ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.929

А.А. ЩЕГЛОВА

ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ АРГУМЕНТА

1. Введение

В настоящее время системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с отклоняющимся аргументом находят весьма широкое приложение, что в равной степени относится и к алгебро-дифференциальным системам (АДС). Поэтому постоянно растущий интерес к исследованиям в этой области вполне закономерен. На фоне увеличения числа работ по каждой из этих тематик в отдельности почти нет исследований по АДС с отклоняющимся аргументом (некоторые из приложений таких систем указаны в [1]). Это частично связано с тем, что и сейчас далеко не во всех вопросах, касающихся АДС как таковых, достигнута предельная ясность (особенно это относится к нелинейным АДС высокого индекса), а также с тем, что при изучении АДС с отклонением возникают дополнительные трудности, требующие построения специальной теории.

Среди работ, касающихся АДС с отклоняющимся аргументом, хотелось бы отметить [2], [3], посвященные системам с постоянными коэффицентами

$$Ax'(t) = Bx(t) + Cx(t-\alpha) + Dx'(t-\alpha) + f(t), \quad t \geq 0, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0, \quad \det A = 0,$$
$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\alpha, 0].$$

В первой из них в условиях регулярности пучка $\lambda A - B$ $(D = O)$ изучается вопрос о существовании согласованных начальных данных. А во второй — в предположении, что регулярен пучок $\lambda A - B - \omega C - \lambda\omega D$ ($\lambda A - B$ сингулярный), для этой системы строится структурная форма, позволяющая судить о поведении решения.

В данной работе на базе имеющейся теории линейных АДС (см., в частности, [4], [5]) показано, что при некоторых ограничениях на входные данные для АДС с отклоняющимся аргументом

$$A(t)y'(t) = B(t)y(t) + \sum_{i=0}^{p} D_i(t)y^{(i)}(t-\sigma(t)) + f(t), \quad t \in T = [t_0, t_k), \tag{1}$$
$$y(t) = \psi(t), \quad t \in [t_n, t_0), \tag{2}$$

$t_n = \min\limits_{t\in T}(t-\sigma(t))$, существует линейный дифференциальный оператор, преобразующий уравнение (1) к виду

$$y'(t) = P(t)y(t) + \sum_{j=1}^{s} G_j(t)y(t-\widetilde{\sigma}_j(t)) + \widetilde{f}(t), \quad t \in T,$$

для которого начальное множество остается прежним, т.е. $\min\limits_{t\in T,\ 1\leq j\leq s}(t-\widetilde{\sigma}_j(t)) = t_n$, а $y(t)$ при $t < t_0$ определяется условием (2). Здесь $y(t)$ — n-мерная искомая вектор-функция, $A(t)$, $B(t)$, $D_i(t)$ и $G_j(t)$ — $(n\times n)$-матрицы, $\psi(t)$ и $f(t)$ — заданные n-мерные векторы. Кроме того, $\sigma(t), \widetilde{\sigma}_j(t) > 0$, $j = \overline{1,s}$, $\det A(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Системе уравнений (1), (2) ставится в соответствие эквивалентная ей в смысле решения краевая задача для некоторой АДС, что позволяет определить величину индекса неразрешенности (см. ниже) исходной системы. При этом существенно используется понятие левого регуляризирующего оператора (ЛРО) (о ЛРО см., главным образом, [5]).

2. Левый регуляризирующий оператор для АДС

Рассмотрим линейную АДС

$$A(t)x'(t) = B(t)x(t) + f(t), \quad t \in T. \tag{3}$$

Матрица $A(t)$ по-прежнему вырождена для любого $t \in T$, $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ — достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции.

Под решением системы (3) будем понимать непрерывно дифференцируемую на T n-мерную вектор-функцию $x(t)$, обращающую уравнение (3) в тождество на T.

Определение 1. Левым регуляризирующим оператором для системы (3) называется оператор

$$L = \sum_{j=0}^{l} L_j(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^j, \tag{4}$$

$L_j(t)$ — $(n \times n)$-матрицы из $\mathcal{C}(T)$, такой, что

$$L[A(t)x'(t) - B(t)x(t)] = x'(t) - L[B(t)]x(t) \quad \forall x \in \mathcal{C}^{l+1}(T).$$

При этом минимально возможное $l \geq 0$, при котором для (3) на T определен ЛРО, будем называть индексом неразрешенности системы (3) относительно производных (или, короче, индексом).

