ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 514.4

М.А. МИКЕНБЕРГ

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГООБРАЗИЙ НАД ЛОКАЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ГОЛОМОРФНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

1. Введение

Обозначим через $\mathcal{A}$ локальную алгебру над полем вещественных чисел R. Всюду далее локальная алгебра $\mathcal{A}$ будет конечномерной, ассоциативной, коммутативной, унитальной алгеброй. Обозначим через I радикал алгебры $\mathcal{A}$. Как векторное пространство над полем R алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна прямой сумме $\mathrm{R} \oplus \mathrm{I}$. Обозначим через n размерность алгебры $\mathcal{A}$ над полем R, $\mathcal{A} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$. Обозначим через M конечномерное многообразие над $\mathcal{A}$. Напомним (см. [1], [2]), что многообразие M называется многообразием над алгеброй $\mathcal{A}$, если у него существует атлас $\{(\mathrm{U_i}, \varphi_{\mathrm{i}})\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ такой, что $\varphi(\mathrm{U_i}) \subset \mathcal{A}^{\mathrm{m}}$ (где m одно и то же для всех i), а функции перехода $\varphi_{\mathrm{j}} \circ \varphi_{\mathrm{i}}^{-1}$ $\mathcal{A}$-голоморфны. Атлас $\{(\mathrm{U_i}, \varphi_{\mathrm{i}})\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ будем называть $\mathcal{A}$-атласом. (Напомним, что отображение $f : (\mathrm{U} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{p}}) \to \mathcal{A}^{\mathrm{q}}$, U открыто в $\mathcal{A}^{\mathrm{p}}$, называется $\mathcal{A}$-голоморфным, если оно принадлежит классу C^{∞} как отображение над R, если отождествить $\mathcal{A}$ с R^{n} (n — размерность алгебры $\mathcal{A}$ над полем R) и производная f' $\mathcal{A}$-линейна.) Число m называется размерностью многообразия m над $\mathcal{A}$. Любое многообразие над алгеброй $\mathcal{A}$ можно рассматривать как вещественное многообразие. Размерность многообразия M над R равна mn. В данной статье изучаются голоморфные вложения многообразия M над локальной алгеброй $\mathcal{A}$ в некоторую декартову степень $\mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ алгебры $\mathcal{A}$.

2. Некоторые топологические свойства многообразий над локальной алгеброй $\mathcal{A}$, голоморфно вложенных в некоторую декартову степень $\mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ алгебры $\mathcal{A}$

Пусть далее M — многообразие размерности m над локальной алгеброй $\mathcal{A}$, которая имеет размерность n над R. Отображение $\mathrm{F} : \mathrm{M} \to \mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ называется $\mathcal{A}$-голоморфным вложением многообразия M над локальной алгеброй $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^{\mathrm{r}}$, если F задает вложение класса C^{∞} многообразия M, рассматриваемого как вещественное многообразие, в R^{rn} ($\mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$) и отображение F $\mathcal{A}$-голоморфно. Последнее означает, что многообразие M обладает $\mathcal{A}$-атласом $\{(\mathrm{U_i}, \varphi_{\mathrm{i}})\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ таким, что отображения $\mathrm{F} \circ \varphi_{\mathrm{i}}^{-1} : (\varphi_{\mathrm{i}}(\mathrm{U_i}) \subset \mathcal{A}^{\mathrm{m}}) \to \mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ $\mathcal{A}$-голоморфны. Рассмотрим нижний центральный ряд радикала I алгебры $\mathcal{A}$

$$\mathrm{I} \supset \mathrm{I}^2 \supset \mathrm{I}^3 \supset \cdots \supset \mathrm{I}^{\mathrm{q}-1} \supset \mathrm{I}^{\mathrm{q}} \supset \mathrm{I}^{\mathrm{q}+1} = 0.$$

Рассмотрим идеал $\mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1}$. Здесь через $[\mathrm{q}/2]$ обозначена целая часть числа $\mathrm{q}/2$. Пусть размерность идеала $\mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1}$ над полем R равна k. Обозначим через $\mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1} \cdot \mathrm{T_x M}$ подпространство в касательном пространстве $\mathrm{T_x M}$ многообразия M в точке x, состоящее из векторов вида $z = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{m}} \alpha_i z_i$, где $\alpha_i \in \mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1}$, $z_i \in \mathrm{T_x M}$. Размерность подпространства $\mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1} \cdot \mathrm{T_x M}$ над полем R равна mk.

