ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 517.544

*Л.А. АКСЕНТЬЕВ, А.В. КАЗАНЦЕВ, Н.И. ПОПОВ*

# О ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОДКЛАССАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Известно [1], что разрешимость внешней обратной краевой задачи ([2], § 33; [3], § 3) сводится к отысканию экстремальной точки внутреннего радиуса некоторой области. Единственность решения внешней задачи обеспечивается единственностью экстремальной точки, а эта единственность гарантируется определенными подклассами регулярных функций.

В данной статье теорема единственности устанавливается в собственном подклассе звездообразных функций и функций с ограниченным вращением. Эта теорема сформулирована в § 4 на основе двух совокупностей точных оценок, полученных в § § 2 и 3. В § 1 приводятся предварительные сведения и сопоставляются известные результаты, а в последнем § 4, кроме того, поставлены проблемы и намечены пути их исследования.

## 1.

Внешняя обратная краевая задача в постановке Ф.Д. Гахова ([2], § 33; [3], § 3) имеет решение в виде

$$F(\zeta)=\int_a^\zeta f'(\zeta)\left(\frac{1-\overline{\zeta}_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta,\quad |\zeta|<1, \tag{1}$$

причем $a$, $|a|<1$, — комплексная постоянная, $f(\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $\overline{E}$, функция $\ln|F'(e^{i\theta})|=\ln|f'(e^{i\theta})|=p(\theta)$ выражается через исходные данные, $\zeta_0$ является полюсом функции $F(\zeta)$. Для определения точки $\zeta_0$ служит уравнение

$$0=\text{выч}_{\,\zeta_0}F'(\zeta)=f''(\zeta_0)(1-|\zeta_0|^2)^2-2\overline{\zeta}_0 f'(\zeta_0)(1-|\zeta_0|^2),$$

которое после простого преобразования и отбрасывания индекса у $\zeta_0$ запишется в виде

$$f''(\zeta)/f'(\zeta)=2\overline{\zeta}/(1-|\zeta|^2). \tag{2}$$

Уравнение (2) в теории обратных краевых задач называется уравнением Ф.Д. Гахова. Единственность решения этого уравнения означает единственность решения обратной краевой задачи. Получению условий единственности в виде ограничений на функцию $p(\theta)$ посвящены несколько работ, список которых помещен в статье [4] и в обзорной работе [5]. Впоследствии появились несколько интересных работ, список которых приведен в [6]. Из этого списка выделим статью [7] с изящным результатом, который мы скоро напомним.

Условия единственности решения внешней обратной краевой задачи или единственности экстремума внутреннего радиуса области $f(E)$ ($E$ — единичный круг) (см. [1]) можно подразделить на внутренние условия (по поведению функции $f(\zeta)$) и внешние условия (по поведению функции $F(\zeta)$ с представлением (1)). Внешние условия удобно формулировать с помощью функции $\Phi(\omega)=F(1/\omega)$, определенной в области $E^-=\{\omega:|\omega|>1\}$ и имеющей в $\infty$ полюс первого порядка.

Упоминавшийся результат С.Р. Насырова и Ю.Е. Хохлова [7] состоит в теореме единственности на всем классе функций $\Phi(\omega)$ со звездообразным или спиралеобразным дополнением до плоскости $\mathbb{C}\setminus\Phi(E^-)$ и с условием $\zeta_0=0$. Как уже было отмечено в [1], внутренняя звездообразность или спиралеобразность для функции $f(\zeta)$ не гарантируют единственности критической точки внутреннего радиуса. В связи с этим будет интересным сопоставление соотношений, которые получаются из предположения звездообразности функции

$$\Phi(\omega)=F\left(\tfrac{1}{\omega}\right)=\int_a^{1/\omega} f'(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^2} \tag{3}$$

и звездообразности функции $f(\zeta)$. Получим такие импликации.

1) $$\operatorname{Re}\frac{\omega\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}>0 \implies \frac{\omega\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}=h\Big(\frac{1}{\omega}\Big) \quad (\operatorname{Re}h(\zeta)>0,\ \ h(0)=1).$$

Берем логарифмическую производную и пользуемся тем, что из (3) следует

$$\omega\frac{\Phi''(\omega)}{\Phi'(\omega)}=-\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)},\quad \zeta=1/\omega.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{\omega}-\frac{f''(1/\omega)}{f'(1/\omega)}\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}h\Big(\frac{1}{\omega}\Big)=\frac{h'(1/\omega)}{h(1/\omega)}\Big(-\frac{1}{\omega^2}\Big) \implies -\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=h(\zeta)-1-\zeta\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}. \tag{4}$$

2) $$\operatorname{Re}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}>0 \Rightarrow \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=h(\zeta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{\zeta}+\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}-\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} \Rightarrow \zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=h(\zeta)-1+\zeta\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)}. \tag{5}$$

Видно, что внешняя звездообразность (для функции $\Phi(\omega)$) и внутренняя звездообразность (для функции $f(\zeta)$) приводят к соотношениям (4) и (5), отличающимся знаками при $\zeta h'(\zeta)/h(\zeta)$ и при $\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)$.

С использованием представления $h(\zeta)=\frac{1+\varphi(\zeta)}{1-\varphi(\zeta)}$, $|\varphi(\zeta)|\le 1$, $\varphi(\zeta)\sim\zeta^2$ около $\zeta=0$, получим из (4) и (5) равенства

$$-\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{2(\varphi^2-\zeta^2(\varphi/\zeta)')}{1-\varphi^2} \tag{4'}$$

и

$$\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{2(\varphi^2+(\zeta\varphi)')}{1-\varphi^2}. \tag{5'}$$

Равенство $(4')$ после оценки дает

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|\le 2\Big(|\varphi|^2+|\zeta|^2\frac{1-|\varphi/\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\Big)\Big/(1-|\varphi|^2)=\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}$$

и приводит в случае строгого неравенства к невозможности второго корня уравнения (2), кроме $\zeta_0=0$, а из равенства $(5')$ такой оценки не получается.