Существование ЛРО равносильно тому, что решение уравнения (3) существует и представимо в виде $x(t) = \Phi(t)c + \phi(t)$, где $c \in R^n$, $\Phi(t)$ — некоторая $(n \times n)$-матрица, $\phi(t)$ — n-мерный вектор, причем $\Phi(t), \phi(t) \in \mathcal{C}^1(T)$, $\operatorname{rank}\Phi(t) = \mathrm{const} \leq n$ $\forall t \in T$, и на любом сужении промежутка T нет решений, отличных от данного [5]. $\mathcal{C}(T)$, $\mathcal{C}^k(T)$ — пространства векторно- или матричнозначных функций (смотря по контексту), непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых на T соответственно.

Введем матрицу

$$\Gamma_i(t) = \begin{pmatrix} A(t) & O & \cdots & O \\ A'(t) - B(t) & A(t) & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 A^{(i)}(t) - C_i^1 B^{(i-1)}(t) & C_i^1 A^{(i-1)}(t) - C_i^2 B^{(i-2)}(t) & \cdots & A(t) \end{pmatrix},$$

где C_i^j — биномиальные коэффициенты.

Одним из необходимых и достаточных условий существования ЛРО L порядка $l \geq r+1$ является выполнение соотношения ([5], с. 131)

$$\operatorname{rank}\Gamma_{r+1}(t) = \kappa = \mathrm{const} \geq (r+1)n \quad \forall t \in T,$$

где $r = \max\limits_{t \in T} \operatorname{rank} A(t)$. При этом, начиная с некоторого $j = l$, справедливо равенство

$$\Gamma_j^-(t)\Gamma_j(t) = \begin{pmatrix} E_n & O \\ Z_1(t) & Z_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

E_n — единичная матрица порядка n, O — нулевая матрица, $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров, $\Gamma_j^-(t)$ — любая полуобратная к матрице $\Gamma_j(t)$. В качестве коэффициентов ЛРО (определяемых, вообще говоря, неединственным образом) можно взять первые n строк матрицы Γ_l^-, разбитые на $(n \times n)$-блоки ([5], с. 83).

3. Системы ОДУ с отклоняющимся аргументом

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений запаздывающего типа

$$y'(t) = B(t)y(t) + D_0(t)y(t - \sigma(t)) + f(t), \quad t \in T, \tag{5}$$

совместно с условием (2). Предположим, что функции $\psi(t)$ и $\sigma(t)$ непрерывно дифференцируемы на своих областях определения, причем $\sigma(t) > 0$, $\sigma'(t) \neq 1$ $\forall t \in T$. В этих предположениях для функции $t - \sigma(t)$ существует на T обратная $\gamma(t)$.

Определение 2. Решением задачи (1), (2) (или (5), (2)) будем называть функцию $y(t) \in \mathcal{C}([t_n, t_k))$, непрерывно дифференцируемую на каждом из промежутков $[t_n, t_0)$, $[\gamma_{i-1}(t_0), \gamma_i(t_0))$, $i = \overline{1, m-1}$, удовлетворяющую уравнению (1) (или (5)) $\forall t \in T$ и уравнению (2) $\forall t \in [t_n, t_0)$.

Под $x'(t)$ в точках $\gamma_i(t_0)$, $i = \overline{0, m-2}$, следует понимать правую производную. Здесь $\gamma_{i+1}(t_0) = \gamma(\gamma_i(t_0))$, $\gamma_0(t_0) = t_0$, $i = \overline{0, m-3}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t_k = \gamma_{m-1}(t_0)$.

Применяя для решения уравнения (5) метод шагов [6] и переходя к новой независимой переменной $\tau \in J = [t_0, \gamma(t_0))$, получим

$$\begin{gathered}
y(\tau - \sigma(\tau)) = \psi(\tau - \sigma(\tau)),\\
y'_t(\tau) = B(\tau)y(\tau) + D_0(\tau)y(\tau - \sigma(\tau)) + f(\tau),\\
y'_t(\gamma(\tau)) = B(\gamma_1(\tau))y(\gamma_1(\tau)) + D_0(\gamma_1(\tau))y(\tau) + f(\gamma_1(\tau)),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y'_t(\gamma_{m-2}(\tau)) = B(\gamma_{m-2}(\tau))y(\gamma_{m-2}(\tau)) + D_0(\gamma_{m-2}(\tau))y(\gamma_{m-3}(\tau)) + f(\gamma_{m-2}(\tau)).
\end{gathered}$$

