ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 519.48

А.Г. ПИНУС

N-ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ВЛОЖИМОСТЬ И N-УСЛОВНЫЕ ТЕРМЫ

В работах автора [1], [2] было введено понятие условного терма и установлена связь категорий вложимости универсальных классов алгебр с условной рациональной эквивалентностью этих классов (равными выразительными возможностями определяемыми на алгебрах этих классов с помощью условных термов). В данной работе полученные результаты распространяются на случай условий, определяемых в более общем смысле.

Пусть n — произвольное натуральное число или $n = e$, где $e \notin \omega$. Элементарную формулу некоторой сигнатуры σ, имеющую в пренексной нормальной форме не более чем n перемен кванторов, будем называть n-формулой. Если $n = e$, то под n-формулой понимаем любую элементарную формулу. Полным набором n-условий в сигнатуре σ будем называть любой набор $\{\phi_1(\overline{x}), \dots, \phi_k(\overline{x})\}$ n-формул этой сигнатуры со свободными переменными $\overline{x}$ такой, что формула $\forall \overline{x} \bigvee\limits_{i=1}^{k} \phi_i(\overline{x})$ является тождественно истинной, а для любых различных $l, m \leq k$ формулы $\phi_l(\overline{x}) \mathbin{\&} \phi_m(\overline{x})$ не выполнимы.

Определение 1. Понятие n-условного терма, где $n \in \omega$ или $n = e$, сигнатуры σ введем с помощью следующей индукции:

а) все переменные являются n-условными термами;

б) если $t_1(\overline{x}), \dots, t_k(\overline{x})$ — условные термы сигнатуры σ и $f(x_1, \dots, x_k)$ — функциональный знак этой сигнатуры, то $f(t_1(\overline{x}), \dots, t_k(\overline{x}))$ — также n-условный терм этой сигнатуры;

в) если $t_1(\overline{x}), \dots, t_k(\overline{x})$ — n-условные термы, а $\phi_1(\overline{x}), \dots, \phi_k(\overline{x})$ — полный набор n-условий сигнатуры σ, то

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \phi_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}), \\ \dots\dots\dots \\ \phi_k(\overline{x}) \to t_k(\overline{x}) \end{cases}$$

также является n-условным термом этой сигнатуры;

г) любой n-условный терм строится за конечное число шагов с помощью правил а), б), в).

Если $\mathfrak{A}$ — универсальная алгебра сигнатуры σ, то любой n-условный терм $t(\overline{x})$ ($n \in \omega$ или $n = e$) данной сигнатуры естественным образом определяет некоторую функцию (n-условно-термальную функцию) на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$.

Укажем необходимую интерпретацию лишь для случая в) из определения 1: если $\overline{b}, a \in \mathfrak{A}$ и n-условный терм $t(\overline{x})$ построен из n-условных термов $t_1(\overline{x}), \dots, t_k(\overline{x})$ и n-условий $\phi_1(\overline{x}), \dots, \phi_k(\overline{x})$ с помощью правила в), то $\mathfrak{A} \models t(\overline{b}) = a$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \phi_l(\overline{b})$ и $\mathfrak{A} \models t_l(\overline{b}) = a$ для некоторого $l \leq k$.

Легко видеть, что понятие условного терма, введенное в [1], соответствует понятию 0-условного терма, определенному выше.

Очевидно, что любой n-условный терм (любая n-условно термальная функция на универсальной алгебре) является m-условным термом (m-условно термальной функцией), если $n \leq m$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-011-1520).

Скажем, что n-условный терм $t(\overline{x})$ имеет нормальную форму, если

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \phi_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}), \\ \dots\dots\dots \\ \phi_k(\overline{x}) \to t_k(\overline{x}), \end{cases}$$

где $t_i(\overline{x})$ $(i \leq k)$ — стандартные термы рассматриваемой сигнатуры, а $\{\phi_1(\overline{x}), \dots, \phi_k(\overline{x})\}$ — полный набор n-условий.