Что же можно ожидать от внутренней звездообразности? Запрещающие примеры, связанные с соотношением $(5')$ , приводят к определенному конструктивному выводу. Именно, возьмем функцию $f(\zeta)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{1+\beta\zeta^2}{1-\alpha\zeta^2},\quad \alpha+\beta>0;\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Применим к ней результат из ([6], теорема 3, с. 32): если $\zeta=a$ — корень уравнения Гахова и $|\{f,a\}|>2/(1-|a|^2)^2$, где $\{f,\zeta\}=(f''/f')'-(f''/f')^2/2$ — шварциан функции $f(\zeta)$, то внешняя обратная краевая задача имеет не менее двух существенно различных решений. Поскольку для примера (6) $|\{f,0\}| = 3(\alpha+\beta)$, то при $\alpha+\beta > 2/3$ единственности наверняка не будет. Естественно посмотреть, будет ли сохраняться эффект единственности, который присущ примеру (6) с $\alpha+\beta < 2/3$, и в общем случае для подчинения $\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}$, когда $\alpha+\beta < 2/3$. Для решения этого вопроса нужны оценки, которые будут найдены в § 3, а в § 2 исследуется более простое подчинение с $f'(\zeta)$ в левой части. Выводы о единственности будут сделаны в § 4.

## 2.

Пусть в круге $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ для функции

$$f(\zeta) = \zeta + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4 + \cdots, \tag{7}$$

т. е. $a_2 = 0$ (и, как обычно, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$), выполняется подчинение

$$f'(\zeta) \prec T(\alpha,\beta;\zeta) = \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta} \tag{8}$$

при $\alpha,\beta \in (-1,1]$ и $\left|\begin{smallmatrix}\beta & 1\\ -\alpha & 1\end{smallmatrix}\right| = \alpha+\beta > 0$. В плоскости $\alpha+i\beta$ найдем границу области $D_m$, которая обеспечивает выполнение импликации

$$\{f'(\zeta) \prec T(\alpha,\beta;\zeta),\ \alpha+i\beta \in D_m\} \Longrightarrow \left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le \frac{2m|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \quad 0 \le m \le 2. \tag{9}$$

Условие подчинения (8) равносильно представлению

$$f'(\zeta) = \frac{1+\beta\varphi(\zeta)}{1-\alpha\varphi(\zeta)},$$

причем $|\varphi(\zeta)| \le 1$ и $\varphi(\zeta) \sim \zeta^2$ в окрестности $\zeta = 0$, если функция $f(\zeta)$ имеет разложение (7) с $a_2 = 0$ и поэтому $f'(\zeta) = 1 + 3a_3\zeta^2 + 4a_4\zeta^3 + \cdots$. Взяв логарифмическую производную от представления $f'(\zeta)$, будем иметь

$$\frac{f''}{f'} = \frac{(\alpha+\beta)\varphi'}{(1+\beta\varphi)(1-\alpha\varphi)}.$$

После оценки с применением неравенств $|\varphi'(\zeta)| \le 2|\zeta|(1-|\varphi|^2)/(1-|\zeta|^4)$ и $|\varphi| \le |\zeta|^2$ ([8], гл. 8, § 1) получим

$$\begin{aligned}\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| &\le \frac{2(\alpha+\beta)|\zeta|(1-|\varphi|^2)/(1-|\zeta|^4)}{|1+\beta\varphi|\,|1-\alpha\varphi|} \le \\ &\le \frac{2(\alpha+\beta)|\zeta|}{1-|\zeta|^2}\frac{1+|\varphi|}{1+|\zeta|^2}\frac{1-|\varphi|}{(1+\beta\operatorname{Re}\varphi)(1-\alpha\operatorname{Re}\varphi)} \le \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}g(\operatorname{Re}\varphi),\end{aligned} \tag{10}$$

где обозначено

$$g(t) \equiv g(\alpha,\beta;t) = \frac{(\alpha+\beta)(1-|t|)}{(1+\beta t)(1-\alpha t)} = (1-|t|)\left(\frac{\beta}{1+\beta t} + \frac{\alpha}{1-\alpha t}\right). \tag{11}$$

При переходе к последнему неравенству в (10) использовано, что $|\operatorname{Re}\varphi| \le |\varphi|$ и поэтому $1-|\varphi| \le 1-|\operatorname{Re}\varphi|$. Теперь нужно оценить функцию $g(t)$ при $t = \operatorname{Re}\varphi \in [-1,1]$.

Вначале покажем, что $g(t) \le g(0) = \alpha+\beta$ при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Для этого вычислим $g'(t)$ при $t < 0$. При $t > 0$ можно воспользоваться четностью функции $g(t)$ в таком смысле

$$g(\alpha,\beta;t) = g(\beta,\alpha;-t) \Longrightarrow g'(\alpha,\beta;t) = -g'(\beta,\alpha;-t). \tag{12}$$

В (11) $1-|t| = 1+t$ при $t < 0$ и поэтому

$$g'(t) = \frac{\beta(1-\beta)}{(1+\beta t)^2} + \frac{\alpha(1+\alpha)}{(1-\alpha t)^2}.$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, то $g'(t) > 0$ при $t \in (-1, 0)$ и в силу (12) $g'(t) < 0$ при $t \in (0, 1)$. Значит, функция $g(t)$ возрастает при $-1 \le t \le 0$ от $g(-1) = 0$ до $g(0) = \alpha + \beta$ и убывает при $0 \le t \le 1$ от $g(0) = \alpha + \beta$ до $g(1) = 0$. Поэтому $\max\limits_{[-1,1]} g(t) = g(0) = \alpha + \beta$ и графически $g(t)$ будет выглядеть в форме шлема над отрезком $[-1, 1]$.

