И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.546

Я. ГОДУЛЯ, В.В. СТАРКОВ

ЗАМЕЧАНИЯ О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИЙ БЛОХА

1. Введение и основные результаты

Аналитические в круге $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ функции f с условием

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \sup_{z\in\Delta}(1-|z|^2)|f'(z)| < \infty,$$

образуют линейное пространство $\mathcal{B}$ — класс функций Блоха. Величина $|f(0)| + \|f\|_{\mathcal{B}}$ определяет норму в $\mathcal{B}$.

Пространство $\mathcal{B}_0$ состоит из всех функций $f \in \mathcal{B}$, для которых $(1-|z|^2)|f'(z)| \to 0$ при $|z| \to 1$, подмножество $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ состоит из всех функций $f \in \mathcal{B}$, обладающих следующим свойством: если последовательность $\{z_n\} \subset \Delta$ и $|f(z_n)| \to \infty$, то $(1-|z_n|^2)|f'(z_n)| \to 0$. Таким образом, $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$.

Пусть S — известный класс аналитических и однолистных в Δ функций f, нормированных условием $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Обозначим через $\operatorname{Aut}\Delta$ множество всех конформных автоморфизмов

$$\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{a+z}{1+\overline{a}z}, \quad a\in\Delta, \quad \theta\in\mathbb{R},$$

круга Δ. В [1] введено понятие *линейно-инвариантного семейства* как множества $\mathfrak{M}$ всех локально однолистных в Δ функций $h(z) = z + \cdots$, удовлетворяющих условию: *для любых функций $h \in \mathfrak{M}$ и $\varphi \in \operatorname{Aut}\Delta$ функция*

$$F_\varphi(z) = \frac{h(\varphi(z)) - h(\varphi(0))}{h'(\varphi(0))\varphi'(0)} = z + \cdots$$

также принадлежит $\mathfrak{M}$.

Число

$$\operatorname{ord} h = \sup\{|F_\varphi''(0)|/2 : \varphi \in \operatorname{Aut}\Delta\}$$

называется *порядком функции h*. Многие известные классы конформных отображений являются линейно-инвариантными семействами [1].

Совокупность всех локально однолистных в Δ функций $h(z) = z + \cdots$, для которых $\operatorname{ord} h \le \alpha$, называется универсальным линейно-инвариантным семейством функций и обозначается $\mathcal{U}_\alpha$. В [1] доказано, что $\mathcal{U}_\alpha = \emptyset$ при $\alpha < 1$, $\mathcal{U}_1$ — известный класс выпуклых функций, заметим также, что линейно-инвариантное семейство $S \subset \mathcal{U}_2$.

В [2] были введены линейно-инвариантные семейства $\mathcal{U}'_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$, играющие важную роль в решении экстремальных задач в $\mathcal{U}_\alpha$ (напр., [3]).

Функция f принадлежит $\mathcal{U}'_\alpha$, если и только если

$$f'(z) = \exp\left[-2\int_0^{2\pi}\log(1-ze^{it})\,d\mu(t)\right], \quad z\in\Delta, \quad \log 1 = 0,$$

где $\mu(t)$ — любая комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0,2\pi)$, удовлетворяющая условию

$$\left|\int_0^{2\pi} d\mu(t) - 1\right| + \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha, \quad \alpha \ge 1.$$

Другое линейно-инвариантное семейство $\mathcal{U}^*_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$ изучалось в [4].

Функция f принадлежит $\mathcal{U}^*_\alpha$, если и только если существует выпуклая функция $s(z) = z + \cdots$ (т. е. $s \in \mathcal{U}_1 = \mathcal{U}'_1$) и существует функция Шварца ω (т. е. аналитическая в Δ функция $\omega(z)$, $\omega(\Delta) \subset \Delta$, $\omega(0) = 0$), для которых

$$f'(z) = s'(z) \exp\left[-2\int_0^{2\pi} \log(1 - \omega(z)e^{it}) d\mu(t)\right], \quad \log 1 = 0, \tag{1}$$

где $\mu(t)$ — любая комплекснозначная функция ограниченной вариации на $[0,2\pi)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \le \alpha - 1, \quad \int_0^{2\pi} d\mu(t) = 0. \tag{2}$$

Заметим, что семейства $\mathcal{U}^*_\alpha$ и $\mathcal{U}'_\alpha$ не содержатся одно в другом ни при каких $\alpha > 1$.

