ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 517.546

С.В. РОМАНОВА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ, НЕ ПРИНИМАЮЩИХ НУЛЕВОГО ЗНАЧЕНИЯ

Введение

Пусть B — класс всех функций $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$, аналитических в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих в D условиям $0 < |f(z)| \le 1$.

Кшиж [1] высказал гипотезу, что для любых $n \ge 1$ $\sup\limits_{f\in B}|a_n| = 2/e$ с экстремальными функциями $\lambda F(kz^n)$, $|\lambda| = |k| = 1$, где $F(z) = \exp[(z-1)/(z+1)]$. Эта гипотеза была доказана для $n = \overline{1,4}$. Проблема оценки коэффициентов в классе B обсуждалась во многих работах (см. напр., [1]–[4]). В [3] были получены асимптотические оценки для $|a_n|$ при $|a_0|$, близкие к 0 или 1. В данной статье получены асимптотические оценки линейных непрерывных функционалов вида $L(f) = \operatorname{Re}(a_n + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \alpha_{n-2}a_{n-2} + \cdots + \alpha_1 a_1)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in C$.

Обозначим через $B(t)$ класс функций $f \in B$, для которых $a_0 = e^{-t}$, $t > 0$ и $F_t(z) = \exp[-t(1-z)/(1+z)] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Для всякого $n \ge 1$ найдется $t_0 > 0$ такое, что* $\max\limits_{f\in B(t)} |a_n| = A_1(t)$ $\forall t \in [0, t_0]$.

Теорема 2. (a) *Для всякого $n \ge 1$ найдется $t_0 > 0$ такое, что экстремальная функция для функционала $L(f)$ будет отличной от функции $F_t(z^n)$ $\forall t \in [0, t_0]$;*

(b) *для всякого $n \ge 1$ найдется $t_1 > 0$ такое, что экстремальными функциями для функционала $L(f)$ будут вращения функции $F_t(z)$ $\forall t \ge t_1$.*

Следствие. Для всякого $n \ge 1$ найдется $t_1 > 0$ такое, что $\max\limits_{f\in B(t)} |a_n| = A_n(t)$ $\forall t \ge t_1$.

1. Предварительные результаты

В [2] показано, что любую функцию $f \in B(t_0)$, $t_0 > 0$, можно представить в виде $f(z) = f(z, t_0)$, где $f(z,t)$ является интегралом дифференциального уравнения типа Левнера

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)(1 + e^{-iu(t)}z)/(1 - e^{-iu(t)}z), \quad 0 \le t \le t_0, \quad z \in D, \quad f(z,0) = 1, \tag{1}$$

$u(t)$ — вещественнозначная, непрерывная на $[0, t_0]$ функция, называемая управлением.

Наряду с этим уравнением понадобится обобщенное дифференциальное уравнение типа Левнера, представляющее класс $B(t_0)$

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t) \sum_{k=1}^{m} \lambda_k [(1 + e^{-iu_k(t)}z)/(1 - e^{-iu_k(t)}z)], \tag{2}$$

$\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_m \ge 0$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, $u_k(t)$ — вещественнозначные непрерывные управления.

Пусть $f(z,t)$ имеет разложение $f(z,t) = a_0(t) + a_1(t)z + \cdots$ и является решением дифференциального уравнения (1). Введем вектор $a = a(t) = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Из уравнения (1) получаем систему дифференциальных уравнений для вектора $a(t)$

$$\begin{aligned}&\dot a_0 = -a_0(t), \quad a_0(0) = 1,\\ &\dot a_k = -a_k(t) - 2a_{k-1}(t)e^{-iu(t)} - \cdots - 2a_0(t)e^{-iku(t)} = G_k(t,a,u), \quad a_k(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n.\end{aligned} \tag{3}$$

Из первого уравнения системы (3) следует $a_0{=}e^{-t}$. Положим $G(t,a,u){=}(G_1(t,a,u), ..., G_n(t,a,u))^T$, $a(0) = a^0 = 0$.

Для нахождения области значений функционала $L(f)$ в классе $B(t)$ используем принцип максимума Понтрягина ([5], с. 25–26). Введем множители Лагранжа ψ_k, $k = 1, \ldots, n$, которые образуют сопряженный комплекснозначный n-мерный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)^T$. Запишем функцию Гамильтона в комплексной форме $H(t,a,\overline{\psi},u) = \mathrm{Re}(G(t,a,u)\overline{\psi}) = \mathrm{Re}\sum\limits_{k=1}^{n} G_k(t,a,u)\overline{\psi}_k$. Для произвольного фиксированного управления u и для соответствующего фазового вектора a функция ψ должна удовлетворять сопряженной гамильтоновой системе $\frac{d\overline{\psi}}{dt} = -\big(\frac{\partial G(t,a,u)}{\partial a}\big)^T\overline{\psi}$, где $\frac{\partial G(t,a,u)}{\partial a}$ — якобиева матрица.

Обозначим через $U^*(t,a,\overline{\psi})$ множество $\mathrm{abs}\max\limits_u H(t,a,\overline{\psi},u)$ точек абсолютного максимума функции Гамильтона. Для нахождения множества значений функционала $L(f)$ достаточно исследовать семейство гамильтоновых систем

$$\begin{aligned}&\frac{da}{dt} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k G(t,a,u_k), \quad a(0) = a^0,\\ &\frac{d\overline{\psi}}{dt} = -\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial G(t,a,u_k)}{\partial a}\right)^T \overline{\psi}, \quad \overline{\psi}(0) = \xi,\end{aligned} \tag{4}$$

где $m \le n$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ — произвольный постоянный вектор с неотрицательными координатами, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1$, $u_k \in U^*(t,a,\overline{\psi})$, $0 \le u_1 < \cdots < u_m < 2\pi$. Вектор начальных данных сопряженной системы $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ считаем произвольным.