Так же, как и в [1], без труда доказывается

Лемма. *Для любого n-условного терма $t(\overline{x})$ сигнатуры σ существует n-условный терм $t'(\overline{x})$ той же сигнатуры, имеющий нормальную форму и определяющий на универсальных алгебрах сигнатуры σ те же n-условно термальные функции, что и n-условный терм $t(\overline{x})$.*

Равенство двух n-условных термов $t_1(\overline{x}_1) = t_2(\overline{x}_2)$ назовем n-условным тождеством, и истинность этого n-условного тождества на универсальной алгебре $\mathfrak{A}$ интерпретируется как совпадение значений n-условно термальных функций, определяемых на $\mathfrak{A}$ термами $t_1(\overline{x}_1)$ и $t_2(\overline{x}_2)$ при любых значениях аргументов. Класс универсальных алгебр $\mathfrak{K}$, на которых истинна некоторая совокупность n-условных тождеств, назовем n-условным многообразием.

Для любого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр сигнатуры σ через $\mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K})$ (здесь, как и выше, $n \in \omega$ или $n = e$) обозначим наименьшее n-условное многообразие, содержащее класс $\mathfrak{K}$. Пусть $P_u(\mathfrak{K})$ обозначает класс всех ультрапроизведений $\mathfrak{K}$-алгебр, а $IS_n(\mathfrak{K})$ — класс всех алгебр рассматриваемой сигнатуры, изоморфных некоторой n-элементарной подалгебре какой-либо $\mathfrak{K}$-алгебры. Как обычно, подалгебру $\mathfrak{L}$ универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ называем n-элементарной подалгеброй, если для любой n-формулы $\phi(\overline{x})$ и любых элементов $\overline{a} \in \mathfrak{L}$ значения истинности формулы $\phi(\overline{a})$ на $\mathfrak{L}$ и на $\mathfrak{A}$ эквивалентны. Таким образом, e-элементарные подалгебры — это просто элементарные подалгебры.

Очевидно, что любое n-условное многообразие содержит одноэлементную алгебру соответствующей сигнатуры. Через $(\mathfrak{K})_l$ обозначим расширение класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр путем добавления к нему одноэлементной алгебры соответствующей сигнатуры. Напомним, что Π_{n+1}-класс — это элементарный класс, аксиоматизируемый Π_{n+1}-формулами — формулами с не более чем n переменами кванторов в пренексной нормальной форме и начинающихся с квантора всеобщности. Имеет место следующее обобщение теоремы 2 из [1].

Теорема 1. *Для любого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр сигнатуры σ, для любого $n \in \omega$ либо $n = e$ имеет место равенство $\mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K}) = (IS_nP_u(\mathfrak{K}))_l$.*

Доказательство. Любое n-условное тождество эквивалентно некоторой элементарной формуле и, тем самым, для любого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр имеет место включение $P_u(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K})$. В силу леммы очевидным образом имеет место включение $IS_nP_u(\mathfrak{K}) \subseteq \mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K})$. А т. к. одноэлементная алгебра входит в любое n-условное многообразие, то для любого класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр справедливо включение $(IS_nP_u(\mathfrak{K}))_l \subseteq \mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K})$. Для доказательства обратного включения прежде всего отметим, что $(IS_nP_u(\mathfrak{K}))_l$ является наименьшим Π_{n+1}-классом, содержащим класс $\mathfrak{K}$ и одноэлементную алгебру (здесь $n+1 = e$ в случае $n = e$).

