И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 12 (547)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.763

Э.А. СУЛЕЙМАНОВА

О СВОЙСТВАХ ГОЛОМОРФНО 2-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЕРВОГО ЛИНЕЙНОГО ТИПА ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР

Теория геодезических отображений псевдоримановых пространств является одним из основных направлений в римановой геометрии. Изучением p-геодезических отображений занимались Н. Синюков [1], С. Лейко [2] и др. В работе [3] определены p-геодезические кривые и p-геодезические отображения пространств с аффинной связностью без кручения, выделены p-геодезические отображения линейных и квадратичных типов.

С использованием результатов, полученных в указанных выше исследованиях, в данной работе изучаются голоморфно 2-геодезические преобразования первого линейного типа почти эрмитовых структур. Введены понятия полуспециального и специального голоморфно 2-геодезического преобразования. Изучен ряд свойств таких преобразований. Показано, что голоморфно-проективные и голоморфно-геодезические преобразования являются частным случаем специальных 2-геодезических преобразований. И во введенных обозначениях доказано, что почти эрмитово многообразие не допускает нетривиальных голоморфно-геодезических преобразований.

Пусть (M, g) — псевдориманово многообразие, ∇ — риманова связность метрики g, $\mathfrak{X}(M)$ — модуль гладких векторных полей на M.

Приведем некоторые определения, используемые в данной статье.

Кривая $\gamma : I \to M$ называется *геодезической* ([4], с. 267), если семейство векторов

$$\dot{\gamma} = \left\{ \dot{\gamma}_s = \frac{d}{dt}\Big|_{t=s} \gamma(t),\ s \in I \right\}$$

параллельно вдоль γ.

Кривая $\gamma : I \to M$ называется *2-геодезической* ([2], с. 80–83), если вдоль нее существует 2-мерное поле плоскостей $E_2(t)$, параллельное вдоль γ относительно ∇ и содержащее касательное векторное поле этой кривой, т. е. $\dot{\gamma}(t) \in E_2(t)$.

Диффеоморфизм $\rho(2) : M \to M$ называется *2-геодезическим преобразованием* ([3], с. 46), если для каждой геодезической кривой γ ее образ $\overline{\gamma} = \rho(2) \circ \gamma$ является 2-геодезической кривой. В частности, если $E_2(t) = L(\dot{\gamma}, K(\dot{\gamma}))$, где K — аффинор, то $\rho(2)$ называется *2-геодезическим преобразованием первого линейного типа*.

Почти эрмитовой (короче, AH-) *структурой* на M ([4], с. 320) называется пара $(J, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$, где J — почти комплексная структура на M ([4], с. 300), g — (псевдо)риманова метрика на M, при этом $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Эндоморфизм J называется *структурным эндоморфизмом*. Многообразие с фиксированной на нем AH-структурой называется *почти эрмитовым многообразием*.

Пусть M^{2n} $(n \geq 2)$ — гладкое многообразие с AH-структурой (J, g). В дальнейшем, если не будет оговорено противное, всегда будем подразумевать, что $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — риманова метрика.

Определение 1. 2-геодезическое преобразование $g \to \widetilde{g}$ метрики g AH-структуры (J, g) назовем *голоморфно 2-геодезическим преобразованием*, если $(J, \widetilde{g})$ также является AH-структурой.

Определение 2. Голоморфно 2-геодезическое преобразование назовем *тривиальным*, если $\nabla = \widetilde{\nabla}$.

Поднимая индекс у метрики $\widetilde{g}$ с помощью метрики g, получим самосопряженный эндоморфизм h модуля $\mathfrak{X}(M)$, который будет задаваться тождеством

$$\widetilde{g}(X, Y) = g(X, hY), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Назовем этот эндоморфизм h *оператором деформации метрики.*

Заметим, что имеют место следующие свойства:

1) $h \circ J = J \circ h$,

2) $\langle\langle hX, Y\rangle\rangle = \langle\langle X, hY\rangle\rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

где $\langle\langle \cdot, \cdot\rangle\rangle$ — невырожденная каноническая эрмитова форма на M ([4], с. 321).