Введем новые неизвестные функции

$$\begin{gathered}
y(\tau - \sigma(\tau)) = x_1(\tau),\\
y(\gamma_i(\tau)) = x_{i+2}(\tau), \quad i = \overline{0, m-2}.
\end{gathered}$$

Тогда $y'_t(\gamma_i(\tau)) = \frac{1}{(\gamma_i(\tau))'}x'_{i+2}(\tau)$, и уравнениям (5), (2) можно поставить в соответствие АДС

$$\begin{gathered}
x_1(\tau) = \psi(\tau - \sigma(\tau)),\\
x'_2(\tau) = B_0(\tau)x_2(\tau) + D_{0,0}(\tau)x_1(\tau) + f_0(\tau),\\
\frac{1}{(\gamma_1(\tau))'}x'_3(\tau) = B_1(\tau)x_3(\tau) + D_{0,1}(\tau)x_2(\tau) + f_1(\tau),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{1}{(\gamma_{m-2}(\tau))'}x'_m(\tau) = B_{m-2}(\tau)x_m(\tau) + D_{0,m-2}(\tau)x_{m-1}(\tau) + f_{m-2}(\tau), \quad \tau \in J,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $B_i(\tau) = B(\gamma_i(\tau))$, $D_{0,i}(\tau) = D_0(\gamma_i(\tau))$, $f_i(\tau) = f(\gamma_i(\tau))$, $i = \overline{0, m-2}$.

Условие непрерывности на T решения системы (5), (2) порождает краевые условия для АДС (6)

$$x_1(\gamma(t_0)) = \psi(t_0), \quad x_i(t_0) = x_{i-1}(\gamma(t_0)), \quad i = \overline{2, m}. \tag{7}$$

Обратный переход от решения задачи (6), (7) к решению задачи (5), (2) осуществляется преобразованием

$$y(t) = \begin{cases} x_2(t), & t \in [t_0, \gamma_1(t_0));\\ x_3(t - \sigma(t)), & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0));\\ \dots & \dots\\ x_m((t - \sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)) \end{cases} \tag{8}$$

($(t - \sigma(t))_i$ — i-кратное применение к t операции $t - \sigma(t)$).

Очевидно, что ЛРО для системы (6) будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \\ O & O_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \frac{d}{d\tau} + \begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ O & (\gamma_1(\tau))' E_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & (\gamma_{m-2}(\tau))' E_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

и по определению 1 индекс системы (6) равен 1.

Соответствующая АДС для уравнения нейтрального типа

$$y'(t) = B(t)y(t) + D_0(t)y(t - \sigma(t)) + D_1(t)y'(t - \sigma(t)), \quad t \in T, \tag{10}$$

с начальным условием (2) отличается от (6) добавлением в правую часть каждого уравнения, начиная со второго, слагаемого вида $D_{1,i}(\tau)x'_{i+1}(\tau) = D_1(\gamma_i(\tau))x'_{i+1}(\tau)$, $i = \overline{0, m-2}$. При этом ЛРО, уничтожающий производные $x'_i(\tau)$ в правой части полученной АДС, есть оператор первого порядка

$$\begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \\ \Pi_0^0 & O_n & \dots & O \\ \Pi_1^0 & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{m-2}^0 & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \frac{d}{d\tau} + \begin{pmatrix} O_n & O & O & \dots & O & O \\ O & E_n & O & \dots & O & O \\ O & \Pi_1^1 & (\gamma_1(\tau))' E_n & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \Pi_{m-2}^1 & \Pi_{m-2}^2 & \dots & \Pi_{m-2}^{m-2} & (\gamma_{m-2}(\tau))' E_n \end{pmatrix},$$

где $\Pi_k^j = (\gamma_k(\tau))'(\gamma_{k-1}(\tau))' \dots (\gamma_j(\tau))' D_{1,k}(\tau) D_{1,k-1}(\tau) \dots D_{1,j}(\tau)$, $k, j = \overline{0, m-2}$, $k \geq j$; $(\gamma_0(\tau))' = 1$, $\tau \in J$.

Определение 3. Индексом неразрешенности системы уравнений (1), (2) будем называть индекс соответствующей ей АДС.