Рассмотренный случай $\alpha, \beta \in (0, 1)$ соответствует тому, что в плоскости $\alpha + i\beta$ берется внутренность квадрата с вершинами 0; 1; $1 + i$; $i$. Учтем дополнительно такие подчинения

$$T(k\alpha, k\beta; \zeta) = T(\alpha, \beta; k\zeta) \prec T(\alpha, \beta; \zeta) \ (0 < k < 1) \quad \text{и} \quad T(\alpha_1, 1; \zeta) \prec T(\alpha_2, 1; \zeta) \ (\alpha_1 < \alpha_2),$$
$$T(1, \beta_1; \zeta) \prec T(1, \beta_2; \zeta) \ (\beta_1 < \beta_2).$$

Первое подчинение очевидно. Второе и третье подчинения легко проверяются и следуют из неравенств

$$T(\alpha_1, 1; 1) < T(\alpha_2, 1; 1) \iff 1 - \alpha_1 > 1 - \alpha_2;$$
$$T(1, \beta_1; -1) > T(1, \beta_2; -1) \iff 1 - \beta_1 > 1 - \beta_2.$$

Поэтому доказанное неравенство справедливо не только в отмеченном квадрате, но и во всем треугольнике с вершинами в точках $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$ с такой оговоркой. Для точек трапеции $D_m$ с вершинами $1 - i$, $1 + i(m - 1)$, $m - 1 + i$, $-1 + i$ будет справедливо неравенство

$$g(t) \le m, \quad 1 < m < 2, \tag{13}$$

причем знак равенства осуществляется только в точках отрезка, лежащего на прямой с уравнением $\alpha + \beta = m$ и соединяющего точки $1 + i(m - 1)$ и $m - 1 + i$. Во всех других точках замкнутой трапеции $\overline{D}_m$ неравенство (13) можно улучшить. Знак равенства достигается в каждой точке указанного отрезка, т. к. $g(0) = \alpha + \beta = m$. Неравенство (13) приводит к оценке, которая продолжает неравенство (10),

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right| \le \frac{2m|\zeta|}{1 - |\zeta|^2}, \quad \alpha + i\beta \in \overline{D}_m \ \ (f'(\zeta) \prec T(\alpha, \beta; \zeta)). \tag{14}$$

Оценка с самым большим коэффициентом 4 достигается при $\alpha = \beta = 1$ ($m = 2$). Попутно заметим, что трапеция $D_m$ при $m \to 2$ превращается в треугольник с вершинами $1 - i$, $1 + i$, $-1 + i$. В точках трапеции $\overline{D}_1$ выполняется неравенство (14) с коэффициентом 2, именно,

$$\left| \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} \right| \le \frac{2|\zeta|}{1 - |\zeta|^2}. \tag{15}$$

Исследуем теперь случаи $\alpha + \beta = m$, $0 < m < 1$, т. е. когда $\alpha$ и $\beta$ могут быть отрицательными. Проследим за знаками $g'(-1 + 0)$, $g'(-0)$; $g'(+0)$, $g'(1 - 0)$. Нетрудный счет приводит к таким выводам

1) $g'(-1 + 0) = \frac{\alpha+\beta}{(1+\alpha)(1-\beta)} > 0$ при $-1 < \alpha < 1$, $-1 < \beta < 1$ и $\alpha + \beta > 0$;

2) $g'(-0) = \beta(1 - \beta) + \alpha(1 + \alpha) = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta + 1)$ и знак $g'(-0)$ определяется знаком выражения $\alpha - \beta + 1$: в точках отрезка, соединяющего $-1$ и $i$, $g'(-0) = 0$, по правую сторону отрезка $g'(-0) > 0$, по левую сторону отрезка $g'(-0) < 0$;

3) когда комплексный параметр $\alpha + i\beta$ фиксирован на интервале $(1 + i(m - 1), m - 1 + i)$ между точками $\frac{m-1}{2} + i\frac{m+1}{2}$ и $m - 1 + i$ (как раз по левую сторону отрезка, соединяющего $-1$ и $i$), то в силу $g'(-1 + 0) > 0$ и $g'(-0) < 0$ появляется $g'(\tau) = 0$, $-1 < \tau < 0$, — *случай* $1^\circ$;

4) аналогично 2) появляется отрезок, соединяющий $-i$ и 1, в точках которого $g'(+0) = 0$; по правую сторону этого отрезка в точках интервала $\left(\frac{m+1}{2} + i\frac{m-1}{2},\ 1 + i(m - 1)\right)$ имеем $g'(+0) > 0$ и в силу $g'(1 - 0) < 0$ (аналогично 1)) появится $g'(\tau) = 0$, $0 < \tau < 1$, — *случай* $2^\circ$.

В случае $1^\circ$ получим при $\beta > 0$, $\alpha < 0$ импликации

$$g'(\tau) = 0 \implies \frac{\beta(1 - \beta)}{(1 + \beta\tau)^2} + \frac{\alpha(1 + \alpha)}{(1 - \alpha\tau)^2} = 0 \implies \frac{1 + \beta\tau}{1 - \alpha\tau} = \sqrt{-\frac{\beta(1 - \beta)}{\alpha(1 + \alpha)}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \implies \tau = \frac{\gamma - 1}{\alpha\gamma + \beta}.$$

Сосчитаем

$$(\alpha+\beta)g(\tau)=(\alpha+\beta)^2\left(1+\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma+\beta}\right)\left(1+\frac{\beta\gamma-\beta}{\alpha\gamma+\beta}\right)^{-1}\left(1-\frac{\alpha\gamma-\alpha}{\alpha\gamma+\beta}\right)^{-1}=$$
$$=(\alpha+\beta\gamma^{-1})[(1+\alpha)\gamma-(1-\beta)]=\alpha(1+\alpha)\gamma-\beta(1-\beta)\gamma^{-1}-\alpha(1-\beta)+\beta(1+\alpha)=$$
$$=(\sqrt{\beta(1+\alpha)}-\sqrt{-\alpha(1-\beta)}\,)^2=-\alpha+2\alpha\beta+\beta-2\sqrt{-\alpha(1+\alpha)\beta(1-\beta)}\,.$$