1. Голоморфно 2-геодезические преобразования первого линейного типа почти эрмитовых структур

Рассмотрим 2-геодезические преобразования первого линейного типа многообразия (M, g). Пусть ∇ — риманова связность метрики g, $\widetilde{\nabla}$ — риманова связность метрики $\widetilde{g} = (\rho(2))^* g$. Пусть $T = \widetilde{\nabla} - \nabla$ — тензор аффинной деформации связностей. Тогда ([2], с. 80–83) основные уравнения 2-геодезических преобразований первого линейного типа в безиндексной форме имеют вид

$$\begin{aligned} &T(X, Y) = \underset{0}{\omega}(X)Y + \underset{0}{\omega}(Y)X + \underset{1}{\omega}(X)KY + \underset{1}{\omega}(Y)KX, \\ &\widetilde{\nabla}_X(K)Y + \widetilde{\nabla}_Y(K)X + K \circ T(X, Y) = \\ &\qquad = \underset{0}{\overset{1}{\omega}}(X)Y + \underset{0}{\overset{1}{\omega}}(Y)X + \underset{1}{\overset{1}{\omega}}(X)K(Y) + \underset{1}{\overset{1}{\omega}}(Y)K(X), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\underset{0}{\omega}$, $\underset{1}{\omega}$, $\underset{0}{\overset{1}{\omega}}$, $\underset{1}{\overset{1}{\omega}}$ — ковекторы, K — аффинор.

С учетом (1) имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X(J)Y = \nabla_X(J)Y + \underset{0}{\omega}(JY)X - \underset{0}{\omega}(Y)JX + \\ + \underset{1}{\omega}(X)K(JY) + \underset{1}{\omega}(JY)K(X) - \underset{1}{\omega}(X)JK(Y) - \underset{1}{\omega}(Y)JK(X). \end{aligned} \tag{2}$$

В ([4], с. 328–335) были определены структурный и виртуальный тензоры почти эрмитовой структуры. Пусть $\widetilde{C}$ и $\widetilde{B}$ — структурный и виртуальный тензоры AH-структуры $(J, \widetilde{g})$. Найдем связь между этими тензорами. Используя (2), получим

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(X, Y) = C(X, Y) + \\ + \frac{1}{2}[\underset{1}{\omega}(JX)K(JY) + \underset{1}{\omega}(JY)K(JX) - \underset{1}{\omega}(X)K(Y) - \underset{1}{\omega}(Y)K(X) - \\ - \underset{1}{\omega}(X)JK(JY) - \underset{1}{\omega}(JY)JK(X) - \underset{1}{\omega}(JX)JK(Y) - \underset{1}{\omega}(Y)JK(JX)]; \\ \widetilde{B}(X, Y) = B(X, Y) + \underset{0}{\omega}(JY)JX + \underset{0}{\omega}(Y)X + \\ + \frac{1}{2}[\underset{1}{\omega}(JX)K(JY) + \underset{1}{\omega}(JY)K(JX) + \underset{1}{\omega}(X)K(Y) + \underset{1}{\omega}(Y)K(X) + \\ + \underset{1}{\omega}(X)JK(JY) + \underset{1}{\omega}(JY)JK(X) - \underset{1}{\omega}(JX)JK(Y) - \underset{1}{\omega}(Y)JK(JX)]. \end{aligned}$$

2. Полуспециальные голоморфно 2-геодезические преобразования

Наложим на невырожденный оператор K дополнительное условие

$$K \circ J = J \circ K. \tag{3}$$

Определение 3. Если оператор K удовлетворяет условию (3), то голоморфно 2-геодезическое преобразование первого линейного типа AH-структуры назовем *полуспециальным.*

Теорема 1. *Пусть оператор K невырожден и коммутирует с J. Тогда голоморфно 2-геодезическое преобразование первого линейного типа сохраняет структурный тензор.*

Теорема 2. *Для полуспециальных голоморфно 2-геодезических преобразований выполняются соотношения*

$$\begin{aligned}
&\widetilde{C}(X,Y) = C(X,Y),\\
&\widetilde{B}(X,Y) = B(X,Y) + \underset{0}{\omega}(JY)JX + \underset{0}{\omega}(Y)X + \underset{1}{\omega}(JY)K(JX) + \underset{1}{\omega}(Y)K(X).
\end{aligned}$$

3. Специальные голоморфно 2-геодезические преобразования

Потребуем, чтобы оператор K имел вид

$$K = \alpha \,\mathrm{id} + \beta J, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \text{причем} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{4}$$

