ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.764

Е.А. ГОЛУБЕВА

ВНУТРЕННЯЯ ГЕОМЕТРИЯ НОРМАЛИЗОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

В данной работе рассматриваются некоторые вопросы дифференциальной геометрии нормализованного (оснащенного в смысле А.П. Нордена ([1], с. 210)) пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения: $\overline{i},\overline{j},\overline{k},\overline{s}=\overline{0,n}$, $i,j,k,l,s,t=\overline{1,n}$; оператор ∇ действует по закону $\nabla T^{k\overline{l}}_{i\overline{j}}=dT^{k\overline{l}}_{i\overline{j}}+T^{s\overline{l}}_{i\overline{j}}\omega^k_s+T^{k\overline{s}}_{i\overline{j}}\omega^{\overline{l}}_{\overline{s}}-T^{k\overline{l}}_{s\overline{j}}\omega^s_i-T^{k\overline{l}}_{i\overline{s}}\omega^{\overline{s}}_{\overline{j}}$.

1. Пространство проективно-метрической связности

Формы связности $\omega^{\overline{j}}_{\overline{i}}$ пространства проективной связности $P_{n,n}$ подчинены структурным уравнениям

$$D\omega^{\overline{j}}_{\overline{i}}=\omega^{\overline{k}}_{\overline{i}}\wedge\omega^{\overline{j}}_{\overline{k}}+\tfrac{1}{2}R^{\overline{j}}_{\overline{i}st}\omega^s_0\wedge\omega^t_0,\quad \omega^{\overline{k}}_{\overline{k}}=0.$$

Согласно [2] пространством проективно-метрической связности $K_{n,n}$ называется пространство проективной связности $P_{n,n}$, обладающее инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1} (локальных абсолютов).

Критерием того, что пространство проективной связности $P_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов

$$a_{ij}x^ix^j+\tfrac{1}{c}(g_{i0}x^i+cx^0)^2=0,\quad a_{ij}=a_{ji},\quad c=\mathrm{const}\neq 0, \tag{1}$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений

$$dg_{i0}-g_{k0}\omega^k_i-c\omega^0_i=a_{ik}\omega^k_0,\quad da_{ij}-a_{kj}\omega^k_i-a_{ik}\omega^k_j=-\tfrac{1}{c}(a_{ik}g_{j0}+a_{jk}g_{i0})\omega^k_0; \tag{2}$$

при этом форма

$$\omega^0_0=-\tfrac{1}{c}g_{k0}\omega^k_0 \tag{3}$$

становится главной [3].

В случае $R^{\overline{j}}_{\overline{i}st}\equiv 0$, т. е. при $P_{n,n}\equiv P_n$, выполнение уравнений (2) является [4] критерием того, что проективное пространство P_n есть проективно-метрическое пространство K_n с неподвижной гиперквадрикой (1); при этом форма ω^0_0 имеет вид (3).

2. Поля геометрических объектов нормализованного пространства проективно-метрической связности

По аналогии с проективным пространством P_n ([1], с. 210) и пространством проективной связности $P_{n,n}$ ([5], с. 50) пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ назовем нормализованным (оснащенным по А.П. Нордену), если в нем задано поле квазитензора v_i:

$$dv_i-v_j\omega^j_i+\omega^0_i=v_{ij}\omega^j_0.$$

Суть данной нормализации пространства $K_{n,n}$ состоит в задании однозначного, непрерывного и дифференцируемого отображения, ставящего в соответствие каждой точке A_0 базы $K_{n,n}$

гиперплоскость $\Pi_{n-1}(A_0)$ слоя $K_n(A_0)$, не проходящую через центр A_0 слоя; при этом уравнение гиперплоскости $\Pi_{n-1}(A_0)$ имеет вид $v_{\overline{k}}x^{\overline{k}}=0$.