Для записи уравнения линии (обозначим ее $L_M$), в точках которой $g(\tau)=M$, преобразуем выражение $(\alpha+\beta)g(\tau)=M(\alpha+\beta)$ к виду $(1-M)\beta-(1+M)\alpha+2\alpha\beta=2\sqrt{-\alpha(1+\alpha)\beta(1-\beta)}$ и после возведения в квадрат и выделения множителя $\alpha+\beta$ имеем

$$\{\alpha[(1+M)^2-4M\beta]+(1-M)^2\beta\}(\alpha+\beta)=0.$$

Отсюда

$$L_M:\beta=\frac{(1+M)^2\alpha}{4M\alpha-(1-M)^2}. \tag{16}$$

Эта линия соединяет точку $\frac{M-1}{2}+i\frac{M+1}{2}$ и точку $-1+i$. Производная $\frac{d\beta}{d\alpha}$ является знакопостоянной, $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{(1-M^2)^2}{[4M\alpha-(1-M)^2]^2}<0$, и меняется от $\frac{d\beta}{d\alpha}\Big|_{\alpha=-1}=-\left(\frac{1-M}{1+M}\right)^2$ до $\frac{d\beta}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\frac{M-1}{2}}=-1$. При изменении $M$ от 0 до 1 линия $L_M$ будет двигаться из положения $L_0=\{\beta=-\alpha,\ -1<\alpha<-1/2\}$ в положение $L_1=\{\beta=1,\ -1<\alpha<0\}$, заметая треугольник с вершинами $-1+i$, $-1/2+i/2$, $i$.

В случае 2° аналогичные линии $\widetilde{L}_M$ с уравнениями

$$\beta=\frac{(1-M)^2\alpha}{4M\alpha-(1+M)^2}$$

будут заметать треугольник с вершинами в точках $1-i$, 1, $1/2-i/2$.

Нетрудно показать, что $g(\tau)>g(0)$ дает максимум $g(t)$ на $[-1,1]$ в случаях 1° и 2°, причем эти максимумы достигаются на функциях с $f_0'(\zeta)=\frac{1+\beta\zeta^2}{1-\alpha\zeta^2}$.

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 1.** *Области $D_m$ в плоскости $\alpha+i\beta$, где выполняется импликация* (9), *представляют собой трапеции с вершинами $1-i$, $1+i(m-1)$, $m-1+i$, $-1+i$, когда $1\le m<2$ (при $m=2$ получается треугольник), и криволинейные трапеции с прямолинейными основаниями $\left[\frac{m-1}{2}+i\frac{m+1}{2},\ \frac{m+1}{2}+i\frac{m-1}{2}\right]$, $[-1+i,\ 1-i]$ и боковыми криволинейными сторонами $L_m$, $\widetilde{L}_m$, когда $0<m<1$. Расширить эти области нельзя, т. к. знаки равенства в* (9) *осуществляются на функциях с $f_0'(\zeta)=\frac{1+\beta\zeta^2}{1-\alpha\zeta^2}$.*

## 3.

Пусть в круге $E$ для функции $f(\zeta)$ с разложением (7) выполняется подчинение

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\prec T(\alpha,\beta;\zeta)=\frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta} \tag{17}$$

при $\alpha+\beta>0$ и $\alpha,\beta\in(-1,1]$. В плоскости $\alpha+i\beta$ найдем границу области $G_m$, которая обеспечивает выполнение импликации

$$\left\{\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\prec T(\alpha,\beta;\zeta),\ \alpha+i\beta\in G_m\right\}\Longrightarrow\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|\le\frac{3m|\zeta|}{1-|\zeta|^2},\quad 0\le m\le 2. \tag{18}$$

Исследование поставленной задачи проведем по плану § 2 с сохранением аналогичных обозначений для простоты сопоставления результатов.

Условие подчинения (18) равносильно представлению

$$\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1+\beta\varphi(\zeta)}{1-\alpha\varphi(\zeta)} \stackrel{\text{def}}{=} h(\zeta), \tag{19}$$

причем $|\varphi(\zeta)| \le 1$ и $\varphi(\zeta) \sim \zeta^2$, если функция $f(\zeta)$ имеет разложение (7) и поэтому $f'(\zeta) = 1 + 3a_3\zeta^2 + \cdots$. Взяв логарифмическую производную от представления (19), будем иметь

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} - \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} \implies \zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = h(\zeta) - 1 + \zeta\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} = (\alpha+\beta)\left(\frac{\zeta\varphi'}{(1+\beta\varphi)(1-\alpha\varphi)} + \frac{\varphi}{1-\alpha\varphi}\right).$$

Отсюда аналогично оценке (10) получим

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \le (\alpha+\beta)\left(\frac{|\zeta|\,2|\zeta|(1-|\varphi|^2)(1-|\zeta|^4)^{-1}}{|1+\beta\varphi|\,|1-\alpha\varphi|} + \frac{|\zeta|^2}{|1-\alpha\varphi|}\right) =$$
$$= \frac{(\alpha+\beta)|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\left(\frac{2(1-|\varphi|)}{|1+\beta\varphi|\,|1-\alpha\varphi|}\frac{1+|\varphi|}{1+|\zeta|^2} + \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\alpha\varphi|}\right) \le \frac{|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}g(t), \tag{20}$$

где $g(t) = g(\alpha,\beta;t) \equiv |\alpha+\beta|\left(\frac{2(1-|t|)}{(1+\beta t)(1-\alpha t)} + \frac{1-|t|}{1-\alpha t}\right)$, $t = \operatorname{Re}\varphi \in [-1,1]$, а знак у $\alpha+\beta$ можно не оговаривать. Представив функцию $g(t)$ в виде

$$g(t) = (1-|t|)\left(\frac{2\beta}{1+\beta t} + \frac{3\alpha+\beta}{1-\alpha t}\right) \tag{21}$$

