ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 1 (428)

УДК 517.956

*В.И. ЖЕГАЛОВ, М.П. КОТУХОВ*

# ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ФУНКЦИИ РИМАНА

**1.** Как известно ([1], с.199), функция Римана уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{1}$$

есть решение сопряженного уравнения

$$v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} v(x,\tau,t,\tau) &= \exp \int_t^x b(\xi,\tau)d\xi, \\ v(t,y,t,\tau) &= \exp \int_\tau^y a(\tau,\eta)d\eta. \end{aligned} \tag{3}$$

Предполагается, что в рассматриваемой области $a, b, c \in C^2$ и существуют $a_x, b_y \in C^2$. Для нахождения $v$ запишем (2) в форме

$$\Big(\frac{\partial}{\partial y} - a\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial x} - b\Big)v = hv, \tag{4}$$

где $h$ — инвариант Римана ([1], с.176)

$$h = a_x + ab - c. \tag{5}$$

Построим сначала функцию Римана $R$ для (4) считая $h \equiv 0$. Нетрудно проверить непосредственно, что $R$ есть решение задачи:

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x} + b\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial y} + a\Big)R = 0, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} R(x,\tau,t,\tau) &= \exp \int_x^t b(\xi,\tau)d\xi, \\ R(t,y,t,\tau) &= \exp \int_y^\tau a(t,\eta)d\eta. \end{aligned} \tag{7}$$

Уравнение (6) решается в квадратурах ([1], с.177). Проделав это с учетом (7), найдем

$$R(x,y,t,\tau) = \exp\Big[\int_y^\tau a(x,\eta)d\eta + \int_x^t b(\xi,\tau)d\xi\Big]. \tag{8}$$

Пусть теперь $h \not\equiv 0$. Рассматривая уравнение (4) как неоднородное, формально запишем его частное решение в виде ([2], с.65)

$$\int_t^x \int_\tau^y R(\xi,\eta,x,y)h(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta\, d\xi.$$

Прибавляя к этой функции общее представление решений для $h \equiv 0$ через $v(x,\tau)$, $v(t,y)$ ([2], с.66), придем к соотношению

$$v(x,y) = R(x,\tau,x,y)v(x,\tau) + R(t,y,x,y)v(t,y) - R(t,\tau,x,y)v(t,\tau) +$$
$$+ \int_t^x \int_\tau^y R(\xi,\eta,x,y)h(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta\, d\xi - \int_t^x \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi,\tau,x,y) + b(\xi,\tau)R(\xi,\tau,x,y)\right] v(\xi,\tau)d\xi -$$
$$- \int_\tau^y \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} R(t,\eta,x,y) + a(t,\eta)R(t,\eta,x,y)\right] v(t,\eta)d\eta.$$

Подставляя сюда значения (3), (7), получим

$$v(x,y) = \int_t^x \int_\tau^y R(\xi,\eta,x,y)h(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta\, d\xi + R(t,\tau,x,y). \tag{9}$$

Аналогично можно рассуждать, отправляясь от записи уравнения (2) в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - b\right)\left(\frac{\partial}{\partial y} - a\right)v = kv, \tag{10}$$
$$k = b_y + ab - c. \tag{11}$$

Тогда функция Римана $R_1$ для (10) при $k \equiv 0$ дается формулой

$$R_1(x,y,t,\tau) = \exp\left[\int_y^\tau a(t,\eta)d\eta + \int_x^t b(\xi,y)d\xi\right], \tag{12}$$

а вместо (9) получается равенство

$$v(x,y) = \int_t^x \int_\tau^y R_1(\xi,\eta,x,y)k(\xi,\eta)v(\xi,\eta)d\eta\, d\xi + R_1(t,\tau,x,y). \tag{13}$$

Соотношения (9) и (13) представляют собой новые варианты интегральных уравнений функции Римана, имеющие перед стандартным уравнением ([2], с.63) то преимущество, что в них отсутствуют однократные интегралы, содержащие искомую функцию. Интересно также, что в случаях, когда хотя бы один из инвариантов (5), (11) тождественно равен нулю, эти уравнения автоматически дают явный вид функции Римана (8) или (12).