Методом продолжений и охватов в первых трех дифференциальных окрестностях нормализованного пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ построим поля тензоров c_i, b_{ij}, B_i, Λ_i, A_{ijk}:

1) $c_i \stackrel{\text{def}}{=} v_i+\frac{1}{c}g_{i0}$, $dc_i-c_j\omega_i^j=c_{ij}\omega_0^j$; обращение в нуль тензора c_i эквивалентно тому, что нормализация $A_0\to\Pi_{n-1}(A_0)$ пространства $K_{n,n}$ является полярной [3] относительно поля локальных абсолютов (1) (гиперплоскость $\Pi_{n-1}(A_0)$ является полярой центра A_0 слоя $K_n(A_0)$ относительно локальной гиперквадрики (1));

2) $b_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} v_{ij}-v_ic_j$, $\nabla b_{ij}=b_{ijk}\omega_0^k$; тензор b_{ij} (вообще говоря, несимметрический) называется основным тензором нормализации, нормализация пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ с полем симметрического тензора b_{ij} называется *гармонической*;

3) в предположении, что основной тензор b_{ij} нормализации невырожден, т. е. $b\stackrel{\text{def}}{=}|b_{ij}|\neq 0$, справедливо $b_{ik}b^{kj}=b_{ki}b^{jk}=\delta_i^j$, $\nabla b^{ij}+b^{ik}b^{lj}b_{kls}\omega_0^s=0$, $d\ln b=B_k\omega_0^k$, $\quad B_k=b^{ji}b_{ijk}+\frac{2}{c}g_{k0}$, $\quad \nabla B_i= B_{ij}\omega_0^j$;

4) $\Lambda_i\stackrel{\text{def}}{=}B_i-2(n+1)c_i$, $\nabla\Lambda_k=\Lambda_{kl}\omega_0^l$;

5) $A_{ijk}\stackrel{\text{def}}{=}b_{ijk}-v_ib_{kj}-v_jb_{ik}-\frac{1}{n+1}b_{ij}B_k$, $\nabla A_{ijk}=A_{ijkl}\omega_0^l$.

3. Индуцированное пространство проективной связности

Для невырожденным образом нормализованного пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ преобразование $I:\omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}\to\overline{\omega}_{\overline{i}}^{\overline{j}}$ форм связности по закону

$$\begin{gathered}\overline{\omega}_0^i=\omega_0^i,\quad \overline{\omega}_0^0=\omega_0^0-\frac{\Lambda_k}{n+1}\omega_0^k,\quad \overline{\omega}_i^j=\omega_i^j+b^{js}A_{sik}\omega_0^k,\\ \overline{\omega}_i^0=\omega_i^0+\left(v_i\frac{\Lambda_k}{n+1}+b^{ls}v_lA_{sik}-2b_{[ik]}\right)\omega_0^k\end{gathered}\tag{4}$$

является инволютивным, т. е. $I\equiv I^{-1}$; при этом система форм $\{\overline{\omega}_{\overline{i}}^{\overline{j}}\}$ удовлетворяет структурным уравнениям пространства проективной связности $\overline{P}_{n,n}$:

$$D\overline{\omega}_{\overline{i}}^{\overline{j}}=\overline{\omega}_{\overline{i}}^{\overline{k}}\wedge\overline{\omega}_{\overline{k}}^{\overline{j}}+\tfrac{1}{2}\overline{R}_{\overline{i}st}^{\overline{j}}\omega_0^s\wedge\omega_0^t,\quad \overline{\omega}_{\overline{k}}^{\overline{k}}=0,$$

где

$$\begin{aligned}&\overline{R}_{0st}^j=b^{jl}(R_{lst}^0-v_lc_kR_{0st}^k-v_kR_{lst}^k), && \overline{R}_{0st}^0=c_kR_{0st}^k+v_k\overline{R}_{0st}^k,\\ &\overline{R}_{ist}^j=-v_i\overline{R}_{0st}^j-b^{jl}b_{ki}(R_{lst}^k+v_lR_{0st}^k), && \overline{R}_{ist}^0=v_k\overline{R}_{ist}^k+b_{ki}R_{0st}^k-v_ic_kR_{0st}^k.\end{aligned}\tag{5}$$

В силу инволютивности преобразования I пространства $K_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ являются двойственными ([5], с. 43).