Пусть теперь $\mathfrak{A}$ — неодноэлементная алгебра из класса $\mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K})$ и $\phi = \forall\overline{x}\ \ \psi(\overline{x})$ — некоторая Π_{n+1}-формула ($\psi(\overline{x})$ — n-формула), истинная на всех $\mathfrak{K}$-алгебрах. Определим n-условный терм

$$t(\overline{x}, x_1, x_2) = \begin{cases} \psi(\overline{x}) \to x_1, \\ \neg\psi(\overline{x}) \to x_2. \end{cases}$$

Тогда истинность n-условного тождества $t(\overline{x}, x_1, x_2) = x_1$ на любой неодноэлементной алгебре равносильна истинности на этой алгебре формулы ϕ. Тем самым, т. к. $\mathfrak{K} \vDash t(\overline{x}, x_1, x_2) = x_1$, то $\mathfrak{A} \vDash t(\overline{x}, x_1, x_2) = x_1$, и, значит, $\mathfrak{A} \vDash \phi$, т. е. $\mathfrak{A} \in (IS_nP_u(\mathfrak{K}))_l$. Последнее и доказывает требуемое равенство $\mathfrak{M}^*_n(\mathfrak{K}) = (IS_nP_u(\mathfrak{K}))_l$. $\square$

Следствие. Для любого $n \in \omega$ либо $n = e$ Π_{n+1}-классы универсальных алгебр, содержащие одноэлементную алгебру соответствующей сигнатуры, и только они являются n-условными многообразиями.

Определение 2. Два класса алгебр $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ сигнатур соответственно σ_1 и σ_2 назовем n-условно рационально эквивалентными ($\mathfrak{K}_1 \equiv^n \mathfrak{K}_2$), если существуют отображения F_1 (F_2) сигнатурных символов операций из σ_1 (σ_2) в n-условные термы сигнатур σ_2 (σ_1) такие, что для m-арного символа $f \in \sigma_1$ (σ_2) $F_1(f)$ ($F_2(f)$) есть m-арный n-условный терм сигнатуры σ_2 (σ_1) и при этом

1) для любой $\mathfrak{K}_1$-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_1 \rangle$ алгебра $F_2(\mathfrak{A}) = \langle A; \sigma_2 \rangle \in \mathfrak{K}_2$, где σ_2-операции алгебры $F_2(\mathfrak{A})$ определены $F_2(\sigma_2)$-n-условными термами алгебры $\mathfrak{A}$;
2) для любой $\mathfrak{K}_2$-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma_2 \rangle$ алгебра $F_1(\mathfrak{A}) = \langle A; \sigma_1 \rangle \in \mathfrak{K}_1$, где σ_1-операции алгебры $F_1(\mathfrak{A})$ определены $F_1(\sigma_1)$-n-условными термами алгебры $\mathfrak{A}$.
3) для любой $\mathfrak{K}_1$-алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $F_1(F_2(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$;
4) для любой $\mathfrak{K}_2$-алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место равенство $F_2(F_1(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$.

Заметим, что 0-условная рациональная эквивалентность ($\mathfrak{K}_1 \equiv^0 \mathfrak{K}_2$) соответствует понятию условной рациональной эквивалентности ($\mathfrak{K}_1 \equiv_{\text{c.r.e}} \mathfrak{K}_2$) из [2].

Для класса $\mathfrak{K}$ универсальных алгебр и любого $n \in \omega$, либо $n = e$, через $\mathfrak{K}^{(n)}$ обозначим обогащение $\mathfrak{K}$-алгебр за счет добавления в сигнатуру σ класса $\mathfrak{K}$ новых функциональных символов $q_t(\overline{x})$ для каждого n-условного терма $t(\overline{x})$ сигнатуры σ. При этом функциональные символы $q_t(\overline{x})$ на $\mathfrak{K}^{(n)}$-алгебрах будем интерпретировать с помощью n-условно термальных функций, соответствующих на $\mathfrak{K}$-алгебрах n-условным термам $t(\overline{x})$. Через $\sigma^{(n)}$ обозначим сигнатуру класса $\mathfrak{K}^{(n)}$, а через $\mathfrak{A}^{(n)}$ — соответствующее обогащение $\mathfrak{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ до алгебры из $\mathfrak{K}^{(n)}$. Класс $\mathfrak{K}^{(n)}$ выделяется среди класса всех алгебр сигнатуры $\sigma^{(n)}$ аксиомами класса $\mathfrak{K}$ и n-условными тождествами $q_t(\overline{x}) = t(\overline{x})$, а т. к. последние эквивалентны Π_{n+1}-формулам, то в случае, когда класс $\mathfrak{K}$ есть Π_{n+1}-класс универсальных алгебр, класс $\mathfrak{K}^{(n)}$ также является Π_{n+1}-классом.

