И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.537

М.Н. ШЕРЕМЕТА

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧЛЕНЕ ПРОИЗВОДНОЙ РЯДА ДИРИХЛЕ

1. Пусть $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$, $n\to\infty$, ряд Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp(s\lambda_n),\quad s=\sigma+it, \tag{1}$$

имеет абсциссу абсолютной сходимости $A\in(-\infty,+\infty]$, а $\mu(\sigma)=\mu(\sigma,F)=\max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n),$ $n\ge 0\}$ — максимальный член ряда (1). Через $\Omega(A)$ обозначим класс положительных неограниченных на $(-\infty,A)$ функций Φ таких, что производная Φ' является положительной, непрерывной и возрастает к $+\infty$ на $(-\infty,A)$. Пусть φ — функция, обратная к Φ', а $\Psi(\sigma)=\sigma-\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ — функция, ассоциированная с Φ по Ньютону. Тогда функция φ непрерывна на $(0,+\infty)$ и возрастает к A, а функция Ψ непрерывна на $(-\infty,A)$ и также возрастает к A. Для случая $A=+\infty$ последнее свойство доказано в [1], а для случая $A\in(-\infty,+\infty)$ его доказательство аналогично.

Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. *Пусть $A\in(-\infty,+\infty]$, $\Phi\in\Omega(A)$, ряд Дирихле* (1) *имеет абсциссу абсолютной сходимости A и*

$$\varlimsup_{\sigma\to A}\frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}=1. \tag{2}$$

Тогда

$$\varlimsup_{\sigma\to A}\frac{\mu(\sigma,F')}{\mu(\sigma,F)\Phi'(\sigma)}\ge 1 \tag{3}$$

и, если дополнительно

$$\ln\Phi'(\sigma)=o(\Phi(\sigma)),\quad \sigma\to A, \tag{4}$$

то

$$\varlimsup_{\sigma\to A}\frac{\mu(\sigma,F')}{\mu(\sigma,F)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}\le 1. \tag{5}$$

Точность оценки (3) не вызывает сомнений. На неулучшаемость оценки (5) указывает

Теорема 2. *Пусть $A\in(-\infty,+\infty]$, $\Phi\in\Omega(A)$ и*

$$F_0(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))+s\lambda_n\}.$$

Тогда, если существует такое число $\alpha\in(0,1]$, что $(\Phi'(x))^{\alpha}/\Phi(x)$ не возрастает на $[x_0,A)$, и $\lambda_n=o(\lambda_{n+1})$, $n\to\infty$, то в соотношении (5) *достигается знак равенства.*

Для доказательства теорем понадобится

Лемма. *Пусть $A\in(-\infty,+\infty]$, $\Phi\in\Omega(A)$ и ряд Дирихле имеет абсциссу абсолютной сходимости A. Для того чтобы $\ln\mu(\sigma,F)\le\Phi(\sigma)$ для всех $\sigma\in(\sigma_0,A)$, необходимо и достаточно, чтобы $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n\ge n_0$.*

В случае $A=+\infty$ эта лемма доказана в [1], а для случая $A<+\infty$ ее доказательство ничем не отличается от приведенного в [1].

Теорему 1 докажем в п. 2, теорему 2 — в п. 3, а в п. 4 приведем несколько следствий и замечаний.

2. Доказательство теоремы 1. Пусть $\nu(\sigma,F)=\max\{n\ge 0: |a_n|\exp(\sigma\lambda_n)=\mu(\sigma,F)\}$ — центральный индекс ряда (1). Тогда

$$\mu(\sigma,F')=|a_{\nu(\sigma,F')}|\lambda_{\nu(\sigma,F')}\exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma,F')}\}\le\lambda_{\nu(\sigma,F')}\mu(\sigma,F)$$