По этому определению индексы систем (5), (2) и (10), (2) равны единице. Величину индекса системы опережающего типа позволяет установить следующая

Лемма. *Пусть в системе* (1), (2)

1) $A(t) \equiv E_n$, $t \in T$;

2) $B(t), f(t), D_i(t) \in \mathcal{C}^{(p-1)(m-1)}(T)$, $i = \overline{0, p}$;

3) $\psi(t) \in \mathcal{C}^{(p-1)(m-1)+1}([t_n, t_0))$, $\sigma(t) \in \mathcal{C}^{(p-1)(m-1)+1}(T)$;

4) $\sigma(t) > 0$, $\sigma'(t) \neq 1$ $\forall t \in T$;

5) $D_p(t) \times D_p(\gamma_1(t)) \times \dots \times D_p(\gamma_{m-2}(t)) \not\equiv O$ *на* J.

Тогда индекс системы (1), (2) *равен* $(p-1)(m-1)+1$.

Доказательство. Выпишем АДС для уравнений (1), (2) с $A(t) \equiv E_n$

$$\begin{gathered} x_1(\tau) = \psi(\tau - \sigma(\tau)), \\ x'_2(\tau) = B_0(\tau)x_2(\tau) + D_{0,0}(\tau)x_1(\tau) + D_{1,0}(\tau)x'_1(\tau) + \dots + D_{p,0}(\tau)x_1^{(p)}(\tau) + f_0(\tau), \\ \frac{1}{(\gamma_1(\tau))'}x'_3(\tau) = B_1(\tau)x_3(\tau) + D_{0,1}(\tau)x_2(\tau) + D_{1,1}(\tau)x'_2(\tau) + \dots + D_{p,1}(\tau)x_2^{(p)}(\tau) + f_1(\tau), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{1}{(\gamma_{m-2}(\tau))'}x'_m(\tau) = B_{m-2}(\tau)x_m(\tau) + D_{0,m-2}(\tau)x_{m-1}(\tau) + D_{1,m-2}(\tau)x'_{m-1}(\tau) + \dots + \\ + D_{p,m-2}(\tau)x_{m-1}^{(p)}(\tau) + f_{m-2}(\tau), \quad \tau \in J. \end{gathered} \tag{11}$$

Преобразуем эту систему уравнений в систему ОДУ первого порядка, разрешенную относительно производных. Аргумент τ для краткости будем опускать. Условия 2)–4) леммы гарантируют, что после всех произведенных дифференцирований коэффициенты и правые части в результирующей системе будут непрерывными. Сначала продифференцируем первое уравнение в (11), что достигается действием оператора (9). Последующее применение оператора

$$\begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ D_{p,0} & O_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-1} + \begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ D_{p-1,0} & O_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \\ D_{1,0} & E_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & E_n \end{pmatrix}$$

исключает из правой части все слагаемые с $x_1'(\tau), \dots, x_1^{(p)}(\tau)$. Подействовав оператором

$$\begin{pmatrix} O_n & O & O & \dots & O \\ O & O_n & O & \dots & O \\ O & \gamma' D_{p,1} & O_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-1} + \begin{pmatrix} O_n & O & O & \dots & O \\ O & O_n & O & \dots & O \\ * & * & O_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & O & O & \dots & O \\ O & E_n & O & \dots & O \\ * & * & E_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E_n \end{pmatrix},$$

добьемся того, что в правой части третьего уравнения не будет производных от $x_2(\tau)$ ($*$ обозначены отличные от нулевой матрицы, явный вид которых в данном случае неважен). Аналогично преобразуем все последующие уравнения системы (11). Наконец, используя для последнего уравнения оператор вида

$$\begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n & O \\ O & O & \dots & \gamma'_{m-2} D_{p,m-2} & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-1} + \begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n & O \\ * & * & \dots & * & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & E_n & O \\ * & * & \dots & * & E_n \end{pmatrix},$$

придем к искомой системе дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных.

ЛРО для системы (11) будет произведением m указанных выше операторов, причем старший коэффициент ЛРО, представляющий собой произведение матриц, стоящих в этих операторах при старших производных,

$$\begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O \\ \gamma_1' \dots \gamma_{m-2}' D_{p,m-2} \dots D_{p,0} & O & \dots & O_n \end{pmatrix},$$

будет отличен от нуля на J, если выполняется условие 5) леммы. Поэтому порядок ЛРО равен $(p-1)(m-1)+1$. Поскольку по построению этот оператор порядка наименьшего из возможных, то в соответствии с определениями 1 и 3 индекс системы (1), (2) будет также равен $(p-1)(m-1)+1$. $\square$

Замечание 1. Если произведение 5) тождественно равно нулю на J, то порядок ЛРО будет зависеть от структуры матриц $D_{p-1}(t), \dots, D_1(t)$.

