. Если же обе пары $(\sigma_w, y^s_{w,d})$, $w = 0, 1$, лежат в A_s, то перечислим c^s_d в $D_{0,s+1}$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 3$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $c^s_d \in D_{0,s} - D_{1,s}$,

(b) либо $\sigma^s_{0,d} \not\subset \delta_0$, либо $\sigma^s_{1,d} \not\subset \delta_1$, где

$$\delta_0 = \Phi^{D_s}_{m,s} \upharpoonright k^s_{0,d}(c^s_d) \quad \text{и} \quad \sigma_1 = \Phi^{D_s}_{l,s} \upharpoonright k^s_{1,d}(c^s_d).$$

Предположим, что такое d существует. Если $\sigma^s_{0,d} \not\subset \delta_0$, то полагаем $c^{s+1}_{0,d} = c^s_d$. В противном случае полагаем $c^{s+1}_{1,d} = c^s_d$. Вне зависимости от существования d полагаем $c^{s+1}_d = -1$ и $r_R(d, s+1) = \max\{k^s_{0,d}(x), k^s_{1,d}(x)\}$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 4$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $x^s_{0,d} = -1$,

(b) $c^s_{0,d} \in D_{0,s} - D_{1,s}$, $c^s_{1,d} \in D_{0,s} - D_{1,s}$,

(c) $x \leqslant k^s_{0,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{m,s}(x)\downarrow = (W_{e,s} - W_{i,s})(x)$, $x \leqslant k^s_{1,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{l,s}(x)\downarrow = (W_{j,s} - W_{k,s})(x)$,

(d) $b(p, z^s_{0,d}, s) \neq -1$, $b(q, z^s_{1,d}, s) \neq -1$,

(e) существует $\langle d, s\rangle$-последовательность $x^0, x^1, \ldots, x^{h_0+h_1}$ такая, что $x^v > R(d, s)$ для всех $v \leqslant h_0 + h_1$, где $h_0 = h(p, z^s_{0,d}, s)$, и $h_1 = h(q, z^s_{1,d}, s)$.

Если такое d существует, то для всех $v \leqslant h_0 + h_1$ полагаем $x^{s+1}_{v,d} = x^v$ и $r_R(d, s+1) = \max\{k^s_{u,d}(x^{s+1}_{w,d}) : u \leqslant 1,\ w \leqslant h_0 + h_1\}$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 5$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $x^s_{0,d} \neq -1$,

(b) $\Phi^{\Phi^{D_s}_{m,s} \oplus \Phi^{D_s}_{l,s}}_{n,s}(x^s_{v,d})\downarrow = D_s(x^s_{v,d})$, где $h_0 = h(p, z^s_{0,d}, s)$, $h_1 = h(q, z^s_{1,d}, s)$, $v \leqslant h_0 + h_1$,

(c) $\varphi_{p,s}(b(p, z^s_{0,d}, s), z^s_{0,d}) = (\operatorname{dom} \Gamma^{\delta_0}_{A_s})(z^s_{0,d})$, $\varphi_{q,s}(b(q, z^s_{1,d}, s), z^s_{1,d}) = (\operatorname{dom} \Gamma^{\delta_1}_{A_s})(z^s_{1,d})$, где

$$\delta_0 = \Phi^{D_s}_{m,s} \restriction \max\{k^s_{0,d}(x^s_{v,d}) : v \leqslant h_0 + h_1\},$$
$$\delta_1 = \Phi^{D_s}_{l,s} \restriction \max\{k^s_{1,d}(x^s_{v,d}) : v \leqslant h_0 + h_1\}.$$

Предположим, что такое d существует. Если хотя бы одна из пар $(\delta_w, z^s_{w,d})$ не лежит в A_s, $w = 0, 1$, то перечислим ее в A_{s+1} вместе со всеми парами вида $(\delta'_w, z^s_{w,d})$, $\delta_w \subset \delta'_w$. Если же обе пары $(\delta_w, z^s_{w,d})$, $w = 0, 1$, лежат в A_s, то находим наибольшее u такое, что $x^s_{u,d} \neq -1$ и $x^s_{u,d} \notin D_{0,s}$, и перечислим $x_{u,d}$ в $D_{0,s+1}$. В случае, если такое u не существует, ничего не перечисляем в $D_{0,s+1}$. Полагаем $r_R(d, s+1) = \max\{k^s_{u,d}(x^s_{v,d}) : v \leqslant h_0 + h_1,\ u \leqslant 1\}$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 6$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $c^s_{u,d} \in D_{1,s}$, $c^s_{w,d}$ $w = 1 - u$,

(b) $x \leqslant k^s_{0,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{m,s}(x)\downarrow = (W_{e,s} - W_{i,s})(x)$, $x \leqslant k^s_{1,d}(c^s_d) \Rightarrow \Phi^{D_s}_{l,s}(x)\downarrow = (W_{j,s} - W_{k,s})(x)$.