Пусть φ — некоторое изоморфное вложение неодноэлементной алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{K}$. Отображение φ является изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{A}^{(n)}$ в алгебру $\mathfrak{A}_1^{(n)}$ тогда и только тогда, когда φ является n-элементарным вложением алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $\mathfrak{A}_1$, т. е. тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathfrak{A})$ является n-элементарной подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_1$. В одну сторону это утверждение непосредственно следует из определения n-условных термов, а для доказательства того, что $\varphi(\mathfrak{A})$ есть n-элементарная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_1$ в случае, когда φ есть вложение $\mathfrak{A}^{(n)}$ в $\mathfrak{A}_1^{(n)}$, достаточно для любой n-формулы $\psi(\overline{x})$ сигнатуры σ рассмотреть функцию $q_t(\overline{x}, x_2, x_2) \in \sigma^{(n)}$, соответствующую n-условному терму

$$t(\overline{x}, x_1, x_2) = \begin{cases} \psi(\overline{x}) \to x_1, \\ \neg\psi(\overline{x}) \to x_2. \end{cases}$$

Для произвольной категории $\mathfrak{G}$ универсальных алгебр, объектами которой выступают алгебры некоторого класса универсальных алгебр, а морфизмами – какие-то отображения этих алгебр друг в друга, через $\mathrm{Set}_{\mathfrak{G}}$ обозначим стирающий функтор из категории $\mathfrak{G}$ в категорию множеств.

Определение 3. Будем говорить, что две пары категорий универсальных алгебр $\langle \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1' \rangle$ и $\langle \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2' \rangle$ эквивалентны ($\langle \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_1' \rangle \sim \langle \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_2' \rangle$) в случае, когда $\mathfrak{G}_i'$ являются полными подкатегориями категорий $\mathfrak{G}_i$, если существует изоморфизм F категории $\mathfrak{G}_1$ на категорию $\mathfrak{G}_2$ такой, что $F(\mathfrak{G}_1') = \mathfrak{G}_2'$ и $\mathrm{Set}_{\mathfrak{G}_2} \cdot F = \mathrm{Set}_{\mathfrak{G}_1}$.

В случае $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_1'$ будем, как обычно, говорить об эквивалентности категорий $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$.

Через $IS(\mathfrak{K})$ обозначим класс алгебр, изоморфных подалгебрам $\mathfrak{K}$-алгебр. Пусть $\overrightarrow{\mathfrak{K}}$ так же, как и в [2], обозначает категорию, объектами которой являются $\mathfrak{K}$-алгебры, а морфизмами —