Функция g принадлежит пространству $BMOA$, если функция $[g(\varphi(z)) - g(\varphi(0))]$ принадлежит H^1 для любого $\varphi \in \operatorname{Aut}\Delta$. Основные свойства $BMOA$ описаны в [5] и [6]. В [7], а затем в [8] было замечено, что $g \in \mathcal{B}$, если и только если существует функция $f \in \bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$, для которой

$$g(z) - g(0) = \log f'(z).$$

Поскольку $BMOA \nsubseteq \mathcal{B}$, то интересно описать множество функций f из $\bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}_\alpha$, для которых $\log f'$ принадлежит $BMOA$. Частичный ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. а) $f \in \bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}^*_\alpha \Longrightarrow \log f' \in BMOA$,

б) $f \in \bigcup\limits_{\alpha<\infty} \mathcal{U}'_\alpha \Longrightarrow \log f' \in BMOA$.

Переходим к изучению интегральных средних

$$I_p(r,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta, \quad 0 < r < 1,$$

аналитических в Δ функций g, где $0 < p < \infty$ фиксировано. В [9], [10] для $p \in (0,\infty)$ и $f \in \mathcal{B}$ получены точные асимптотические оценки

$$I_p(r,f) = \mathcal{O}((\log\frac{1}{1-r})^{p/2}), \quad r \to 1.$$

Что известно об асимптотическом поведении интегральных средних производных функций из классов $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$? Из определения $\mathcal{B}_0$ следует

$$\lim_{r\to 1}(1-r)^2 I_2(r,f') = 0 \tag{3}$$

(для простоты формулировок далее рассматриваем только случай $p = 2$). В [11] доказано, что $\liminf\limits_{r\to 1}(1-r)^2 I_2(r,f') = 0$ для функций $f \in \mathcal{B}_1$, однако существуют функции $f \in \mathcal{B}$, для которых $\liminf\limits_{r\to 1}(1-r)^2 I_2(r,f') > 0$. Теорема 2 (утверждение 1)) говорит о том, что в (3) стремление к нулю может быть сколь угодно медленным.

Теорема 2. *Для любой положительной на $[0,\infty)$ функции $\tilde\varphi(x)$ такой, что $\lim\limits_{x\to\infty}\tilde\varphi(x) = 0$, существует такая функция $f \in \mathcal{B}_0$, что*

1) $\lim\limits_{r\to 1} \frac{(1-r)^2 I_2(r,f')}{\tilde\varphi(\frac{1}{1-r})} = \infty$,

2) $\limsup\limits_{r\to1}\frac{(1-r^2)|f'(re^{i\theta})|}{\tilde\varphi(\frac{1}{1-r})}=\infty$ *для каждого* $\theta\in[-\pi,\pi]$,

3) $\lim\limits_{r\to1}\frac{(1-r^2)M(r)}{\tilde\varphi(\frac{1}{1-r})}=\infty$, *где* $M(r)=\max\limits_{\theta}|f'(re^{i\theta})|$.

Из включения $\mathcal{B}_0\subset\mathcal{B}_1$ следует, что теорема 2 справедлива и для $\mathcal{B}_1$. Другое доказательство п. 1) и п. 3) теоремы 2 при дополнительных ограничениях на $\widetilde\varphi$ дал Гирела в [11].

В последней части статьи исследуется поведение функций Блоха в угле Штольца. В [10] доказана

Теорема M. *Если $f\in\mathcal{B}$, то для почти всех (п. в.) $\theta\in[-\pi,\pi]$*

$$\limsup_{r\to1}\frac{|f(re^{i\theta})|}{A(1-r)}\le C\|f\|_{\mathcal{B}},\tag{4}$$

где

$$A(1-r)=\left(\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}\right)^{\frac12}.$$

В [12] доказано, что (4) справедливо при $C=1$, но существует функция $f\in\mathcal{B}$, для которой $C>0{,}685$. В [13] получен следующий аналог теоремы M [10] для класса $\mathcal{B}_1$.