**2.** Полученные уравнения можно использовать для выявления новых случаев построения функций Римана в явном виде.

Предположим, что

$$a = a_1(y) + \lambda x, \quad b = b_1(x) + \lambda y, \quad \lambda = \text{const}. \tag{14}$$

Тогда $h \equiv k$, и

$$R_1 \equiv R = \frac{r(x)s(y)\exp(\lambda xy)}{r(t)s(\tau)\exp(\lambda t\tau)},$$
$$r(x) = \exp\int_x^0 b_1(\xi)d\xi, \quad s(y) = \exp\int_y^0 a_1(\eta)d\eta. \tag{15}$$

Поэтому уравнения (9) и (13) совпадают и после введения новой искомой функции

$$w = r(x)s(y)v(x,y)\exp(-\lambda xy) \tag{16}$$

записываются в форме

$$w(x,y) = r(t)s(\tau)\exp(-\lambda t\tau) + \int_t^x \int_\tau^y h(\xi,\eta)w(\xi,\eta)d\eta\, d\xi. \tag{17}$$

Заметим, что (16) есть частный случай мультипликативного преобразования из ([1], с.176). Очевидно, (17) эквивалентно задаче для дифференциального уравнения

$$w_{xy} - hw = 0 \tag{18}$$

с условиями Гурса

$$w(x, \tau) = w(t, y) = r(t)s(\tau)\exp(-\lambda t\tau). \tag{19}$$

Предположим теперь, что инвариант $h$ представляет собой произведение двух функций, каждая из которых зависит лишь от одного переменного

$$h = -\varphi(x)\psi(y). \tag{20}$$

Для этого случая уравнения (18) функция Римана известна [3]. Это есть функция Бесселя

$$\Omega = J_0\left\{2\left[\int_t^x \varphi(\xi)d\xi \int_\tau^y \psi(\eta)d\eta\right]^{1/2}\right\}.$$

Снова пользуясь формулой решения задачи Гурса ([2], с.66), вычисляем $w(x, y)$ в виде

$$w = r(t)s(\tau)\exp(-\lambda t\tau)\Omega(x, y, t, \tau).$$

Отсюда по формулам (15)–(16) находим функцию Римана исходного уравнения (1)

$$v = \Omega(x, y, t, \tau)\exp\left[\int_t^x b_1(\xi)d\xi + \int_\tau^y a_1(\eta)d\eta + \lambda(xy - t\tau)\right]. \tag{21}$$

Итак, доказано утверждение: *при условиях* (14) *и* $c - ab - \lambda = \varphi(x)\psi(y)$ *функция Римана уравнения* (1) *дается формулой* (21).

**3.** Обратимся теперь к уравнению

$$\mathcal{L}(u) \equiv u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0. \tag{22}$$

Функция Римана есть в этом случае [4] решение уравнения

$$v_{xyz} - (av)_{xy} - (bv)_{yz} - (cv)_{xz} + (dv)_x + (ev)_y + (fv)_z - gv = 0, \tag{23}$$

удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} v(t, \tau, z, t, \tau, \theta) &= \exp\int_\theta^z a(t, \tau, \zeta)d\zeta, \\ v(t, y, \theta, t, \tau, \theta) &= \exp\int_\tau^y c(t, \eta, \theta)d\eta, \\ v(x, \tau, \theta, t, \tau, \theta) &= \exp\int_t^x b(\xi, \tau, \theta)d\xi. \end{aligned} \tag{24}$$

При выделении случаев явного построения $v$ существенную роль играют конструкции

$$\begin{aligned} &h_1 = a_x + ab - e, \quad h_2 = a_y + ac - d, \quad h_3 = b_y + bc - f, \\ &h_4 = b_z + ab - e, \quad h_5 = c_x + bc - f, \quad h_6 = c_z + ac - d, \\ &h_7 = d_x + bd - g, \quad h_8 = e_y + ce - g, \quad h_9 = f_z + af - g. \end{aligned}$$

Рассуждения при этом основаны на условиях представимости оператора, действующего в левой части уравнения (22), в форме композиции операторов первого и второго порядка. Например, непосредственной проверкой можно убедиться, что при условиях

$$h_4 \equiv h_6 \equiv h_9 \equiv 0 \tag{25}$$

эта композиция состоит из $\mathcal{L}_1 \equiv \partial/\partial z + a$ и $\mathcal{L}_2 \equiv \partial^2/\partial x\,\partial y + c\partial/\partial x + b\partial/\partial y + f$, причем $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 \equiv \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1$. К уравнению с оператором $\mathcal{L}_2$ можно применить полученный выше результат, считая $z$ параметром, а уравнение, порождаемое оператором $\mathcal{L}_1$, интегрируется элементарно. Условия (14), (20) принимают здесь вид

$$\begin{gathered} c = c_1(y,z) + \alpha(z)x, \quad b = b_1(x,z) + \alpha(z)y, \\ f - bc - \alpha = \varphi(x,z)\psi(y,z), \end{gathered} \tag{26}$$