при $\alpha+\beta > 0$ (или $[-g(t)]$ в таком же виде при $\alpha+\beta < 0$), проведем ее оценку после вычисления производной. Используем при этом симметрию

$$g(\alpha,\beta;t) = g(-\alpha,-\beta;-t) \implies g'(a,\beta;t) = -g'(-\alpha,-\beta;-t).$$

При $t < 0$ получим

$$g'(t) = \frac{2\beta(1-\beta)}{(1+\beta t)^2} + \frac{(3\alpha+\beta)(1+\alpha)}{(1-\alpha t)^2};$$

аналогично при $t > 0$

$$g'(t) = -\frac{2\beta(1+\beta)}{(1+\beta t)^2} - \frac{(3\alpha+\beta)(1-\alpha)}{(1-\alpha t)^2}.$$

Если $0 < \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$, то $g'(t) > 0$ для $t < 0$ и $g'(t) < 0$ для $t > 0$. Это значит, что функция $g(t)$ монотонно меняется на интервалах $(-1,0)$, $(0,1)$, и достигает $\max\limits_{t\in[-1,1]} g(t) = g(0) = 3(\alpha+\beta)$. Самое большое значение этот максимум принимает при $\alpha = \beta = 1$ и равен 6, самое малое значение получается при $\alpha+\beta = 0$ и равно оно нулю.

Займемся теперь случаями, когда $\alpha$ или $\beta$ становятся отрицательными. Проследим за знаками $g'(-1+0)$, $g'(1-0)$, $g'(-0)$ и $g'(+0)$. Нетрудный счет дает такие результаты

1) $g'(-1+0) = \frac{(\alpha+\beta)(3-\beta)}{(1-\beta)(1+\alpha)} > 0$ при $\alpha+\beta > 0$, $-1 < \alpha < 1$, $-1 < \beta < 1$;
2) $g'(1-0) = -\frac{(\alpha+\beta)(3+\beta)}{(1+\beta)(1-\alpha)} < 0$ при тех же $\alpha$ и $\beta$;
3) $g'(-0) = 2\beta(1-\beta) + (3\alpha+\beta)[(1-\beta)+\alpha+\beta] = (\alpha+\beta)(3\alpha-2\beta+3)$, поэтому знак $g'(-0)$ определится знаком выражения $3\alpha-2\beta+3$: $g'(-0) = 0$ в точках прямой $\beta = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}$, соединяющей точки $-1$ и $-1/3+i$; по левую сторону этой прямой $g'(-0) < 0$, по правую сторону этой прямой имеем $g'(-0) > 0$;
4) $g'(+0) = -2\beta(1+\beta) - (3\alpha+\beta)[(1+\beta)-\alpha-\beta] = -(\alpha+\beta)(2\beta-3\alpha+3)$, поэтому $g'(+0) = 0$ в точках прямой $\beta = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}$, соединяющей точки $1/3-i$ и 1, по левую сторону этой прямой $g'(+0) < 0$, по правую сторону прямой получим $g'(+0) > 0$.

Отдельно отметим поведение $g(t)$ при $\alpha = 1$, $-1 < \beta < 1$ и при $\beta = 1$, $-1 < \alpha < 1$. При $\alpha = 1$ и $\beta < 0$ имеем для $t > 0$ выражение

$$g(t) = (1-t)\left(\frac{2\beta}{1+\beta t} + \frac{3+\beta}{1-t}\right) = 2\beta\frac{1-t}{1+\beta t} + 3 + \beta.$$

Поскольку $g' = -\frac{2\beta(1+\beta)}{(1+\beta t)^2} > 0$ при $-1 < \beta < 0$, то $\max\limits_{[0,1]} g(t) = g(1) = 3 + \beta > 3 + 3\beta = g(0)$. При $t \in (-1, 0)$ с использованием неравенств $\beta < 0$ и $t < -t$ получим $g(t) = (1+t)\left(\frac{2\beta}{1+\beta t} + \frac{3+\beta}{1-t}\right) < 3+\beta$. Следовательно, $\max\limits_{[-1,1]} g(t) = g(1)$.

При $\beta = 1$ и $\alpha < 0$ имеем для $t < 0$ выражение

$$g(t) = (1+t)\left(\frac{2}{1+t} + \frac{3\alpha+1}{1-\alpha t}\right) = 2 + \frac{(1+3\alpha)(1+t)}{1-\alpha t}.$$

Поскольку $g' = (1+3\alpha)\frac{1+\alpha}{(1-\alpha t)^2} < 0$ при $\alpha < -1/3$, то $\max\limits_{[-1,0]} g(t) = g(-1) = 2$. При $t \in (0, 1)$ получим $g(t) = (1-t)\left(\frac{2}{1+t} + \frac{1+3\alpha}{1-\alpha t}\right) < 2\frac{1-t}{1+t} < 2$, если $1 + 3\alpha < 0$. Поэтому $\max\limits_{[-1,1]} g(t) = g(-1) = 2$ при $\beta = 1$ и $-1 < \alpha < -1/3$. При $\beta = 1$ и $-1/3 \le \alpha < 0$ (как и при $0 \le \alpha \le 1$) имеем $\max\limits_{[-1,1]} g(t) = 3 + 3\alpha = 3(1 + \alpha)$.

Посмотрим, каким будет $\max\limits_{[-1,1]} g(t)$, когда $\alpha + i\beta$ находится на той части прямой с уравнением $\alpha + \beta = m$, $0 < m < 1$, которая соединяет точки $\frac{3+2m}{5} - i\frac{3(1-m)}{5}$ и $1 - i(1-m)$. Так как при этих $\alpha + i\beta$ уже имели $g'(+0) > 0$ и $g'(1-0) < 0$, то будет существовать точка $\tau$, $0 < \tau < 1$, в которой $g'(\tau) = 0$ и которая будет точкой максимума $g(t)$. Найдем вначале точку $\tau$, а потом и сам этот максимум.