Теорема G. *Пусть $f\in\mathcal{B}_1$. Тогда для п. в. $\theta\in[-\pi,\pi]$*

$$|f(re^{i\theta})|=o(A(1-r))\quad\textit{при}\quad r\to1.\tag{5}$$

Результат точный в том смысле, что для любой функции $\varphi(x)$, положительной и убывающей к нулю при $x\to+\infty$, существует такая функция $f\in\mathcal{B}_0$, что для п. в. θ

$$\limsup_{r\to1}\frac{|f(re^{i\theta})|}{(\varphi(\frac{1}{1-r}))^{\frac12}A(1-r)}=\infty.\tag{6}$$

Две последние теоремы описывают асимптотическое поведение функций Блоха на радиусе. Однако эти утверждения остаются справедливыми и для углов Штольца $W_\eta(e^{i\theta})$ величины 2η с вершиной в $e^{i\theta}$. А именно, здесь доказываются следующие теоремы.

Теорема 3. *В обозначениях теоремы* M

$$\limsup_{W_\eta(e^{i\theta})\ni z\to e^{i\theta}}\frac{|f(z)|}{A(1-r)}\le C\|f\|_{\mathcal{B}},$$

где C — постоянная из теоремы M.

Теорема 4. *В условии теоремы* G *асимптотическое равенство* (5) *можно заменить на*

$$|f(z)|=o(A(1-r))\quad\textit{при}\quad W_\eta(e^{i\theta})\ni z\to e^{i\theta},\tag{7}$$

а (6) *остается справедливым и при замене предела по радиусу на предел по любой некасательной кривой $\gamma(\theta)$, оканчивающейся в $e^{i\theta}$:*

$$\limsup_{\gamma(\theta)\ni z\to e^{i\theta}}\frac{|f(z)|}{(\varphi(\frac{1}{1-r}))^{\frac12}A(1-r)}=\infty.\tag{8}$$

2. Доказательства результатов

Доказательство теоремы 1. а) Пусть f — функция из линейно-инвариантного семейства $\mathfrak{M}$. Тогда для любого $a \in \Delta$

$$f_a(z) = \frac{f(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}) - f(a)}{f'(a)(1-|a|^2)} \in \mathfrak{M},$$

$$\log f_a'(z) = \log f'\left(\frac{z+a}{1+\overline{a}z}\right) - \log f'(a) - 2\log(1+\overline{a}z).$$

Заметим, что $\log(1+z) \in BMOA$, т. к. функция $1+z$ однолистна и $1+z \neq 0$ (напр., [5]). Поскольку функция $1+\overline{a}z$ подчинена $1+z$ для любых $a \in \Delta$, то по теореме Рогозинского ([14], гл. 8, § 8)

$$\|\log(1+\overline{a}z)\|_{H^1} \leq \|\log(1+z)\|_{H^1}$$

для каждого $a \in \Delta$ (здесь $\|h\|_{H^1} = \sup\limits_{r\in[0,1)} \int\limits_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|d\theta$). Поэтому получаем неравенство

$$\int_0^{2\pi} \left|\log f'\left(\frac{re^{i\theta}+a}{1+\overline{a}re^{i\theta}}\right) - \log f'(a)\right| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |\log f_a'(re^{i\theta})|\, d\theta + 2\int_0^{2\pi} |\log(1+re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Следовательно, для проверки условия $\log f' \in BMOA$ для функций $f \in \mathfrak{M}$ достаточно проверить ограниченность $\|\log f'\|_{H^1}$ для всех функций $f \in \mathfrak{M}$ (т. е. показать, что $\log f' \in H^1$ для всех функций $f \in \mathfrak{M}$).

Пусть теперь $f \in \mathcal{U}_\alpha^*$. Из (1) следует

$$\log f'(z) = \log s'(z) - 2\int_0^{2\pi} \log(1-\omega(z)e^{it})\, d\mu(t),$$

где ω — функция Шварца и μ удовлетворяет условию (2). Поскольку $s \in \mathcal{U}_1'$ — выпуклая функция, то $\log s' \in BMOA$ (напр., [12], с. 172). Поэтому достаточно доказать, что функция

$$\psi(z) = \int_0^{2\pi} \log(1-\omega(z)e^{it})\, d\mu(t)$$

принадлежит H^1. Сначала рассмотрим случай, когда $\mu = \mu_n$ — ступенчатая функция с n разрывами в точках t_k, $k = 1, \ldots, n$, и скачками $d\mu_n(t_k) = a_k$. Тогда по (2)

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^n a_k \log(1-\omega(z)e^{it_k}), \quad \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \alpha - 1.$$

Отсюда по теореме Рогозинского

$$\|\psi\|_{H^1} \leq \sum_{k=1}^n |a_k|\, \|\log(1-\omega(z)e^{it_k})\|_{H^1} \leq \|\log(1+z)\|_{H^1} \sum_{k=1}^n |a_k| \leq (\alpha-1)\|\log(1+z)\|_{H^1},$$

т. е. $\psi \in H^1$.