Лемма. *Для любой голоморфной системы координат* (U, φ) *на* M *и для любых* $u, v \in (\mathrm{I}^{[\mathrm{q}/2]+1})^{\mathrm{m}} \subset \mathrm{A}^{\mathrm{m}}$ *справедливо* $(\mathrm{F} \circ \varphi^{-1})''(u, v) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим голоморфную систему координат (U,φ) в окрестности точки x. Она задает изоморфизм между $\mathrm{T_xM}$ и $\mathcal{A}^{\mathrm{m}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{mn}}$ и между подпространством $\mathrm{I}^{[q/2]+1}\cdot \mathrm{T_xM}$ и декартовой степенью $(\mathrm{I}^{[q/2]+1})^{\mathrm{m}}$ идеала $\mathrm{I}^{[q/2]+1}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{F}} = \mathrm{F}\circ\varphi^{-1}$, $\widetilde{\mathrm{x}} = \varphi(\mathrm{x})$. Вторая производная $\widetilde{\mathrm{F}}''(x)$ отображения $\widetilde{\mathrm{F}}$ в точке $\widetilde{\mathrm{x}}$ тождественно равна нулю на декартовом произведении $(\mathrm{I}^{[q/2]+1})^{\mathrm{m}}$ идеала $\mathrm{I}^{[q/2]+1}$. Действительно, пусть $u, v \in (\mathrm{I}^{[q/2]+1})^{\mathrm{m}}$, тогда $u = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{m}} \alpha_i u_i$, $v = \sum\limits_{i=1}^{\mathrm{m}} \beta_i v_i$, где $u_i, v_i \in \mathcal{A}^{\mathrm{m}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{mn}}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathrm{I}^{[q/2]+1}$. Так как отображение F $\mathcal{A}$-голоморфно, то $\widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})$ — симметрическая $\mathcal{A}$-билинейная форма. Таким образом,

$$\widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})(u,v) = \widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i,\ \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \beta_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{\mathrm{m}}\sum_{j=1}^{\mathrm{m}} \alpha_i\beta_j \widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})(u_i, v_j).$$

(Здесь через $\widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})(u,v)$ обозначено значение второй производной отображения $\widetilde{\mathrm{F}}$ в точке $\widetilde{\mathrm{x}}$ на элементах u и v.) Но $\alpha_i\beta_j = 0$, а значит, $\widetilde{\mathrm{F}}''(\widetilde{\mathrm{x}})(u,v) = 0$. $\square$

Пусть $\mathrm{F}:\mathrm{M}\to\mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ — $\mathcal{A}$-голоморфное вложение многообразия M. Введем в $\mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$ евклидову структуру. Скалярное произведение в $\mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$ будем обозначать через (a,b), где $a, b \in \mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$. Для почти всех векторов (т. е. для всех векторов, кроме множества меры нуль (см. [3], теорема 6.6)) $\mathrm{p} \in \mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$ функция $\mathrm{L_p}:\mathrm{M}\to\mathrm{R}$, где

$$\mathrm{L_p(x) = (F(x) - p, F(x) - p)},$$

имеет невырожденные критические точки. Имеем

$$\mathrm{L_p'(x) = 2(F'(x), F(x) - p)},$$

где $\mathrm{L_p'(x)}$ — первая производная отображения $\mathrm{L_p}$ в точке x. Пусть $\mathrm{x_0}$ — критическая точка отображения $\mathrm{L_p}$. Введем голоморфную систему координат в окрестности точки $\mathrm{x_0}$, в которой будем проводить дальнейшие вычисления. Имеем