Можно показать, используя ([6], с. 124–126), что справедлива

Лемма. *Максимум функционала $L(f)$ в классе $B(t)$ достигается на таких функциях, которые представимы интегралами обобщенного дифференциального уравнения* (2) *с постоянными управлениями.*

Если $0 \le t \le T$, то сопряженный вектор $\psi(t)$ удовлетворяет условию трансверсальности на правом конце $T : \psi(T) = (0, \ldots, 0, 1)$.

2. Схема доказательств теорем 1 и 2

1. Используя условия трансверсальности, положим $\xi = \xi^0 + o(1)$, где $\xi^0 = (0, \ldots, 0, 1)$. Функция Гамильтона будет иметь точки максимума $u_k = u_k^0 + o(1)$, $1 \le k \le m$, $m \le n$, где $u_1^0 = \pi/n$, $u_2^0 = 3\pi/n, \ldots, u_n^0 = (2n-1)\pi/n$.

Обозначим $C_p(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e^{-ipu_k}$. Перепишем систему (4) в виде

$$\begin{aligned}&\dot a_1 = -a_1 - 2e^{-t}C_1(\lambda), \quad a_1(0) = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\dot a_n = -a_n - 2a_{n-1}C_1(\lambda) - \cdots - 2a_1C_{n-1}(\lambda) - 2e^{-t}C_n(\lambda), \quad a_n(0) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

Интегрирование системы (5) приводит к формуле

$$a_n = -2te^{-t}C_n(\lambda) + 2t^2e^{-t}\Phi_n(\lambda) + t^2B_n(\lambda,t)e^{-t}, \quad n > 1, \tag{6}$$

где $\Phi_n(\lambda) = C_1(\lambda)C_{n-1}(\lambda) + C_2(\lambda)C_{n-2}(\lambda) + \cdots + C_{n-1}(\lambda)C_1(\lambda)$, $B_n(\lambda, t)$ — многочлен вида $b_1(\lambda)t + b_2(\lambda)t^2 + \cdots + b_{n-2}(\lambda)t^{n-2}$. Легко показать, что $\Phi_n(\lambda) = e^{io(1)}\Phi_n^*(\lambda)$, $\Phi_n^*(\lambda) \le 0$.

Теперь из формулы (6) получим

$$a_n = 2te^{-t}e^{io(1)} + 2t^2e^{-t}e^{io(1)}\Phi_n^*(\lambda) + e^{-t}t^2B_n(\lambda, t). \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что справедливо неравенство $\operatorname{Re} a_n \le A_1(t) + t^2e^{-t}\Phi_n^*(\lambda) \le A_1(t)$, где $A_1(t) = 2te^{-t}$. Это неравенство точно, равенство достигается для $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1/n$, $u_k = u_k^0$. $\square$

2. (a) При малых $t > 0$ будем рассматривать $\xi = \xi^0 + o(1)$, где $\xi^0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$. Функция Гамильтона имеет вид

$$H(0, a^0, \xi, u) = -\operatorname{Re}[\alpha_1 e^{-iu} + \alpha_2 e^{-2iu} + \cdots + \alpha_{n-1}e^{-i(n-1)u} + e^{inu}].$$

Пусть $\max\limits_u H(0, a^0, \xi, u)$ достигается в точках $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Интегрируя систему (5), получим $a_n = -2te^{-t}C_n(\lambda) + o(t)$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(a_n + \alpha_{n-1}a_{n-1} + \cdots + \alpha_1 a_1) \le -2te^{-t}\operatorname{Re}(C_n(\lambda) + \alpha_{n-1}C_{n-1}(\lambda) + \cdots + \alpha_1 C_1(\lambda)) + o(t). \tag{8}$$

Выражение в правой части неравенства (8) может быть равно $A_1(t)$ только в том случае, если $-\operatorname{Re}[C_n(\lambda) + \alpha_{n-1}C_{n-1}(\lambda) + \cdots + \alpha_1 C_1(\lambda)] = 1$. В этом случае максимум функции Гамильтона равен 1. Следовательно, экстремальная функция будет отличной от функции $F_t(z^n)$.

(b) Пусть при фиксированном ξ функция Гамильтона имеет m точек максимума $u_1, u_2, \ldots, u_m$ на $[0, 2\pi)$. Интегрирование системы (5) приводит к формуле $a_n = (t^n(-1)^n 2^n C_1^n(\lambda)/n! + \cdots - 2tC_n(\lambda))e^{-t}$, где коэффициент при t^n равен $e^{-t}(-1)^n 2^n C_1^n(\lambda)/n!$.

Траектория $a_n(t)$ может быть оптимальной при достаточно больших t, если число m в обобщенном уравнении Левнера (2) равно 1. Это означает, что $a_n = A_n(t)$, $a_{n-1} = A_{n-1}(t)k^{n-1}, \ldots$, $a_1 = A_1(t)k$, где $|k| = 1$. $\square$

Литература

1. Krzyz J. *The coefficient problem for bounded nonvanishing functions* // Ann. Polon. Math. – 1968. – V. 20. – P. 314.
2. Hummel J.A., Scheinberg S., Zalcman L. *The coefficient problem for bounded nonvanishing functions* // J. Anal. Math. – 1977. – V. 34. – P. 169–190.
3. Peretz R. *Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions* // Complex Variables. – 1992. – V. 17. – P. 213–222.
4. Szapiel W. *A new approach to the Krzyz conjecture* // Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. – 1994. – V. 48. – P. 169–192.
5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе В.В., Мищенко В.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1976. – 392 с.
6. Александров И.А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1976. – 344 с.

Саратовский государственный университет

Поступили
полный текст 31.07.2000
краткое сообщение 28.06.2002