изоморфные вложения этих алгебр друг в друга плюс гомоморфизмы этих алгебр на одноэлементную алгебру, если последняя принадлежит $\mathfrak{K}$. Через $\overset{n\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}$ обозначим категорию, объектами которой являются $\mathfrak{K}$-алгебры, а морфизмами — n-элементарные вложения друг в друга плюс гомоморфизмы этих алгебр на одноэлементную алгебру, если последняя принадлежит $\mathfrak{K}$. В силу определения n-условных термов любая подалгебра универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ замкнута относительно n-условно термальных функций алгебры $\mathfrak{A}$. Таким образом, носители подалгебр $\mathfrak{K}$-алгебр и $\mathfrak{K}^{(n)}$-алгебр суть одни и те же, однако изоморфизм обеднений до сигнатуры σ двух алгебр из $IS(\mathfrak{K}^{(n)})$ не влечет изоморфизма самих алгебр из $IS(\mathfrak{K}^{(n)})$. С другой стороны, если $\mathfrak{K}$ является Π_{n+1}-классом, то любая n-элементарная подалгебра $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ сама также принадлежит классу $\mathfrak{K}$. В силу замеченного выше о том, что изоморфное вложение φ неодноэлементной $\mathfrak{K}$-алгебры $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{K}$-алгебру $\mathfrak{A}'$ будет изоморфным вложением алгебры $\mathfrak{A}^{(n)}$ в алгебру $\mathfrak{A}_1^{(n)}$ тогда и только тогда, когда φ является n-элементарным вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}_1$, категория $\overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}^{(n)}$ эквивалентна категории n-элементарных вложений $\mathfrak{K}$-алгебр друг в друга (где $\mathfrak{K}$ — произвольный Π_{n+1}-класс универсальных алгебр) с добавленными гомоморфизмами на одноэлементную алгебру, если последняя принадлежит $\mathfrak{K}$. Приведенные рассуждения делают естественным следующее

Определение 4. Два Π_{n+1}-класса алгебр $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ назовем эквивалентными относительно n-элементарных вложений внутри классов их n-условно термальных подалгебр, если эквивалентны пары категорий $\langle (IS\overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_1^{(n)})_l, \overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_1^{(n)} \rangle$ и $\langle (IS\overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_2^{(n)})_l, \overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_2^{(n)} \rangle$.

В [2] установлена связь 0-условно рациональной эквивалентности 0-условных многообразий $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ с эквивалентностью категорий вложимости на $\mathfrak{K}_1$- и $\mathfrak{K}_2$-алгебрах. Теорема 2 является параллелью этого результата для случая e-условно рациональной эквивалентности e-условных многообразий.

Теорема 2. *Два Π_e-класса алгебр $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ e-условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда эти классы эквивалентны относительно e-элементарных вложений внутри классов их e-условно термальных подалгебр.*

Доказательство. В силу того, что совокупность элементарных формул замкнута относительно подстановки в них вместо атомных подформул элементарных формул, очевидным образом из e-условно рациональной эквивалентности e-условных многообразий $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ (с помощью отображений F_1, F_2) получаем, что совокупности e-условно термальных функций для пар алгебр $\mathfrak{A}_1$, $F_2(\mathfrak{A}_1)$ и $\mathfrak{A}_2$, $F_1(\mathfrak{A}_2)$ совпадают (где $\mathfrak{A}_1 \in \mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{A}_2 \in \mathfrak{K}_2$). Тем самым эквивалентность относительно e-элементарных вложений внутри класса своих e-условно термальных подалгебр любых двух e-условно рационально эквивалентных классов очевидным образом следует из определений. Заметим обратное. Пусть $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ эквивалентны относительно e-элементарных вложений внутри классов своих e-условно термальных подалгебр и пусть F — изоморфизм категории $(IS\overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_1^{(e)})_l$ на категорию $(IS\overset{\rightarrowtail}{\mathfrak{K}}{}_2^{(e)})_l$, коммутирующий со стирающими функторами этих категорий и такой, что $F(\mathfrak{K}_1^{(e)}) = \mathfrak{K}_2^{(e)}$. В силу теоремы 2 из [2] классы алгебр $(IS\mathfrak{K}_1^{(e)})_l$ и $(IS\mathfrak{K}_2^{(e)})_l$ будут условно рационально эквивалентны. Как это следует из доказательства теоремы А.И. Мальцева [3] о рационально эквивалентных многообразиях, на котором в свою очередь основано доказательство теоремы 2 из [2], полученная условная рациональная эквивалентность классов $(IS\mathfrak{K}_1^{(e)})_l$ и $IS\mathfrak{K}_2^{(e)})_l$ будет определять условную рациональную эквивалентность классов $\mathfrak{K}_1^{(e)}$ и $\mathfrak{K}_2^{(e)}$ (в силу равенства $F(\mathfrak{K}_1^{(e)}) = \mathfrak{K}_2^{(e)}$). Но на алгебрах классов $\mathfrak{K}_1^{(e)}$ и $\mathfrak{K}_2^{(e)}$ любая условно термальная функция очевидным образом совпадает с некоторой e-условно термальной функцией обеднений этих алгебр до исходных сигнатур классов $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ соответственно. Тем самым, действительно классы $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ оказываются e-условно рационально эквивалентными. $\square$