и

$$\mu(\sigma,F)=\frac{|a_{\nu(\sigma,F)}|\lambda_{\nu(\sigma,F)}\exp\{\sigma\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}}{\lambda_{\nu(\sigma,F)}}\le\frac{\mu(\sigma,F')}{\lambda_{\nu(\sigma,F)}},$$

т. е.

$$\lambda_{\nu(\sigma,F)}\le\frac{\mu(\sigma,F')}{\mu(\sigma,F)}\le\lambda_{\nu(\sigma,F')}. \tag{6}$$

Допустим теперь, что неравенство (3) не выполняется, т. е. для некоторого $q\in(0,1)$ и всех $\sigma\in(\sigma_0,A)$ имеет место неравенство $\mu(\sigma,F')/\mu(\sigma,F)\le q\Phi'(\sigma)$. Тогда из (6) имеем

$$\ln\mu(\sigma,F)=\ln\mu(\sigma_0,F)+\int_{\sigma_0}^{\sigma}\lambda_{\nu(t,F)}dt\le\ln\mu(\sigma_0,F)+q\Phi(\sigma)-q\Phi(\sigma_0),$$

что невозможно в силу (2). Неравенство (3) доказано.

Далее, из (2) следует $\ln\mu(\sigma,F)\le(1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для каждого $\varepsilon>0$ и всех $\sigma\in(\sigma_0(\varepsilon),A)$. Поэтому по лемме 1 с $(1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ вместо $\Phi(\sigma)$ имеем

$$|a_n|\le\exp\Big\{-\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big)\Big\},\quad n\ge n_0(\varepsilon). \tag{7}$$

Так как $\{\Psi(\varphi(x))\}'=\Phi(\varphi(x))/x^2$ и в силу (4) $\ln x=o(\Phi(\varphi(x)))$ при $x\to+\infty$, то для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}t\Big)\Big)-\Psi(\varphi(t))=\int_t^{(1+2\varepsilon)t/(1+\varepsilon)}\frac{\Phi(\varphi(x))}{x^2}dx\ge$$
$$\ge\Psi(\varphi(t))\Big\{\frac{1}{t}-\frac{1+\varepsilon}{(1+2\varepsilon)t}\Big\}=\frac{\varepsilon\Phi(\varphi(t))}{(1+2\varepsilon)t}>\frac{\ln t+\ln(1+\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)t} \tag{8}$$

при $t\ge t_0(\varepsilon)$. Очевидно, функция $\Psi\Big(\varphi\Big(\dfrac{x}{1+\varepsilon}\Big)\Big)-\dfrac{\ln x}{x}$ является возрастающей на $[e,+\infty)$. Поэтому, если $\lambda_n\ge(1+2\varepsilon)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$, то из (7) и (8) с $t(\sigma)=\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$ имеем

$$|a_n|\lambda_n\exp(\sigma\lambda_n)\le\exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big)-\frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}-\sigma\Big)\Big\}\le$$
$$\le\exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}t(\sigma)\Big)\Big)-\frac{\ln t(\sigma)+\ln(1+2\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)t(\sigma)}-\Psi(\varphi(t(\sigma)))\Big)\Big\}\le 1$$

для всех σ, близких к A. Отсюда следует, что $\lambda_{\nu(\sigma,F')}<(1+\varepsilon)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$ и в силу (6)

$$\varlimsup_{\sigma\to A}\frac{\mu(\sigma,F')}{\mu(\sigma,F)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))}\le 1+2\varepsilon,$$

т. е. из-за произвольности ε неравенство (5) и теорема 1 доказаны.

3. Перед доказательством теоремы 2 заметим (это хорошо известно), что если коэффициенты ряда (1) такие, что последовательность $\varkappa_{n+1}=(\ln|a_n|-\ln|a_{n+1}|)/(\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ возрастает к A, то для всех $\sigma\in[\varkappa_n,\varkappa_{n+1})$ справедливы равенства $\mu(\sigma,F)=|a_n|\exp(\sigma\lambda_n)$ и $\lambda_{\nu(\sigma,F)}=\lambda_n$.