Поскольку $\tau > 0$, $\alpha > 0$ и $\beta < 0$, то

$$g'(\tau) = 0 \implies \frac{(3\alpha+\beta)(1-\alpha)}{(1-\alpha\tau)^2} = -\frac{2\beta(1+\beta)}{(1-\beta\tau)^2} \implies$$

$$\implies \frac{1+\beta\tau}{1-\alpha\tau} = \sqrt{-\frac{2\beta(1+\beta)}{(3\alpha+\beta)(1-\alpha)}} \overset{\text{def}}{=} \gamma \implies \tau = \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma+\beta}.$$

Для вычисления максимального значения последовательно получим

$$g(\tau) = (1-\tau)\left(\frac{2\beta}{1+\beta\tau} + \frac{3\alpha+\beta}{1-\alpha\tau}\right) = \frac{1}{\alpha+\beta}[1+\beta-\gamma(1-\alpha)](2\beta\gamma^{-1} + 3\alpha + \beta) =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}[2\beta(1+\beta)\gamma^{-1} - (3\alpha+\beta)(1-\alpha)\gamma + 2\beta(1-\alpha) + (3\alpha+\beta)(1+\beta)] =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta}(\sqrt{(1+\beta)(3\alpha+\beta)} - \sqrt{-2\beta(1-\alpha)}\,)^2.$$

Найдем то геометрическое место точек $\alpha + i\beta$, для которых $g(\tau) = M$, $0 < M < 1$. После нетрудных вычислений из выражения

$$(1+\beta)(3\alpha+\beta) - 2\beta(1-\alpha) - M(\alpha+\beta) = 2\sqrt{-2\beta(1+\beta)(3\alpha+\beta)(1-\alpha)}$$

выведем равенство

$$(\beta+\alpha)\{\beta^3 + \beta^2(\alpha - 2M + 6) + \beta[(-10M+6)\alpha + M^2 + 2M + 9] + (M-3)^2\alpha\} = 0,$$

откуда следует $\beta = 0$ при $M = 3$ и при $M \ne 3$

$$\alpha = -\beta\frac{\beta^2 + (6-2M)\beta + M^2 + 2M + 9}{\beta^2 + (6-10M)\beta + (M-3)^2}. \tag{22}$$

Получили уравнение той линии, в точках которой $g(\tau(\alpha,\beta)) = M$. Эта гладкая линия проходит через точки 0 и $1-i$. Она является выпуклой кривой в направлении оси $\alpha$: при фиксированном значении $\beta$ получаем одно значение $\alpha$; прямыми линиями $\alpha+\beta = l$ эта кривая пересекается в двух точках, в одной точке (т. е. касается) или не пересекается. Касание получается при $l = M/3$. Действительно, после подстановки $\alpha = M/3 - \beta$ из (22) выпишем

$$(-\beta + M/3)[\beta^2 + (6 - 10M)\beta + M^2 - 6M + 9] = -\beta[\beta^2 + (6 - 2M)\beta + M^2 + 2M + 9]$$

и после простых преобразований получим

$$[5\beta - (M-3)]^2 M/3 = 0 \implies \beta = -\frac{3-M}{5} \implies \alpha = \frac{M}{3} + \frac{3-M}{5} = \frac{9+2M}{15}.$$

Эта точка касания как раз расположена на прямой $\beta = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}$.

При изменении $M$ от 0 до 3 участки линии $L_M$ с уравнением (22) заметают треугольник с вершинами в точках $3/5 - i3/5$, $1-i$, 1.

Аналогично исследуется случай, когда $\tau < 0$, $3\alpha+\beta < 0$ и $\beta > 0$. Для определения нуля производной решаем уравнение

$$-\frac{2\beta(1-\beta)}{(1+\beta\tau)^2} = \frac{(3\alpha+\beta)(1+\alpha)}{(1-\alpha\tau)^2} \implies \frac{1+\beta\tau}{1-\alpha\tau} = \sqrt{-\frac{2\beta(1-\beta)}{(3\alpha+\beta)(1+\alpha)}} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma \implies \tau = \frac{\gamma-1}{\alpha\gamma+\beta}.$$

Потом находим $g(\tau)$ и определяем геометрическое место точек, которые удовлетворяют уравнению $g[\tau(\alpha,\beta)] = M$. Это геометрическое место точек, обозначаемое через $\widetilde{L}_M$, соответствует преобразованному уравнению в виде

$$\alpha = -\beta\frac{\beta^2 - (6+2M)\beta + M^2 - 2M + 9}{\beta^2 - (6+10M)\beta + (M+3)^2}. \tag{23}$$

Участки линии $\widetilde{L}_M$ с уравнением (23) заметают треугольник с вершинами $-3/5+i3/5$, $-1/3+i$, $-1+i$, когда $M$ меняется от 2 до 0.

Стыковка отрезка, лежащего на прямой $\alpha+\beta = m$, в точках которого $\max\limits_{[-1,1]} g(t) = 3m$, происходит с линией $L_{3m}$ в точке $\frac{3+2m}{5} - i\frac{3(1-m)}{5}$ прямой $\beta = \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}$ (при $0 < m < 1$) и с линией $\widetilde{L}_{3m}$ в точке $-\frac{3+2m}{5} + i\frac{3(1-m)}{5}$ прямой $\beta = \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{2}$ (при $0 < m < 2/3$).

Нетрудно проверить, что максимальные значения функции $g(t)$ при $t \in [-1,1]$ будут достигаться теми функциями, которые порождены равенством

$$\zeta\frac{f_0'(\zeta)}{f_0(\zeta)} = \frac{1+\beta\zeta^2}{1-\alpha\zeta^2}. \tag{24}$$

Сформулируем главные из полученных утверждений.