Если μ — произвольная функция, удовлетворяющая (2), то, как показано в [15], существует последовательность ступенчатых функций μ_n, также удовлетворяющих (2), для которой соответствующая последовательность функций ψ_n при $n \to \infty$ имеет равномерный внутри Δ предел

$$\psi(z) = \int_0^{2\pi} \log(1-\omega(z)e^{it})\, d\mu(t).$$

Поэтому для любого фиксированного $r \in (0,1)$

$$\int_0^{2\pi} |\psi(re^{i\theta})| d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_n(re^{i\theta})| d\theta \leq (\alpha-1)\|\log(1+z)\|_{H^1}.$$

Следовательно, $\log f' \in H^1$ для любой функции $f \in \mathcal{U}_\alpha^*$.

б) Доказательство аналогично п. а). Впрочем, этот случай является следствием теоремы D из [16]. $\square$

Доказательство теоремы 2. 1) Не нарушая общности, можно считать, что функция $\varphi = (\widetilde{\varphi})^{\frac{1}{2}}$ непрерывная кусочно-линейная убывающая к нулю, и у графика ее нет конечных предельных угловых точек. В противном случае можно заменить данную функцию $\widetilde{\varphi}$ на бóльшую указанного выше типа. Также можно считать, что $\widetilde{\varphi}(1) = 1$.

Для доказательства используем следующий результат Шпехта [17]. Для каждого $\delta \in (0,1)$ существует односвязная область D, содержащая множество $\Delta \cup \{e^{it} : \delta\pi < |t| \le \pi\}$ и такая, что конформное отображение ω области D на круг Δ с $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) > 0$ удовлетворяет условиям

$$|\omega'(z) - 1| < \frac{1}{2}, \quad z \in D, \tag{9}$$

и

$$\frac{1-r}{2} < 1 - |\omega(re^{it})| < 3(1-r), \quad 0 < r < 1, \quad |t| < \delta\pi. \tag{10}$$

Выберем в качестве q достаточно большое натуральное число. По функции $\varphi(x)$ сконструируем функции

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) z^{q^k} \quad \text{и} \quad f(z) = \widetilde{f}(\omega(z)) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) \omega^{q^k}(z).$$

Поскольку $\varphi^{\frac{1}{2}}(k) \to 0$ при $k \to \infty$, то $\widetilde{f} \in \mathcal{B}_0$ ([12]). Поэтому [18] $f \in \mathcal{B}_0$.

Так как $|\omega(z)| < 1$ и по (9) $|\omega'(z)| > 1/2$, то

$$2|f'(z)| \ge \left|\frac{\omega(z)}{\omega'(z)} f'(z)\right| = \left|\frac{\omega(z)}{\omega'(z)} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) q^k \omega'(z) \omega^{q^k - 1}(z)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) q^k \omega^{q^k}\right| \ge$$

$$\ge \varphi^{\frac{1}{2}}(n) q^n |\omega(z)|^{q^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) q^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k) q^k |\omega(z)|^{q^k}.$$

Обозначим через E_1, E_2, E_3 соответственно выражения (неотрицательные), из которых составлена последняя строка. При $|t| < \delta\pi$ из (10) следует $|\omega(re^{it})| > 3r - 2$.

Пусть $z = r_n e^{it}$, $r_n = 1 - \frac{1}{q^n}$ и q так велико, что $(1 - 3q^{-n})^{q^n} > e^{-4}$. Тогда при $|t| < \delta\pi$ получим оценку

$$E_1 = \varphi^{\frac{1}{2}}(n) q^n |\omega(z)|^{q^n} > \varphi^{\frac{1}{2}}(n) q^n (1 - 3q^{-n})^{q^n} > e^{-4} \varphi^{\frac{1}{2}}(n) q^n.$$