Если такое d существует, то определим $g_v(d, s+1) = k^s_{v,d}(c^s_{v,d})$, $v = 0, 1$, перечислим $c^s_{w,d}$ в $D_{1,s+1}$ и определим $r_R(d, s+1) = r_R(d, s)$.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 7$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что

(a) $c^s_{0,d}$, $c^s_{1,d} \in D_{1,s}$,

(b) $\Phi^{D_s}_{m,s} \restriction g_0(d, s) = (W_{e,s} - W_{i,s}) \restriction g_0(d, s)$, $\Phi^{D_s}_{l,s} \restriction g_1(d, s) = (W_{j,s} - W_{k,s}) \restriction g_1(d, s)$.

Если такое d существует, то полагаем $c^{s+1}_{0,d} = c^{s+1}_{1,d} = -1$ и $r_R(d, s+1) = \max\{k^s_{u,d}(x) : u \leqslant 1,\ x \leqslant g_u(d, s)\}$.

<u>Завершение шага $s + 1 = 8t + v$, $1 \leqslant v \leqslant 7$.</u>

Если такое d существует, то для всех $d' > d$ полагаем

$$c^{s+1}_{0,d'} = c^{s+1}_{1,d'} = c^{s+1}_{d'} = -1,$$
$$x^{s+1}_{v,d'} = -1, \quad v \in \omega,$$
$$y^{s+1}_{u,d'} = \langle l(y^s_{u,d'}) + 2, 2d' + u\rangle, \quad z^{s+1}_{u,d'} = \langle l(z^s_{u,d'}) + 2, 2d' + u\rangle, \quad u = 0, 1,$$
$$r_N(d, s+1) = r_N(d', s+1) = r_R(d', s+1) = 0. \tag{2}$$

Все остальные величины оставляем неизмененными. Если такого d не существует, то оставим все величины неизмененными.

Далее находим наименьшее $d' = \langle e', i', j', k', n', m', l', p', q' \rangle \leqslant s$ такое, что $c^{s+1}_{0,d'} \in D_{0,s} - D_{1,s}$, $c^{s+1}_{1,d'} \in D_{0,s} - D_{1,s}$ и

$$b_{\lim}(p', z^{s+1}_{0,d'}, s+1) \neq b_{\lim}(p', z^{s+1}_{0,d'}, s) \vee b_{\lim}(q', z^{s+1}_{1,d'}, s+1) \neq b_{\lim}(q', z^{s+1}_{1,d'}, s).$$

Если такое d' существует, то обозначим

$$t_u = \min\{s : c^{s+1}_{u,d} \in D_{0,s}\}, \quad u = 0, 1,$$
$$t_v = \max\{t_0, t_1\},$$

перечислим $c^{s+1}_{v,d}$ в $D_{1,s+1}$ и установим систему равенств (2) с d'' вместо d' и с d' вместо d для всех $d'' > d'$. Если такого d' не существует, то оставляем все величины неизмененными.

Полагаем для всех d

$$R(d, s+1) = \sum_{d' \leqslant d} R(d', s) + \sum_{d' < d} R(d', s+1) + T(d, s+1),$$

где $T(d, s+1) = r_R(d, s+1)$, если $r_R(d, s+1) \neq r_R(d, s)$, и $T(d, s+1) = 0$ в противном случае.

<u>Шаг $s + 1 = 8t + 8$.</u>

Находим наименьшее $d \leqslant s$ такое, что $\Phi^{D_{s+1}}_{d,s+1}(d)\downarrow$ и $r_N(d, s) = 0$. Если такое d существует, то определим $r_N(d, s+1) = \mathrm{use}(D_{s+1}; d, d, s)$ и для всех $d' > d$ полагаем

$$c^{s+1}_{0,d'} = c^{s+1}_{1,d'} = c^{s+1}_{d'} = -1,$$
$$x^{s+1}_{v,d'} = -1, \quad v \in \omega,$$
$$y^{s+1}_{u,d'} = \langle l(y^s_{u,d'}) + 2, 2d' + u \rangle, \quad z^{s+1}_{u,d'} = \langle l(z^s_{u,d'}) + 2, 2d' + u \rangle, \quad u = 0, 1,$$
$$r_N(d', s+1) = r_R(d', s+1) = 0,$$
$$R(d', s+1) = r_N(d, s+1).$$

Если такого d не существует, то оставляем все величины неизмененными. □

Теорема 2 (Л. Велш [11]). *Существуют низкие в. п. множества A_0 и A_1 такие, что для каждого в. п. множества B найдутся в. п. множества $B_0 \leqslant_T A_0$ и $B_1 \leqslant_T A_1$, степень сочленения которых есть степень B, т. е. $B \equiv_T B_0 \oplus B_1$.*