Так как $\{x\Psi(\varphi(x))\}' = \varphi(x)$ и $\Psi(\varphi(x)) \uparrow A$ при $x \to A$, то функция $x\Psi(\varphi(x))$ выпукла. Поэтому

$$\varkappa_n = \frac{\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) - \lambda_{n-1}\Psi(\varphi(\lambda_{n-1}))}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \uparrow A, \quad n \to \infty,$$

и, значит, $\lambda_{\nu(\sigma,F_0)} = \lambda_n$ для всех $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$.

Покажем, что существует положительная последовательность (ξ_n) такая, что $\xi_n \to 0$, $n \to \infty$, и

$$\varkappa_n \le \sigma_n = \Psi(\varphi((1+\xi_n)\lambda_n)). \tag{9}$$

Действительно, неравенство (9) равносильно неравенству

$$\lambda_{n-1}\{\Psi(\varphi((1+\xi_n)\lambda_n)) - \Psi(\varphi(\lambda_{n-1}))\} \le \lambda_n\{\Psi(\varphi((1+\xi_n)\lambda_n)) - \Psi(\varphi(\lambda_n))\}$$

или

$$\lambda_{n-1}\Big(\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt + \int_{\lambda_n}^{(1+\xi_n)\lambda_n} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt\Big) \le \lambda_n \int_{\lambda_n}^{(1+\xi_n)\lambda_n} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,$$

т. е.

$$\lambda_{n-1}\int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt \le (\lambda_n - \lambda_{n-1})\int_{\lambda_n}^{(1+\xi_n)\lambda_n} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt. \tag{10}$$

Если $\alpha = 1$, т. е. $\Phi'(x)/\Phi(x)$ не возрастает, то $\Phi(\varphi(t))/t$ не убывает и неравенство (10) выполняется, если

$$\lambda_{n-1}\frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n}\ln\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \le (\lambda_n - \lambda_{n-1})\frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n}\ln(1+\xi_n),$$

т. е.

$$\ln(1+\xi_n) \ge \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\ln\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\frac{1}{1-\lambda_{n-1}/\lambda_n}.$$

Поскольку $\lambda_{n-1}/\lambda_n \to 0$, $n \to \infty$, то правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, и поэтому ξ_n можно выбрать так, чтобы $\xi_n \to 0$, $n \to \infty$, и имело место неравенство (9).

Если же $0 < \alpha < 1$, то $\Phi(\varphi(t))/t^\alpha$ не убывает и неравенство (10) выполняется, если

$$\frac{\lambda_{n-1}}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{\lambda_{n-1}^{1-\alpha}} - \frac{1}{\lambda_n^{1-\alpha}}\Big)\frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n^\alpha} \le (\lambda_n - \lambda_{n-1})\frac{\Phi(\varphi(\lambda_n))}{(1-\alpha)\lambda_n^\alpha}\Big(\frac{1}{\lambda_n^{1-\alpha}} - \frac{1}{(1+\xi_n)^{1-\alpha}\lambda_n^{1-\alpha}}\Big),$$

т. е.

$$1 - \frac{1}{(1+\xi_n)^\alpha} \ge \frac{\lambda_n^{1-\alpha} - \lambda_{n-1}^{1-\alpha}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = (1+o(1))\Big(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\Big)^\alpha, \quad n \to \infty,$$

и снова можно сделать нужный выбор последовательности (ξ_n).

Из неравенства (9) вытекает неравенство $\lambda_{\nu(\sigma_n,F_0)} \ge \lambda_n$, и в силу (6)

$$\varlimsup_{\sigma\to A}\frac{\mu(\sigma,F_0')}{\mu(\sigma,F_0)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} \ge \varlimsup_{\sigma_n\to A}\frac{\lambda_{\nu(\sigma_n,F_0)}}{\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma_n))} \le \varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi_n} = 1,$$

т. е. для функции F_0 в (5) достигается знак равенства.