Далее будем считать, что $8e^4 - \log q^2 < 0$ при выбранном значении q. Обозначим $\eta(t) = \log \varphi(t)$ и для этой функции построим новую функцию $\eta_*(t)$ следующим образом: $\eta_*(1) = 0$ при $t > 1$, перемещая соответствующую точку по графику функции $\eta(t)$ в направлении оси Ot, оставляем этот график без изменения, пока $\eta'(t) \ge 8e^4 - \log q^2$. Дойдя до точки t_0, справа от которой на некотором интервале $\eta'(t) < 8e^4 - \log q^2$, заменяем на отрезок прямой $y = \eta(t_0) + (8e^4 - \log q^2)(t - t_0)$ часть графика функции $\eta(t)$ от точки $(t_0, \eta(t_0))$ до первого пересечения этой прямой с графиком функции $\eta(t)$ справа от t_0 (если такого пересечения нет, то график функции $\eta(t)$ заменяем на промежутке (t_0, ∞)). Далее, повторяя описанную процедуру, пройдем весь график функции $\eta(t)$, выполняя предписанные замены кусков графика функции $\eta(t)$ на отрезки прямых. В результате будет построен график новой функции $\eta_*(t)$. Из построения ясно, что для всех t $\eta_*(t) \ge \eta(t)$, $\eta'_*(t) \ge 8e^4 - \log q^2$ во всех точках дифференцируемости функции $\eta_*(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta_*(t) = -\infty$.

Обозначим $\varphi_*(t) = e^{\eta_*(t)}$. Как и $\varphi(t)$, функция $\varphi_*(t)$ убывает к нулю. Поскольку $\varphi_*(t) \ge \varphi(t)$, то теорему 2 можно доказывать для функции $\varphi_*(t)$; далее ее по-прежнему будем обозначать $\varphi(t)$. Но теперь $[\varphi^{\frac{1}{2}}(t) q^t]$ — возрастающая функция, т. к. $[\varphi^{\frac{1}{2}}(t) q^t]' > 0$ во всех точках дифференцируемости.

Из возрастания функции $\varphi^{\frac{1}{2}}(t)q^t$ вытекает

$$E_2 = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{\frac{1}{2}}(k)q^k \le \int_1^n \varphi^{\frac{1}{2}}(x)q^x\,dx. \tag{11}$$

Покажем, что при $A = \frac{e^{-4}}{4}$ справедливо

$$\int_1^t \varphi^{\frac{1}{2}}(x)q^x\,dx \le A\varphi^{\frac{1}{2}}(t)q^t, \quad t \in [1,\infty). \tag{12}$$

При подходе к t снизу неравенство (12) очевидно. Поэтому достаточно показать, что во всех точках дифференцируемости функции φ

$$\varphi^{\frac{1}{2}}(t)q^t \le A\left[\frac{1}{2}\varphi'(t)\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)q^t + \varphi^{\frac{1}{2}}(t)q^t\log q\right],$$

что равносильно неравенству (видному из построения функции $\eta_*(t)$)

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \ge \frac{2}{A} - 2\log q = 8e^{-4} - 2\log q.$$

Из (11) и (12) получаем оценку

$$E_2 \le \frac{e^{-4}}{4}\varphi^{\frac{1}{2}}(n)q^n.$$

Для натуральных q и m, $q \ge 2$, $m > s > 0$, и для невозрастающей последовательности (a_k) положительных чисел Гирела [11] получил неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k q^{ks}(1-q^{-n})^{q^k} \le (me^{-1})^m a_n \frac{1}{q^{m-s}-1}q^{ns}, \quad n = 1,2,\dots \tag{13}$$

Применяя лемму Шварца при $|z| = r_n$ и неравенство (13) при $a_k = \varphi^{\frac{1}{2}}(k)$, $m = 4$ и $s = 1$, получим оценку

$$E_3 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k)q^k|\omega(z)|^{q^k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi^{\frac{1}{2}}(k)q^k\left|1-\frac{1}{q^n}\right|^{q^k} < \frac{e^{-4}}{4}\varphi^{\frac{1}{2}}(n)q^n.$$

Учитывая полученные оценки E_1, E_2 и E_3, приходим к неравенству

$$|f'(z)| \ge \frac{e^{-4}}{4}\varphi^{\frac{1}{2}}(n)q^n, \quad z = \left(1-\frac{1}{q^n}\right)e^{it}, \quad |t| \le \delta\pi.$$

Но $n = \frac{\log\frac{1}{1-r_n}}{\log q}$ и $\log q > 1$, поэтому

$$|f'(z)| \ge \frac{e^{-4}}{4}\frac{1}{1-r_n}\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\log\frac{1}{1-r_n}}{\log q}\right) > \frac{e^{-4}}{4}\frac{1}{1-r_n}\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\log\frac{1}{1-r_n}\right). \tag{14}$$