4. Индекс АДС с отклоняющимся аргументом

Перейдем к задачам общего вида (1), (2).

Теорема. *Пусть в системе* (1), (2)

1) $A(t), B(t), f(t), D_i(t) \in \mathcal{C}^{(p+l-1)(m-2)}(T)$, $i = \overline{0,p}$;
2) $\psi(t) \in \mathcal{C}^{(p+l-1)(m-1)+1}([t_n, t_0))$, $\sigma(t) \in \mathcal{C}^{(p+l-1)(m-1)+1}(T)$; $\sigma(t) > 0$, $\sigma'(t) \neq 1$ $\forall t \in T$;
3) *для системы* (3) *на* T *определен ЛРО* L *порядка* l;
4) $L_l(t)D_p(t) \times L_l(\gamma_1(t))D_p(\gamma_1(t)) \times \dots \times L_l(\gamma_{m-2}(t))D_p(\gamma_{m-2}(t)) \not\equiv O$ *на* J ($L_l(t)$ — *старший коэффициент в ЛРО* (4)).

Тогда индекс системы (1), (2) *равен* $(p+l-1)(m-1)+1$.

Доказательство. Условие 2) обеспечивает существование для функции $t - \sigma(t)$ обратной $\gamma(t) \in \mathcal{C}^{(p+l-1)(m-1)+1}(T)$, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \in T$. Поэтому правомерно записать для системы (1), (2) соответствующую ей АДС (аргумент τ для краткости опустим)

$$
\begin{gathered}
x_1(\tau) = \psi(\tau - \sigma(\tau)), \\
A_0 x_2' = B_0 x_2 + D_{0,0} x_1 + D_{1,0} x_1' + \dots + D_{p,0} x_1^{(p)} + f_0, \\
\frac{1}{\gamma'} A_1 x_3' = B_1 x_3 + D_{0,1} x_2 + D_{1,1} x_2' + \dots + D_{p,1} x_2^{(p)} + f_1, \qquad (12) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{1}{\gamma_{m-2}'} A_{m-2} x_m' = B_{m-2} x_m + D_{0,m-2} x_{m-1} + D_{1,m-2} x_{m-1}' + \dots + D_{p,m-2} x_{m-1}^{(p)} + f_{m-2}, \quad \tau \in J.
\end{gathered}
$$

Построим для этой системы ЛРО. Подействовав оператором (9), а затем оператором

$$
\begin{pmatrix}
O_n & O & O & \dots & O \\
O & L_{l,0} & O & \dots & O \\
O & O & L_{l,1} & \dots & O \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O & O & O & \dots & L_{l,m-2}
\end{pmatrix}
\left(\frac{d}{d\tau}\right)^l +
\begin{pmatrix}
O_n & O & O & \dots & O \\
O & L_{l-1,0} & O & \dots & O \\
O & O & L_{l-1,1} & \dots & O \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O & O & O & \dots & L_{l-1,m-2}
\end{pmatrix}
\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{l-1} + \dots +
$$
$$
+ \begin{pmatrix}
E_n & O & O & \dots & O \\
O & L_{0,0} & O & \dots & O \\
O & O & L_{0,1} & \dots & O \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
O & O & O & \dots & L_{0,m-2}
\end{pmatrix}, \qquad (13)
$$

разрешим относительно производных левые части уравнений (12). Здесь оператор

$$
L_{l,j}(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}\right)^l + L_{l-1,j}(\tau)\left(\frac{d}{d\tau}\right)^{l-1} + \dots + L_{0,j}(\tau)
$$

есть ЛРО для системы $A_j(\tau)x_{j+2}'(\tau) = (\gamma_j(\tau))' B_j(\tau) x_{j+2}(\tau)$, $j = \overline{0, m-2}$. В силу предположений 1)–3) на J все эти операторы будут определены. Матрицы $L_{i,j}(\tau)$ вычисляются через коэфициенты (4), функцию $\gamma_1(\tau)$ и ее производные, при этом нетрудно убедиться, что $L_{l,j} = \frac{1}{((\gamma_j(\tau))')^l} L_l(\gamma_j(\tau))$ (явный вид остальных коэффициентов нас не интересует).