**Теорема 2.** *Области $G_m$, где выполняется импликация* (18), *представляют собой трапеции с вершинами $1-i$, $1+i(m-1)$, $m-1+i$, $-1+i$, когда $1 \le m < 2$ (при $m=2$, т. е. при $\alpha=\beta=1$, получается треугольник), и криволинейные трапеции с прямолинейными основаниями $\left[m-1+i,\ \frac{2m+3}{5} + i\frac{3(m-1)}{5}\right]$, $[-1+i,\ 1-i]$, одной криволинейной боковой стороной $L_{3m}$ и прямолинейной боковой стороной в виде отрезка $[-1+i,\ m-1+i]$, когда $\frac{2}{3} \le m < 1$, или с двумя криволинейными боковыми сторонами $L_{3m}$ и $\widetilde{L}_{3m}$, когда $0 < m < \frac{2}{3}$. Расширить эти области нельзя, т. к. знаки равенства в неравенствах* (18) *осуществляются на функциях, удовлетворяющих соотношению* (24).

**Замечание 1.** При уменьшении $m$ области $D_m$ и $G_m$ уменьшаются и сужаются классы функций, связанные с этими областями: идет “выдавливание” функций при движении створки $\alpha+\beta = m$ из вершины $1+i$ треугольника $D_2$ или $G_2$ к основанию $[-1+i,\ 1-i]$. Области $D_0$ и $G_0$ вырождаются в само основание и соответствуют функции $f(z) = z$.

## 4.

На базе доказанных теорем 1 и 2 сформулируем утверждение о единственности корня $\zeta_0 = 0$ уравнения Гахова (2), т. е. о единственности решения (1) внешней обратной краевой задачи.

**Теорема 3.** *Если функция $f(\zeta)$, связанная с решением $F(\zeta)$ в форме* (1), *удовлетворяет одному из условий*:

$1^\circ$ $[f'(\zeta)]^c \prec T(\alpha,\beta;\zeta) = \frac{1+\beta\zeta}{1-\alpha\zeta}$, $\alpha+i\beta \in \overline{D}_m$ *из теоремы* 1 *и* $c$ — *комплексная постоянная при требовании* $|c| \geq m$ (*за исключением* $(f_0')^c = (1+\beta\zeta^2)/(1-\alpha\zeta^2)$);

$2^\circ$ $\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \prec T(\alpha,\beta;\zeta)$, $\alpha+i\beta \in \overline{G}_{2/3}$, *где* $G_m$ — *область из теоремы* 2 (*за исключением* $\zeta f_0'/f_0(\zeta) = (1+\beta\zeta^2)/(1-\alpha\zeta^2)$), — *то решение* $F(\zeta)$ *с* $\zeta_0 = 0$ *единственно.*

**Доказательство.** Для обоснования первого утверждения нужно обратить внимание на то, что у логарифмической производной функции $f'^c(\zeta)$ появится множитель $c$. Этот множитель войдет в окончательную оценку в виде

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leq \frac{2|\zeta|m/|c|}{1-|\zeta|^2}. \tag{25}$$

При требовании $m/|c| < 1$ будем иметь чистое неравенство

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| < \frac{2|\zeta|}{1-|\zeta|^2}, \tag{26}$$

выполнение которого во всем круге, кроме $\zeta = 0$, делает невозможным существование второго корня уравнения Гахова. Если же $m/|c| = 1$, то равенство в (26) может появиться только тогда, когда $f'^c = (1+\beta\zeta^2)/(1-\alpha\zeta^2)$, а эта функция исключена.

Для обоснования второго утверждения берем оценку из импликации (18) с $m = 2/3$ и получаем (26). Равенства не будет, потому что исключена функция (24). $\square$

**Замечание 2.** Плоскость параметров $\alpha+i\beta$ можно связать с плоскостью параметров $(a, R)$, причем каждый допустимый в теореме 3 параметр $\alpha+i\beta$ определяет величины $a$, $R$, приводящие к кругам $|w-a| < R$, которыми покрываются области значения функций $w = [f'(\zeta)]^c$ или $w = \zeta f'(\zeta)/f(\zeta)$. Связь параметров дается диффеоморфизмом

$$\left\{a = \frac{1+\alpha\beta}{1-\alpha^2},\ R = \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha^2}\right\} \longleftrightarrow \left\{\alpha = \frac{a-1}{R},\ \beta = R - \frac{a(a-1)}{R}\right\}:$$

$D_2 = G_2 \leftrightarrow$ полуполоса с границей в плоскости $(a, R)$, состоящей из луча $l_1$, который начинается в точке $(1, 0)$ и идет под углом $\pi/4$ в $\infty$, из параллельного ему луча $l_2$, который начинается в точке $(1/2, 1/2)$, и из отрезка, концы которого имеют координаты $(1, 0)$ и $(1/2, 1/2)$. Это диффеоморфное соответствие вырождается на границах указанных областей.

Остановимся на нерешенных задачах. В качестве первой проблемы отметим поиск общей характеристики класса функционалов, которые допускают импликации вила (9) и (18). Оценки из этих импликаций легко применимы к уравнению Гахова, поэтому такой класс допустимых функционалов определяет по существу класс корректности внешней обратной краевой задачи.

Конкретной нерешенной задачей является выделение допустимых подклассов спиральных функций, обеспечивающих единственность решения (1).