Это неравенство показывает, что существует такая постоянная $K > 0$, что

$$I_2(r_n, f') \ge K\frac{1}{(1-r_n)^2}\varphi\left(\log\frac{1}{1-r_n}\right).$$

Так как $I_2(r,f')$ возрастает относительно r, то при $r_n \le r \le r_{n+1}$ получим

$$I_2(r,f') \ge I_2(r_n,f') \ge K\frac{1}{(1-r_n)^2}\varphi\Big(\log\frac{1}{1-r_n}\Big) = \\ = K\frac{1}{q^2(1-r_{n+1})^2}\varphi\Big(\log\frac{1}{1-r_n}\Big) \ge K\frac{1}{q^2(1-r)^2}\varphi\Big(\log\frac{1}{1-r}\Big) \ge \\ \ge K\frac{1}{q^2(1-r)^2}\varphi\Big(\frac{1}{1-r}\Big) = K\frac{1}{q^2(1-r)^2}\widetilde{\varphi}^{1/2}\Big(\frac{1}{1-r}\Big).$$

Отсюда получаем утверждение 1) теоремы 2.

2) В силу произвольности $\delta \in (0,1)$ неравенство (14), доказанное для $z = r_n e^{i\theta}$, $r_n = 1 - \frac{1}{q^n}$ и $|\theta| < \pi\delta$, будет справедливо для любого $\theta \in (-\pi,\pi)$. Следовательно, это неравенство справедливо для любого $\theta \in [-\pi,\pi]$. Отсюда получаем утверждение 2) теоремы.

Для доказательства 3) заметим, что $M(r) = \max\limits_{\theta\in[0,2\pi]} |f'(re^{i\theta})|$ является неубывающей функцией от r. Поэтому при $r \ge r_n > 0$ аналогично п. 1) получим

$$M(r) \ge |f'(r_n e^{i\theta})| \ge \frac{1}{8qe^4}\frac{1}{1-r^2}\widetilde{\varphi}^{1/4}\Big(\frac{1}{1-r}\Big). \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Возьмем одно из θ, для которых выполнено (4). Можно считать $\theta = 0$, в противном случае рассмотрим функцию $f(ze^{-i\theta})$. Обозначим $W_\eta = W_\eta(1)$ и $\Gamma(r) = \{z : |z| = r\} \cap W_\eta$ для каждого $r \in (0,1)$. Для $\zeta \in \Gamma(r)$ обозначим через $\gamma(\zeta)$ дугу окружности, соединяющую r с ζ по $\Gamma(r)$, а через $|\gamma(\zeta)|$ — длину этой дуги. Тогда

$$|f(\zeta) - f(r)| = \Big|\int_{\gamma(\zeta)} f'(t)dt\Big| \le \int_{\gamma(\zeta)} |f'(t)|(1-|t|^2)\frac{|dt|}{1-|t|^2} \le \frac{\|f\|_{\mathcal{B}}}{1-r^2}|\gamma(\zeta)|.$$

Поскольку

$$|\gamma(\zeta)| \le \pi \arcsin\left[\frac{\sin\eta}{r}\frac{1-r^2}{\sqrt{r^2-\sin^2\eta}+\cos\eta}\right] \sim \frac{\pi\,\mathrm{tg}\,\eta}{2}(1-r^2)$$

при r, достаточно близких к 1, то для таких r

$$|f(\zeta) - f(r)| \le \frac{1}{2}(\pi\|f\|_{\mathcal{B}}\,\mathrm{tg}\,\eta + 1) = K. \tag{15}$$

Следовательно, $|f(\zeta)| \le |f(r)| + K$ и по (4)

$$\limsup_{W_\eta \ni \zeta \to 1} \frac{|f(\zeta)|}{A(1-r)} \le \limsup_{r\to 1} \frac{|f(r)|+K}{A(1-r)} \le C\|f\|_{\mathcal{B}}. \quad \square$$

Из (15) вытекает

Следствие. Если $f \in \mathcal{B}$, то для п. в. θ для любого некасательного пути $\gamma(\theta)$, оканчивающегося в $e^{i\theta}$,

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|f(re^{i\theta})|}{A(1-r)} = \limsup_{\gamma(\theta)\ni\zeta\to e^{i\theta}} \frac{|f(\zeta)|}{A(1-r)} \le C\|f\|_{\mathcal{B}},$$

где C — постоянная из теоремы М.