4. Выбирая надлежащим образом функцию Φ, из теорем 1 и 2 можно получить ряд следствий в той или иной шкале роста. Здесь мы остановимся только на следствиях, отвечающих случаям конечного R-порядка и конечного логарифмического R-порядка как для целых рядов Дирихле, так и для абсолютно сходящихся в полуплоскости $\{s : \operatorname{Re} s < 0\}$.

Следствие 1. Пусть $A = +\infty$ и

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} e^{-\varrho\sigma} \ln \mu(\sigma, F) = T \in (0, +\infty).$$

Тогда

$$1 \le \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} e^{-\varrho\sigma} \frac{\mu(\sigma, F')}{T\varrho\mu(\sigma, F)} \le e. \tag{11}$$

Следствие 2. Пусть $A = +\infty$, $p > 1$ и

$$\overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \sigma^{-p} \ln \mu(\sigma, F) = T \in (0, +\infty).$$

Тогда

$$1 \le \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\mu(\sigma, F')}{Tp\sigma^{p-1}\mu(\sigma, F)} \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^{p-1}. \tag{12}$$

Следствие 3. Пусть $A = 0$ и

$$\overline{\lim_{\sigma\to0}} |\sigma|^{\varrho} \ln \mu(\sigma, F) = T \in (0, +\infty).$$

Тогда

$$1 \le \overline{\lim_{\sigma\to0}} \frac{|\sigma|^{\varrho+1}\mu(\sigma, F')}{T\varrho\mu(\sigma, F)} \le \left(\frac{\varrho+1}{\varrho}\right)^{\varrho+1}. \tag{13}$$

Следствие 4. Пусть $A = 0$ и

$$\overline{\lim_{\sigma\to0}} \exp\left\{-\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\} \ln \mu(\sigma, F) = T \in (0, +\infty).$$

Тогда

$$1 \le \overline{\lim_{\sigma\to0}} \frac{|\sigma|^2}{\varrho T} \exp\left\{-\frac{\varrho}{|\sigma|}\right\} \frac{\mu(\sigma, F')}{\mu(\sigma, F)} \le e. \tag{14}$$

Справедливость следствия 1 вытекает из теоремы 1 при $\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma}$, следствия 2 — при $\Phi(\sigma) = T\sigma^p$, $\sigma \ge \sigma_0 \ge 1$, следствия 3 — при $\Phi(\sigma) = T|\sigma|^{-\varrho}$, а следствия 4 — при $\Phi(\sigma) = T\exp\{\varrho/|\sigma|\}$. Точность оценок (11) и (12) вытекает из теоремы 2 при $\alpha = 1$, оценки (13) — при $\alpha = \varrho/(1+\varrho)$, а оценки (14) – при любом $\alpha \in (0, 1)$.

Замечание 1. Как условие (4), так и условие невозрастания $(\Phi'(x))^\alpha/\Phi(x)$ в теоремах 1 и 2 появились в результате примененных методов. Видимо, условие (4) в теореме 1 излишне. Что касается условия невозрастания $(\Phi'(x))^\alpha/\Phi(x)$, то его, вообще говоря, устранить нельзя, на что указывает пример ряда Дирихле $F_1(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\exp(sn)$, абсцисса абсолютной сходимости которого равна $A = 0$. Легко показать, что $\mu(\sigma, F_1) = (1 + o(1))/e|\sigma|$, $\sigma \to 0$, и $\mu(\sigma, F_1') = (1 + o(1))(2/e|\sigma|)^2$, $\sigma \to 0$.