Далее исключим все производные в правой части полученной системы, что достигается последовательным применением операторов вида

$$\begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ L_{l,0}D_{p,0} & O_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-1} + \begin{pmatrix} O_n & O & \dots & O \\ * & O_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & O & \dots & O \\ * & E_n & \dots & O \\ O & O & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & E_n \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} O_n & O & O & \dots & O \\ O & O_n & O & \dots & O \\ O & \gamma' L_{l,1}D_{p,1} & O_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-1} + \begin{pmatrix} O_n & O & O & \dots & O \\ O & O_n & O & \dots & O \\ * & * & O_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & O & O & \dots & O \\ O & E_n & O & \dots & O \\ * & * & E_n & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & E_n \end{pmatrix}; \dots; \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} O_n & \dots & O & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & \dots & O & O_n & O \\ O & \dots & O & \gamma'_{m-2} L_{l,m-2}D_{p,m-2} & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-1} + \begin{pmatrix} O_n & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \dots & O_n & O \\ * & \dots & * & O_n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{p+l-2} + \dots +$$

$$+ \begin{pmatrix} E_n & \dots & O & O \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & \dots & E_n & O \\ * & \dots & * & E_n \end{pmatrix}.$$

Сделанные предположения о гладкости входных данных гарантируют непрерывность коэффициентов и правых частей в полученной системе ОДУ. Каков будет порядок ЛРО, являющегося произведением указанных операторов (14), (13), (9)?

В силу условия 3) произведение операторов (14) будет порядка $(p+l-1)(m-1)$. Последующее умножение слева на (13) не увеличит степени старшей производной, что видно из структуры матриц, входящих в выражения (13), (14). Наконец, умножив полученный оператор слева на (9), убедимся (с учетом условия 4) теоремы), что степень искомого ЛРО равна $(p+l-1)(m-1)+1$. Поскольку по построению это число наименьшее из возможных, то и индекс системы (1), (2) будет $(p+l-1)(m-1)+1$. $\square$

Замечание 2. Если матрица $D_p(t)$ представима в виде $D_p(t) = A(t)U(t)$, где $U(t)$ — некоторая $(n \times n)$-матрица, то произведение 4) в формулировке теоремы тождественно равно нулю на J, поскольку старший коэффициент ЛРО (4) для АДС (12) необходимо удовлетворяет $\forall t \in T$ уравнению $L_l(t)A(t) = O$ [7]. И в этом случае индекс системы (1), (2) будет строго меньше $(p+l-1)(m-1)+1$.

Следствие 1. В условиях теоремы действие ЛРО L для системы (3) на уравнение (1) не меняет индекса системы (1), (2).

Доказательство. Подействуем оператором L (4) на уравнение (1). Условие 4) теоремы гарантирует, что порядок старшей производной от $x(t-\sigma(t))$ в правой части полученного уравнения будет $(p+l-1)(m-1)+1$. При этом имеют место все предположения леммы, в соответствии с которой индекс полученной системы равен $(p+l-1)(m-1)+1$. $\square$

5. О единственности решения АДС с отклоняющимся аргументом

Построенный при доказательстве теоремы ЛРО преобразует (12) в систему ОДУ с непрерывными коэффициентами и правыми частями, разрешенную относительно производных,

$$
\begin{gathered}
x_1'(\tau) = (\psi(\tau-\sigma(\tau)))', \\
x_2'(\tau) = P_0(\tau)x_2(\tau) + G_{1,0}(\tau)x_1(\tau) + \widetilde{f}_0(\tau), \\
x_3'(\tau) = P_1(\tau)x_3(\tau) + G_{1,2}(\tau)x_2(\tau) + G_{1,1}(\tau)x_1(\tau) + \widetilde{f}_1(\tau), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_m'(\tau) = P_{m-2}(\tau)x_m(\tau) + G_{m-2,m-1}(\tau)x_{m-1}(\tau) + G_{m-2,m-2}(\tau)x_{m-2}(\tau) + \dots + \\
+G_{m-2,1}(\tau)x_1(\tau) + \widetilde{f}_{m-2}(\tau), \quad \tau \in J.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Осуществим обратный переход от системы (15) к уравнению с запаздываниями

$$
\begin{gathered}
y'(t) = P(t)y(t) + G_1(t)y(t-\sigma(t)) + G_2(t)y(t-\sigma_2(t)) + \dots + \\
+ G_{m-2}(t)y(t-\sigma_{m-2}(t)) + \widetilde{f}(t), \quad t \in T
\end{gathered}
\tag{16}
$$