Заметим, что существует аналитическая в Δ функция f, для которой $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \infty$ для п. в. θ (напр., [19], теорема Д13). Однако, если $f \in \mathcal{B}$, то не существует такого множества E положительной меры, что для всех $\theta \in E$ $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = \infty$. Действительно, по неравенству (15) $|f(re^{i\theta})| - K \le |f(\zeta)|$ при $\zeta \in W_\eta(e^{i\theta})$, $|\zeta| = r \to 1$. Поэтому для всех $\theta \in E$ существует предел $\lim\limits_{W_\eta(e^{i\theta})\ni\zeta\to e^{i\theta}} f(\zeta) = \infty$, а по теореме Привалова ([14], гл. 10, § 2) такое множество E не может иметь положительную меру.

Доказательство теоремы 4. Достаточно доказать теорему для медленно убывающих функций φ, следовательно, можно считать, что

$$\lim_{r\to 1}\left(\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)(A(1-r))^{1/2}\right)=\infty.$$

Поэтому из (5) и (6), применяя (15), получим (7) и (8).

Заметим, что в теореме 4 равенство в (7) остается справедливым и при $\zeta \to e^{i\theta}$ по любому некасательному пути $\gamma(\theta)$, оканчивающемуся в $e^{i\theta}$.

Литература

1. Pommerenke Ch. *Linear-invariante Familien analytischer Funktionen.* I // Math. Ann. – 1964. – H. 155. – S. 108–154.
2. Старков В.В. *О некоторых линейно-инвариантных семействах функций, имеющих интегральное представление* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – № 5. – С. 82–85.
3. Годуля Я., Старков В.В. *Линейно-инвариантные семейства* // Тр. Петрозаводск. ун-та. Математика. – 1998. – Вып. 5. – С. 3–96.
4. Старков В.В., Димков Г.М. *Об одном линейно-инвариантном семействе, обобщающем класс близких к выпуклым функций* // Докл. Болгарской АН. – 1985. – Т. 38. – № 8. – С. 967–968.
5. Baernstein A. *Analytic function of bounded mean oscillation* // Aspects of contemporary complex analysis. – New York: Academic Press, 1980. – P. 3–36.
6. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции.* – М.: Мир, 1964. – 469 с.
7. Campbell D.M., Cima J.A., Pfaltzgraff J.A. *Linear space and linear-invariant families of locally univalent functions* // Manuscripta Math. – 1971. – V. 4. – P. 1–30.
8. Godula J., Starkov V.V. *Applications of ideas of Möbius invariance to abtain equivalent definitions of Bloch functions* // Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A. – 1995. – V. 49. – P. 41–58.
9. Clunie J.G., MacGregor T.H. *Radial growth of the derivative of univalent functions* // Comment. Math. Helv. – 1984. – V. 59. – P. 362–375.
10. Makarov N.G. *On the distortion of boundary sets under conformal mappings* // Proc. London Math. Soc. – 1985. – V. 51. – № 2. – P. 369–384.
11. Girela D. *On Bloch functions and gap series* // Publ. Mat. – 1991. – V. 35. – № 2. – P. 403–427.
12. Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps.* – Berlin–Heidelberg–New York: – Springer-Verlag, 1992. – 300 p.
13. Girela D. *Integral means and radial growth of Bloch functions* // Math. Z. – 1987. – V. 195. – P. 37–50.
14. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
15. Димков Г.М., Старков В.В. *Об обобщении почти выпуклых функций* // Плиска. – 1989. – Т. 10. – С. 62–76.
16. Girela D., Gonzalez C. *Some results on mean Lipshitz spaces of analytic functions* // Rocky Mount. J. Math. – 2000. – V. 30. – P. 901–922.
17. Specht E.M. *Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1951. – V. 71. – P. 183–196.
18. Pommerenke Ch. *On Bloch functions* // J. London Math. Soc. – 1970. – V. 2. – № 2. – P. 241–267.
19. Коллингвуд Э., Ловатер А. *Теория предельных множеств.* – М.: Мир, 1971. – 312 с.

Петрозаводский государственный университет

Институт математики
Люблинского университета

Поступила
16.08.2002