Если возьмем $\Phi(\sigma) = \ln(1/e|\sigma|)$, то $\Phi'(\sigma) = 1/|\sigma|$ и $(\Phi'(\sigma))^\alpha/\Phi(\sigma) \uparrow +\infty$ $(\sigma \to 0)$ для любого $\alpha \in (0, 1]$. Выполнение равенства (2) очевидно. Далее, $\Psi(\sigma) = |\sigma|\ln|\sigma|$, $\Psi^{-1}(\sigma) = (1 + o(1))|\sigma|/\ln|\sigma|$ и $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) = \dfrac{1+o(1)}{|\sigma|} \ln \dfrac{1}{|\sigma|}$ при $\sigma \to 0$. Поэтому

$$\frac{\mu(\sigma, F_1')}{\mu(\sigma, F_1)\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))} = \frac{4(1+o(1))}{e\ln(1/|\sigma|)} \to 0 \quad (\sigma \to 0),$$

и осталось заметить, что ряд F_1 имеет такой же вид, как и ряд F_0, т. е. $\ln n = -n\Psi(\varphi(n))$.

Замечание 2. Предположим, что $\Phi \in \Omega(+\infty)$ и $\Phi(\sigma) = \sigma\alpha(\sigma)$ при $\sigma \geq \sigma_0$, где α — медленно возрастающая функция такая, что $\alpha(x^2\alpha'(x)/\alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $x \to +\infty$. Тогда [2] $\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma)) \sim \Phi'(\sigma)$, $\sigma \to +\infty$, и из теоремы 1 вытекает, что для целого ряда Дирихле (1) справедливо равенство

$$\overline{\lim_{\sigma\to A}} \frac{\mu(\sigma, F')}{\mu(\sigma, F)\Phi'(\sigma)} = 1. \tag{15}$$

Таким образом, можно выделить подкласс функций Φ из $\Omega(+\infty)$ такой, что из (2) вытекает (15).

Для случая рядов Дирихле с нулевой абсциссой абсолютной сходимости не удалось выделить достаточно широкий класс функций из $\Omega(0)$ такой, чтобы из (2) вытекало (15). Некоторое объяснение этого содержится в следующем рассуждении. Запишем неравенства (3) и (5) в виде

$$1 \leq \overline{\lim_{\sigma\to A}} \frac{\mu(\sigma, F')}{\mu(\sigma, F)\Phi'(\sigma)} \leq \gamma = \overline{\lim_{x\to A}} \frac{\Phi'(x)}{\Phi'(\Psi(x))}$$

и предположим, что функция Φ имеет достаточно правильный рост. В каждом приведенном ниже конкретном случае читатель сам может указать соответствующие условия.

Пусть сначала $A = +\infty$ и $\Phi(\sigma) = \sigma l(\sigma)$. Тогда, если l — медленно растущая функция, то $\gamma = 1$. Если $l(x) = x^\varrho$ $(\varrho > 0)$, то $\gamma = \gamma(\varrho) = ((1+\varrho)/\varrho)^\varrho$ и $\gamma(\varrho) \to 1$ $(\varrho \to 0)$, $\gamma(\varrho) \to e$ $(\varrho \to +\infty)$. Если же l возрастает быстрее, чем степенная функция (напр., $l(x) = \exp_k x$, $k \geq 1$), то $\gamma = e$.

В случае, когда $A = 0$, ситуация иная. Если $\Phi(\sigma) = l(1/|\sigma|)$, $\sigma \geq \sigma_0$ и l — медленно растущая функция, то $\gamma = +\infty$. Если $l(x) = x^\varrho$ $(\varrho > 0)$, то $\gamma = \gamma(\varrho) = ((1+\varrho)/\varrho)^{\varrho+1}$ и $\gamma(\varrho) \to +\infty$ $(\varrho \to 0)$, $\gamma(\varrho) \to e$ $(\varrho \to +\infty)$. Если же l возрастает быстрее, чем степенная, то $\gamma = e$.

Литература

1. Шеремета М.Н. *Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1990. – Вып. 54. – С. 16–25.
2. Шеремета М.Н. *О производной целой функции* // Укр. матем. журн. – 1988. – Т. 40. – № 2. – С. 219–224.

Львовский государственный университет

Поступила 15.03.1996