Сопоставление внешней и внутренней спиральности вначале идет, как и в случае звездообразных функций. Именно,

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}\frac{\omega\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)}\right) > 0 \Longrightarrow \frac{\omega\Phi'(\omega)}{\Phi(\omega)} = H\left(\frac{1}{\omega}\right)\ (\operatorname{Re}(e^{i\gamma}H(\zeta)) > 0,\ H(0) = 1) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow -\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)} = H(\zeta) - 1 - \frac{H'(\zeta)}{H(\zeta)}, \qquad H(\zeta) = \frac{1+e^{-i\gamma}\varphi(\zeta)}{1-e^{i\gamma}\varphi(\zeta)}\ \ (|\varphi(\zeta)| \leq 1,\ \varphi(\zeta) \sim \zeta^2); \tag{27}$$

$$\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)>0 \implies \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}=H(\zeta)\implies \zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=H(\zeta)-1+\frac{\zeta H'(\zeta)}{H(\zeta)}. \tag{28}$$

Оценивая выражение (27), получим

$$\left|\zeta\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|=\left|2\cos\gamma\frac{e^{-i\gamma}\varphi^2-\zeta^2(\varphi/\zeta)'}{(1-e^{i\gamma}\varphi)(1+e^{-i\gamma}\varphi)}\right|\leq$$
$$\leq 2\cos\gamma\frac{|\varphi|^2-|\zeta|^2(1-|\varphi/\zeta|^2)(1-|\zeta|^2)^{-1}}{\cos\gamma(1-|\varphi|^2)}=\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\implies (26)$$

за исключением экстремальных функций. При этом используется легко проверяемое неравенство

$$|(1-e^{i\gamma}\varphi)(1+e^{-i\gamma}\varphi)|\geq\cos\gamma(1-|\varphi|^2),\quad -\pi/2<\gamma<\pi/2.$$

В случае (28)

$$\left|\frac{\zeta f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right|\leq\cos\gamma\frac{|e^{-i\gamma}\varphi^2-(\zeta\varphi)'|}{|(1-e^{i\gamma}\varphi)(1+e^{-i\gamma}\varphi)|}\leq\frac{|\varphi|^2+|(\zeta\varphi)'|}{1-|\varphi|^2},$$

поэтому нужной оценки (26) не получается, как и при внутренней звездообразности.

Как раздробить класс спиральных функций с условием $\operatorname{Re}\left(e^{i\gamma}\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)}\right)>0$, чтобы на выделенных подклассах выполнялись оценки (26), и подойдут ли для этого функции вида $(1+e^{-i\gamma}\beta\zeta^2)/(1-e^{i\gamma}\alpha\zeta^2)$, — пока неясно. Однако утверждение, процитированное в § 1, дает возможность указать области, в которых нет точек, доставляющих единственность решению (1), при подчинениях вида $\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)\prec(1+e^{-i\gamma}\beta\zeta)/(1-e^{i\gamma}\alpha\zeta)$.

Для этого убедимся, что в случае $\zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}=\frac{1+e^{-i\gamma}\beta\zeta^2}{1-e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}$ имеем

$$1+\zeta\frac{f''}{f'}-\zeta\frac{f'}{f}=\frac{2e^{-i\gamma}\beta\zeta^2}{1+e^{-i\gamma}\beta\zeta^2}+\frac{2e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}{1-e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}\implies$$
$$\implies\frac{f''}{f'}=\frac{2e^{-i\gamma}\beta\zeta}{1+e^{-i\gamma}\beta\zeta^2}+\frac{2e^{i\gamma}\alpha\zeta}{1-e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}+\frac{(e^{-i\gamma}\beta+e^{i\gamma}\alpha)\zeta}{1-e^{i\gamma}\alpha\zeta^2}\implies\left.\frac{f''}{f'}\right|_{\zeta=0}=0,$$
$$\left.\left(\frac{f''}{f'}\right)'\right|_{\zeta=0}=3(e^{i\gamma}\alpha+e^{-i\gamma}\beta)\implies|\{f,\zeta\}|\,\big|_{\zeta=0}=3\sqrt{(\alpha+\beta)^2\cos^2\gamma+(\alpha-\beta)^2\sin^2\gamma};$$
$$|\{f,\zeta\}|\,\big|_{\zeta=0}>2\implies\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos2\gamma\geq4/9. \tag{29}$$

Знак неравенства характеризует внешность области с граничным эллипсом. Там не будет точек единственности решения (1). Найти области, которые будут гарантировать единственность, пока не удалось. Интересно отметить, как меняются границы областей с соотношением (29) при изменении $\gamma$: при $\gamma=0,\pi/4,\pi/2$ возникнут линии в форме пары параллельных прямых, окружности, второй пары параллельных прямых, а промежуточные положения займут эллипсы.

Некоторые проблемы, касающиеся единственности решения (1), возникают из сопоставления внешней обратной краевой задачи и обратной задачи логарифмического потенциала. Начало такому сопоставлению положила статья [4]. В частности, желательно достичь результата, уже обоснованного в обратной задаче логарифмического потенциала: в случае звездообразности эффект единственности не зависит от центра звездообразности.

В конце статьи заметим, что каждое из условий 1° и 2° теоремы 3 обеспечивает единственность максимума внутреннего (конформного) радиуса области $f(E)$. Тем самым дополняются утверждения по поведению конформного радиуса, полученные Кшижем [9], Кюнау [10] и частично повторяющие известные результаты (напр., [1], [6]).

## Литература


1. Аксентьев Л.А. *Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 2. – С. 3–11.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
3. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – 2-е изд. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
4. Аксентьев Л.А., Хохлов Ю.Е., Широкова Е.А. *О единственности решения внешней обратной краевой задачи* // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 3. – С. 319–330.
5. Аксентьев Л.А., Ильинский Н.Б., Нужин М.Т., Салимов Р.Б., Тумашев Г.Г. *Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Матем. анализ. – 1980. – Т. 18. – С. 67–124.
6. Аксентьев Л.А., Казанцев А.В., Киндер М.И., Киселев А.В. *О классах единственности внешней обратной краевой задачи* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1990, вып. 24. – С. 39–62.
7. Насыров С.Р., Хохлов Ю.Е. *Единственность решения внешней обратной краевой задачи в классе спиралеобразных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1984. – № 8. – С. 24–27.
8. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
9. Krzyż J.G. *Some remarks on the maxima of inner conformal radius* // Ann. UMCS.A. – 1992. – T. 46. – P. 57–61.
10. Kühnau R. *Maxima beim konformen radius einfach zusammenhängender Gebiete* // Ann. UMCS.A. – 1992. – T. 46. – P. 63–73.



*Казанский государственный университет*

*Марийский государственный университет*



*Поступила*
10.02.1997