$(t-\sigma_i(t) = (t-\sigma(t))_i,\ i = \overline{2, m-2})$, коэффициенты и правая часть которого будут кусочно непрерывными функциями на T. А именно,

$$
P(t) = \begin{cases}
P_0(t), & t \in [t_0, \gamma_1(t_0)); \\
(t-\sigma(t))' P_1(t-\sigma(t)), & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)); \\
\dots & \dots \\
((t-\sigma(t))_{m-2})' P_{m-2}((t-\sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)),
\end{cases}
$$

$$
G_1(t) = \begin{cases}
G_{0,1}(t), & t \in [t_0, \gamma_1(t_0)); \\
(t-\sigma(t))' G_{1,2}(t-\sigma(t)), & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)); \\
\dots & \dots \\
((t-\sigma(t))_{m-2})' G_{m-2,m-1}((t-\sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)),
\end{cases}
$$

$$
G_2(t) = \begin{cases}
0, & t \in [t_0, \gamma_1(t_0)); \\
(t-\sigma(t))' G_{1,1}(t-\sigma(t)), & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)); \\
\dots & \dots \\
((t-\sigma(t))_{m-2})' G_{m-2,m-2}((t-\sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)),
\end{cases}
$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$
G_{m-2}(t) = \begin{cases}
0, & t \in [t_0, \gamma_1(t_0)); \\
0, & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)); \\
\dots & \dots \\
0, & t \in [\gamma_{m-3}(t_0), \gamma_{m-2}(t_0)); \\
((t-\sigma(t))_{m-2})' G_{m-2,1}((t-\sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)),
\end{cases}
$$

$$
\widetilde{f}(t) = \begin{cases}
\widetilde{f}_0(t), & t \in [t_0, \gamma_1(t_0)); \\
(t-\sigma(t))' \widetilde{f}_1(t-\sigma(t)), & t \in [\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0)); \\
\dots & \dots \\
((t-\sigma(t))_{m-2})' \widetilde{f}_{m-2}((t-\sigma(t))_{m-2}), & t \in [\gamma_{m-2}(t_0), \gamma_{m-1}(t_0)).
\end{cases}
$$

Ясно, что задачи (12), (7) и (1), (2) либо имеют, либо не имеют решений одновременно. Допустим, что краевая задача (12), (7) разрешима. Тогда ее решение единственно и совпадает с решением задачи (15), (7) [5]. Коэффициенты и правая часть уравнения (16) кусочно непрерывны на T, причем они могут иметь разрывы первого рода лишь в точках $\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0), \dots, \gamma_{m-2}(t_0)$, в которых выполняется условие непрерывности решения (7), поэтому в предположениях теоремы на T существует единственное непрерывное решение задачи (16), (2) ([6], с. 21). Последнее связано с решением краевой задачи (15), (7) соотношениями (8). На основании этого можно сформулировать теперь уже вполне очевидное утверждение.

Следствие 2. Пусть в условиях теоремы существует решение задачи (1), (2). Тогда оно единственно и совпадает с решением задачи (16), (2).

В заключение следует отметить, что изложенный выше подход позволит исследовать не затронутые в этой статье вопросы существования решения задачи (1), (2). Кроме того, он конструктивен и с вычислительной точки зрения, поскольку для приближенного решения системы (16), (2) имеется множество сходящихся методов, прямое применение которых к (1), (2) либо не дает приемлемого результата, либо вообще невозможно.

Литература

1. Campbell S.L. *Comments on* 2D *descriptor systems* // Automatica. – 1991. – V. 27. – № 1. – P. 189–192.
2. Campbell S.L. *Singular linear systems of differential equations with delays* // Appl. Anal. – 1980. – V. 11. – P. 129–136.
3. Campbell S.L. *Nonregular* 2D *descriptor delay systems* // IMA J. Math. Control and Informat. – 1995. – № 12. – P. 57–67.
4. Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
5. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 279 с.
6. Эльсгольц Л.Э. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* – М.: Наука, 1964. – 127 с.
7. Щеглова А.А. *Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных* // Сиб. матем. журн. – 1995. – Т. 36. – № 6. – С. 1436–1445.

Институт динамики систем
и теории управления
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
16.02.1999