Доказательство. Обозначим $K_0 = \{\langle x, e \rangle : x \in W_e\}$. По теореме Сакса о разложении выберем низкие в. п. множества A_0 и A_1 такие, что $K_0 = A_0 \cup A_1$ и $A_0 \cap A_1 = \varnothing$. Пусть множество $B = W_e$ выбрано произвольно. Определим $B_0 = \{x : \langle x, e \rangle \in A_0\}$ и $B_1 = \{x : \langle x, e \rangle \in A_1\}$. Легко видеть, что $B_0 \leqslant_T A_0$, $B_1 \leqslant_T A_1$ и $B \equiv_T B_0 \oplus B_1$. □

Следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Частично упорядоченное множество низких в. п. степеней и частично упорядоченное множество низких 2-в. п. степеней не элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через $B(x, y, z)$ формулу сигнатуры $\Sigma = \{\leqslant^{(2)}\}$ от трех свободных переменных x, y, z

$$y \leqslant x \,\&\, z \leqslant x \,\&\, \forall x_0\ [y \leqslant x_0 \,\&\, z \leqslant x_0 \to x \leqslant x_0],$$

т. е. x есть наименьшая верхняя грань для y и z. Обозначим через A предложение сигнатуры Σ

$$\exists x_0\ \exists x_1\ \forall y\ \exists y_0\ \exists y_1\ [y_0 \leqslant x_0 \,\&\, y_1 \leqslant x_1\ \&\ B(y, y_0, y_1)].$$

Пусть D_1^{low} и D_2^{low} — частично упорядоченные множества низких в. п. и низких 2-в. п. степеней соответственно. Из теоремы 2 следует $D_1^{\mathrm{low}} \models A$. Покажем, что $D_2^{\mathrm{low}} \models \neg A$, и на этом доказательство будет завершено. Пусть X_0 и X_1 — произвольные низкие 2-в. п. множества. Так как $X_0' \oplus X_1' \in \Delta_2^0 = \bigcup\limits_{a \in O} \Delta_a^{-1}$, то существует обозначение $a \in O$ такое, что $X_0' \oplus X_1' \in \Delta_a^{-1}$. Тогда $X_0', X_1' \in \Delta_a^{-1}$. По теореме 1 существует низкое 2-в. п. множество Y, которое не T-эквивалентно сочленению никаких двух 2-в. п. множеств, скачки которых лежат в классе Δ_a^{-1}. Следовательно, $Y \not\equiv_T Y_0 \oplus Y_1$ для любых 2-в. п. множеств $Y_0 \leqslant_T X_0$, $Y_1 \leqslant_T X_1$. В силу произвольности выбора X_0 и X_1 получаем $D_2^{\mathrm{low}} \models \neg A$. $\square$

Литература

[1] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств* I, Алгебра и логика **7** (1), 47–74 (1968).

[2] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств* II, Алгебра и логика **7** (4), 15–47 (1968).

[3] Ершов Ю.Л. *Об одной иерархии множеств* III, Алгебра и логика **9** (1), 34–51 (1970).

[4] Арсланов М.М. *Иерархия Ершова* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 2007).

[5] Арсланов М.М. *Структурные свойства степеней ниже* $0'$, Изв. вузов. Математика, № 7, 27–33 (1988).

[6] Downey R.G. *D. r. e. degrees and the nondiamond theorem*, Bull. Lond. Math. Soc. **21**, 43–50 (1989).

[7] Lachlan A.H. *Lower bounds for pairs of recursively enumerable degrees*, Proc. Lond. Math. Soc., III Ser. **16**, 537–569 (1966).

[8] Cooper S.B., Harrington L., Lachlan A.H., Lempp S., Soare R.I. *The d. r. e. degrees are not dense*, Ann. Pure Appl. Logic **55** (2), 125–151 (1991).

[9] Sacks G.E. *The recursively enumerable degrees are dense*, Ann. Math. **80** (2), 300–312 (1964).

[10] Arslanov M., Cooper S.B., Li A. *There is no low maximal d. c. e. degree*, Math. Log. Q. **46** (3), 409–416 (2000); corrigendum ibid. **50** (6), 628–636 (2004).

[11] Welch L. *A hierarchy of families of recursively enumerable degrees and a theorem of founding minimal pairs*, Ph. D. Thesis (University of Illinois, Urbana, 1980).

М.Х. Файзрахманов

аспирант, кафедра алгебры и математической логики,
Казанский государственный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008,

`e-mail:` Marat.Faizrahmanov@ksu.ru

M.Kh. Faizrakhmanov

Postgraduate, Chair of Algebra and Mathematical Logic,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Marat.Faizrahmanov@ksu.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований 09-01-97010, 10-01-00399, МК-1784.2010.1, а также ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры России” (госконтракт П267) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/5367).