а функция Римана дается формулой

$$v(x,y,z,t,\tau,\theta) = J_0(2\sqrt{\omega}) \exp \sigma(x,y,z,t,\tau,\theta), \tag{27}$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \int_t^x \varphi(\xi,\theta)d\xi \int_\tau^y \psi(\eta,\theta)d\eta, \\ \sigma &= \int_t^x b_1(\xi,\theta)d\xi + \int_\tau^y c_1(\eta,\theta)d\eta + \int_\theta^x a(x,y,\zeta)d\zeta + (xy - t\tau)\alpha(z). \end{aligned} \tag{28}$$

Аналогично можно рассуждать, взяв $\mathcal{L}_1$ равным $\partial/\partial x + b$ и $\partial/\partial y + c$. В первом случае условия типа (25)–(26) превращаются в

$$\begin{aligned} &a = a_1(x,z) + \beta(x)y, \quad c = c_1(x,y) + \beta(x)z, \\ &d - ac - \beta = \varphi(x,y)\psi(x,z), \quad h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0, \end{aligned} \tag{29}$$

а во втором — в

$$\begin{aligned} &a = a_1(y,z) + \gamma(y)x, \quad b = b_1(x,z) + \gamma(y)z, \\ &e - ab - \gamma = \varphi(x,y)\psi(y,z), \quad h_2 \equiv h_3 \equiv h_8 \equiv 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Функция Римана по-прежнему дается формулой (27), при этом в предположениях (29)

$$\begin{aligned} \omega &= \int_\tau^y \varphi(t,\eta)d\eta \int_\theta^z \psi(t,\zeta)d\zeta, \\ \sigma &= \int_\tau^y c_1(t,\eta)d\eta + \int_\theta^z a_1(t,\zeta)d\zeta + \int_t^x b(\xi,y,z)d\xi + (yz - \tau\theta)\beta(x), \end{aligned} \tag{31}$$

а в условиях (30)

$$\begin{aligned} \omega &= \int_t^x \varphi(\xi,\tau)d\xi \int_\theta^z \psi(\tau,\zeta)d\zeta, \\ \sigma &= \int_t^x b_1(\xi,\tau)d\xi + \int_\theta^z a_1(\tau,\zeta)d\zeta + \int_\tau^y c(x,\eta,z)d\eta + (xz - t\theta)\gamma(y). \end{aligned} \tag{32}$$

Полученные результаты допускают непосредственную проверку: для этого достаточно при указанных условиях подставить (27) в уравнение (23) и условия (24).

Подводя итог, сформулируем утверждение: *при условиях* (25)–(26), (29) *и* (30) *функция Римана уравнения* (22) *имеет вид* (27), *где* $\omega$ *и* $\sigma$ *даются соответственно формулами* (28), (31) и (32).

В заключение отметим, что ряд случаев явного построения функции Римана для уравнения (22) был выделен в статьях [4]–[7].

## Литература


1. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* – М.: Ин. лит., 1957. – 443 с.
2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Чуриков Ф.С., Мащенко И.П. *Построение функции Римана для уравнения* $u_{xy} - \varphi(x)\psi(y)u = 0$ // Научн. тр. Краснодарск. политехн. ин-та. – 1970. – Вып. 30. – С. 19–25.
4. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // В кн.: Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск, 1990. – С. 94–98.
5. Волкодавов В.Ф. *Построение функций Римана некоторых уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применение* // Международн. науч. конф. Дифференц. и интегр. уравнения. Матем. физика и спец. функции. Тез. докл. – Самара, 1992. – С. 52–53.
6. Волкодавов В.Ф., Родионова И.Н. *Основные краевые задачи для одного уравнения третьего порядка в трехмерной области специального вида* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 8. – С. 1459–1461.
7. Волкодавов В.Ф., Дорофеев А.В. *Задача Коши для одного вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 11. – С. 6–8.



*Казанский государственный университет*



*Поступила*
10.03.1995