Следующий пример показывает невозможность описания e-условно термальной эквивалентности классов алгебр лишь на языке категорий e-элементарной вложимости без привлечения категорий e-условно термальных подалгебр. Пусть $\mathfrak{K}_1$ является классом универсальных алгебр элементарно эквивалентных алгебре $\mathfrak{A}_1 = \langle Z; x+1\rangle$, где Z — совокупность целых чисел, и сигнатура класса $\mathfrak{K}_1$ состоит из одной одноместной функции $f(x) = x+1$. Очевидно, что $\mathfrak{K}_1$ является Π_2-классом. Пусть $\mathfrak{K}_2$ — Π_1-класс алгебр, элементарно эквивалентных алгебре $\mathfrak{A}_2 = \langle Z; x+1, x-1\rangle$. Очевидно, что любые изоморфные вложения между $\mathfrak{K}_1$-алгебрами (между $\mathfrak{K}_2$-алгебрами) будут элементарными. Таким образом, очевидно, что категории элементарных вложений для классов $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ эквивалентны. В то же время классы $\mathfrak{K}_1$ и $\mathfrak{K}_2$ не являются e-условно рационально эквивалентными: функция $x-1$ на множестве Z не совпадает ни с какой e-условно термальной функцией $g(x)$ на алгебре $\mathfrak{A}_1$, т. к. для любой e-условно термальной функции $g(x)$ на алгебре $\mathfrak{A}_1$ справедливо утверждение

$$\mathfrak{A}_1 \models \forall x \ (g(x) \geq x)$$

или, если опустить отношение порядка $\mathfrak{A}_1 \models \forall x \exists$ натуральное n такое, что $g(x) = (x+1) + \cdots + 1$ (n раз). В связи с теоремой 2 является естественным

Вопрос. Как надо (если это возможно) изменить определение e-условия в определении e-условного терма, чтобы эквивалентность категорий элементарных вложений была равносильна соответствующей рациональной эквивалентности элементарных классов универсальных алгебр.

В заключение заметим, что если L — некоторый логический язык, замкнутый относительно конъюнкций и отрицаний, и мы определим L-условные термы с помощью L-условий, в качестве которых будут выступать любые L-формулы, то остаются справедливыми утверждения леммы и следствия, где в последнем вместо Π_{n+1}-классов для L-условных многообразий выступают $\forall$-L-формулы (т. е. универсальные замыкания L-формул). Остается справедливым также и утверждение теоремы 2 для языков L, в которых совокупность L-формул замкнута относительно подстановки L-формул вместо атомных подформул в L-формулы. В качестве подобных L-языков могут, в частности, выступать бесконечные языки типа $L_{\alpha,\beta}$, языки с обобщенными кванторами, язык второго порядка и т. д.

Литература

1. Пинус А.Г. *Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах* // Вычисл. системы. – 1996. – Т. 156. – С. 59–78.
2. Пинус А.Г. *Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность* // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37. – № 4. – С. 381–408.
3. Мальцев А.И. *Структурная характеристика некоторых классов алгебр* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 1. – С. 29–32.

Новосибирский государственный технический университет

Поступила 01.10.1996