$$\mathrm{L_p'(x_0) = 2(F'(x_0), F(x_0) - p) = 0}$$

и

$$\mathrm{L_p''(x_0) = 2((F'(x_0), F'(x_0)) + (F''(x_0), F(x_0) - p))},$$

где $\mathrm{L_p''(x_0)}$ — вторая производная отображения $\mathrm{L_p}$ в критической точке $\mathrm{x_0}$. $\mathrm{L_p'(x)}$ — R-линейная форма, действующая в $\mathrm{T_xM}$, а если $\mathrm{x_0}$ — критическая точка отображения $\mathrm{L_p}$, то $\mathrm{L_p''(x_0)}$ — R-билинейная симметрическая форма, действующая в касательном пространстве $\mathrm{T_{x_0}M}$. Пусть $\mathrm{(F'(x), F'(x))}$ — первая квадратичная форма многообразия M (вложенного в $\mathrm{R}^{\mathrm{rn}} \approx \mathcal{A}^{\mathrm{r}}$). Если $\mathrm{x_0}$ — критическая точка отображения $\mathrm{L_p}$, то $\mathrm{(F''(x_0), F(x_0) - p)}$ — вторая квадратичная форма многообразия M в точке $\mathrm{x_0}$, вычисленная в направлении вектора $\mathrm{F(x_0) - p}$. Если $\mathrm{x_0}$ — невырожденная критическая точка функции $\mathrm{L_p}$, то $\mathrm{L_p'(x_0) = 0}$, а билинейная форма $\mathrm{L_p''(x_0)}$ невырождена (см. [3], [4]).

Теорема. *Если* $\mathrm{F}:\mathrm{M}\to\mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ — *$\mathcal{A}$-голоморфное вложение многообразия* M *над локальной алгеброй $\mathcal{A}$ такое, что образ* F(M) *замкнут в* $\mathcal{A}^{\mathrm{r}} \approx \mathrm{R}^{\mathrm{rn}}$, *то* M *имеет гомотопический тип клеточного комплекса размерности, не больше чем* $\mathrm{m(n - k)}$, *где* k — *размерность идеала* $\mathrm{I}^{[q/2]+1}$ *над* R.

Доказательство. Выберем точку $\mathrm{p} \in \mathcal{A}^{\mathrm{r}}$ так, что функция

$$\mathrm{L_p(x) = (F(x) - p, F(x) - p)}$$

имеет невырожденные критические точки. Тогда M имеет гомотопический тип клеточного комплекса, поскольку компактны множества $\mathrm{M}^a = \mathrm{L_p^{-1}}([0,a])$ (см. [3], теорема 3.5; а также [4]).

При этом каждой критической точке x_0 с индексом λ функции L_p соответствует одна клетка размерности λ. В критической точке x_0 в силу леммы билинейная форма

$$L''_p(x_0) = 2((F'(x_0), F'(x_0)) + (F''(x_0), F(x_0) - p))$$

положительно определена на подпространстве пространства $T_{x_0}M$ размерности mk. Значит, билинейная форма $L''_p(x_0)$ отрицательно определена на подпространстве пространства $T_{x_0}M$ размерности, не выше чем $m(n-k)$. $\square$

Следствие 1. В условиях теоремы $H_i(M, Z) = 0$, если $i > m(n-k)$. (Здесь через $H_i(M, Z)$ обозначена i-я группа целочисленных гомологии многообразия M.)

Следствие 2. Компактное многообразие над локальной алгеброй $\mathcal{A}$ не допускает $\mathcal{A}$-голоморфное вложение в $\mathcal{A}^r$ ни для какого r.

Следствие 3. Если в условиях теоремы $\mathcal{A}$ — алгебра дуальных чисел, то многообразие M имеет гомотопический тип клеточного комплекса размерности, не больше чем m. Следовательно, $H_i(M, Z) = 0$, если $i > m$.

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 264 с.
2. Шурыгин В.В. *Гладкие многообразия над локальными алгебрами, их применение в дифференциальной геометрии высшего порядка.* Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1998. – 128 с.
3. Милнор Дж. *Теория Морса.* – М.: Мир, 1965.
4. Постников М.М. *Введение в теорию Морса.* – М.: Мир, 1965.

Самарский государственный педагогический университет

Поступила 17.05.2001