Теорема 3. *Голоморфно 2-геодезическое преобразование первого линейного типа почти эрмитовой структуры при $K = \alpha\,\mathrm{id} + \beta J$, где $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, удовлетворяет условию $\underset{0}{\omega} = \underset{1}{\omega} \circ (-\alpha\,\mathrm{id} + \beta J)$.*

Определение 4. Если выполняются условия (4), то данное голоморфно 2-геодезическое преобразование первого линейного типа AH-структуры будем называть *специальным.*

Теорема 4. *Ковариантная производная оператора структуры ∇J, а также структурный и виртуальный тензоры C и B являются инвариантами специальных голоморфно 2-геодезических преобразований AH-структуры.*

Следствие 1. Специальные голоморфно 2-геодезические преобразования квазикелерову структуру переводят в квазикелерову, приближенно келерову — в приближенно келерову, а келерову структуру — в келерову.

4. Голоморфно-проективные и голоморфно-геодезические преобразования как частный случай специальных голоморфно 2-геодезических преобразований

Диффеоморфизм φ псевдориманова пространства V_n на псевдориманово пространство $\overline{V}_n$ называется *геодезическим отображением* ([5], с. 49), если в результате действия φ геодезические линии V_n переходят в геодезические линии $\overline{V}_n$.

Пусть M^{2n} — AH-многообразие с заданной на нем AH-структурой $(J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Геодезическое преобразование φ на M, сохраняющее структурный эндоморфизм J, т. е. $\varphi^*(J) = J$, называется *голоморфно-геодезическим преобразованием* ([5], с. 49).

Пусть M — многообразие аффинной связности. Кривая $\gamma : (a,b) \to M$ называется *h-геодезической* ([6], с. 71), если любой ее касательный вектор ξ_p после параллельного переноса вдоль этой кривой из точки p в любую ее точку q принадлежит линейной оболочке векторов ξ_q и $(J\xi)_q$.

Диффеоморфизм $\varphi : M \to \overline{M}$ AH-многообразия $(M, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ на AH-многообразие $(\overline{M}, \overline{J}, \overline{g})$ называется *голоморфно-проективным отображением* ([7], с. 11), если оно любую h-геодезическую многообразия (M, J, g) переводит в h-геодезическую многообразия $(\overline{M}, \overline{J}, \overline{g})$, причем

$\varphi_* \circ J = \overline{J} \circ \varphi_*$, где φ_* — отображение увлечения тензорной алгебры многообразия M, порожденное диффеоморфизмом φ. В этом случае на M возникает новая AH-структура $(\widetilde{g} = \varphi^* \overline{g}, J)$, которая называется *голоморфно-проективным преобразованием* исходной структуры.

Переход от AH-структуры (g, J) к AH-структуре $(\widetilde{g}, J)$ называется *голоморфно-проективным преобразованием структуры* ([7], с. 11), если эти структуры имеют общие h-геодезические.

Предложение. *Во введенных обозначениях голоморфно-проективное преобразование является специальным голоморфно 2-геодезическим преобразованием с* $\alpha = 0$, $\beta = 1$, *а голоморфно-геодезическое преобразование является специальным голоморфно 2-геодезическим преобразованием с* $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Следствие 2. Во введенных обозначениях почти эрмитово многообразие не допускает нетривиальных голоморфно-геодезических преобразований.

Отметим, что этот результат был впервые получен в ([5], с. 57) другими средствами.

Литература

1. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
2. Лейко С.Г. *Линейные p-геодезические диффеоморфизмы многообразий с аффинной связностью* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 5. – С. 80–83.
3. Лейко С.Г. *Дифференциальная геометрия обобщенно-геодезических отображений многообразий и их касательных расслоений*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Одесса: ОГУ, 1994.
4. Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
5. Абоуд Х.М. *Голоморфно-геодезические преобразования почти эрмитовых многообразий*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Москва, 2002.
6. Otsuki T., Tashiro Y. *On curves in Kählerian spaces* // Math. J. Okayama univ. – 1954. – V. 4. – № 1. – P. 57–78.
7. Кириченко В.Ф. *Обобщенные классы Грея–Хервеллы и голоморфно-проективные преобразования обобщенных почти эрмитовых структур* // Изв. РАН. – 2005. – Т. 69. – № 5. – С. 109–134.

Московский педагогический государственный университет

Поступили
полный текст 08.05.2007
краткое сообщение 10.12.2007