Пространство проективно-метрической связности $K_{n,n}$ и пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$ нормализованы одним полем квазитензора v_i, причем гармоничность нормализации одного из этих пространств влечет гармоничность нормализации другого.

Из соотношений (5) следует, что справедливо $\{K_{n,n}\equiv K_n\}\Leftrightarrow\{\overline{P}_{n,n}\equiv\overline{P}_n\}$. При этом проективный репер пространства $\overline{P}_n$, двойственного нормализованному пространству K_n, состоит из $n+1$ линейно независимых гиперплоскостей $\xi_{\overline{i}}$:

$$\begin{gathered}\xi_0=\tfrac{f}{\sqrt[n+1]{b}}[M_1M_2\dots M_n],\quad M_i=A_i+v_iA_0,\quad f=\text{const}\neq 0,\\ \xi_i=\tfrac{f}{\sqrt[n+1]{b}}\sum_k b_{ki}[A_1\dots A_{k-1}A_0A_{k+1}\dots A_n]-v_i\xi_0.\end{gathered}\tag{6}$$

Поэтому справедлива

Теорема 1. *В случае проективно-метрического пространства K_n невырожденная нормализация индуцирует двойственное нормализованное (невырожденным образом) проективно-метрическое пространство $\overline{K}_n$, структурные формы которого имеют строение* (4), *а уравнение абсолюта $\overline{Q}_{n-1}$ пространства $\overline{K}_n$ относительно тангенциального репера* (6) *имеет вид*

$$\overline{a}_{ij}\overline{x}^i\overline{x}^j + \tfrac{1}{c}(\overline{g}_{i0}\overline{x}^i + c\overline{x}^0)^2 = 0, \quad \overline{a}_{ij} = \overline{a}_{ji}, \quad c = \mathrm{const} \neq 0,$$

где

$$\overline{g}_{k0} = g_{k0} + \frac{c}{n+1}\Lambda_k, \quad \overline{a}_{ij} = a_{ij} + c\Big[\frac{\Lambda_{ij}}{n+1} + 2b_{[ij]} - v_i\frac{\Lambda_j}{n+1} - \Big(c_k + \frac{\Lambda_k}{n+1}\Big)b^{kl}A_{lij}\Big].$$

4. Полярная нормализация пространства проективно-метрической связности

Предположим, что нормализация пространства $K_{n,n}$ с полем локальных абсолютов (1) полярная; условием этого, как известно (см. п. 2), является обращение в нуль тензора c_i.

В этом случае справедливо

$$b_{ij} = -\tfrac{1}{c}a_{ij}, \quad \overline{\omega}_{\overline{i}}^{\overline{j}} = \omega_{\overline{i}}^{\overline{j}}, \quad \overline{g}_{i0} = g_{i0}, \quad \overline{a}_{ij} = a_{ij}, \quad \overline{R}_{\overline{i}st}^{\overline{j}} = R_{\overline{i}st}^{\overline{j}}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Полярная нормализация пространства проективно-метрической связности $K_{n,n}$ является гармонической; при этом в случае ее невырожденности* ($|a_{ij}| \neq 0$) *индуцируется двойственное пространство проективно-метрической связности $\overline{K}_{n,n}$, изоморфное исходному пространству, причем уравнения локальных абсолютов пространства $\overline{K}_{n,n}$ относительно подвижного тангенциального репера* (6) *имеют вид* $a_{ij}\overline{x}^i\overline{x}^j + (1/c)(g_{i0}\overline{x}^i + c\overline{x}^0)^2 = 0$.

Следует заметить, что локальный абсолют пространства $\overline{K}_{n,n}$ представляет собой семейство касательных гиперплоскостей к соответствующему локальному абсолюту (1) исходного пространства $K_{n,n}$.

Литература

1. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
3. Столяров А.В. *Пространство проективно-метрической связности* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 70–76.
4. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград: Изд-во Калининградск. ун-та, 2001. – Вып. 32. – С. 94–101.
5. Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий*: Монография. – Чебоксары: Чувашск. гос. педаг. ун-т им. И.Я. Яковлева, 1994. – 290 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступили
полный текст 04.01.2005
краткое сообщение 18.07.2005