ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.55

С.Г. МЫСЛИВЕЦ

О МНОГОМЕРНОМ ГРАНИЧНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРЫ

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D класса $\mathcal{C}^2$. Функция f непрерывна на границе этой области ($f \in \mathcal{C}(\partial D)$).

Рассмотрим отображение $\Phi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ и $\Phi(0) = 0$, состоящее из целых функций

$$w_j = \varphi_j(z), \quad j = 1, \dots, n,$$

такое, что существует отображение $\Psi(w) = (\psi_1(w), \dots, \psi_n(w))$, также состоящее из целых функций, со свойством

$$(\Psi \circ \Phi) = (z_1^{p_1}, \dots, z_n^{p_n}),$$

где p_j $(j = 1, \dots, n)$ — некоторые натуральные числа. Таким образом, $\Psi(0) = \Phi(0) = 0$ и $\Psi(z) \neq 0$, $\Phi(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Класс таких отображений достаточно широк. Например, в качестве Φ можно взять биголоморфное отображение, тогда Ψ будет обратным отображением. Более общим случаем служит отображение Φ, являющееся композицией $(z_1^{p_1}, \dots, z_n^{p_n})$ и биголоморфного отображения.

Используя отображение Φ, определим класс комплексных кривых

$$L_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j = z_j + \varphi_j(b_1 t^{k_1}, \dots, b_n t^{k_n}),\ j = 1, \dots, n\},$$

где $t \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр, натуральные числа выбраны так, чтобы

$$p_j k_j = p, \quad j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

а вектор $b = (b_1, \dots, b_n)$ является элементом взвешенного проективного пространства $\mathbb{CP}^{n-1}(k_1, \dots, k_n)$. Напомним, что это пространство получается из $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ отождествлением точек, лежащих на кривых вида

$$\{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j = b_j t^{k_j},\ j = 1, \dots, n,\ t \in \mathbb{C}\}.$$

Если зафиксировать точку $z \in \mathbb{C}^n$, то для любой точки ζ найдется кривая $L_{z,b}$ (при подходящем выборе вектора b), проходящая через ζ. Все кривые $L_{z,b}$ пересекаются в точке z. Если же они пересекаются еще в какой-то другой точке, то нетрудно показать, что j-координаты векторов b для них получаются друг из друга поворотом на угол, кратный $2\pi/p_j$. Поэтому, чтобы однозначно определить вектор b, будем считать, что $0 \leq \arg b_j < 2\pi/p_j$, $j = 1, \dots, n$. В этом случае кривые образуют расслоение множества $\mathbb{C}^n \setminus \{z\}$ при фиксированном z.

Теорема Сарда показывает, что для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}(k_1, \dots, k_n)$ пересечение $\partial D \cap L_{z,b}$ является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых (если оно не пусто).

Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1. *Если функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ и выполнены условия*

$$\int\limits_{\partial D \cap L_{z,b}} f(\zeta)\, d\zeta_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 93–0047.

для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ *и почти всех* $b \in \mathbb{CP}^{n-1}(k_1, \dots, k_n)$, *то* f *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F \in \mathcal{C}(\overline{D})$ *(если в формуле* (2) *пересечение* $\partial D \cap L_{z,b} = \emptyset$, *то интеграл в* (2) *считается равным нулю).*

Теорема 1 является обобщением ряда утверждений. В случае комплексных прямых (отображения Φ и Ψ тождественные) теорема 1 превращается в граничный вариант теоремы Мореры, доказанный И.Глобевником и Е.Л.Стаутом в [1]. Для частного случая почти алгебраических кривых теорема 1 получена в [2].

Доказательство теоремы 1 основано на следующем критерии существования голоморфного продолжения функции f из работы [2]. Введем необходимые понятия.

Запишем ядро Бохнера–Мартинелли

$$U(w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\overline{w}_k}{|w|^{2n}} d\overline{w}[k] \wedge dw,$$

где $dw = dw_1 \wedge \dots \wedge dw_n$, а $d\overline{w}[k]$ получается из $d\overline{w}$ вычеркиванием дифференциала $d\overline{w}_k$. Тогда форма $U(\Psi(\zeta - z))$ при фиксированном z является $\overline{\partial}$-замкнутой дифференциальной формой типа $(n, n-1)$ с вещественно аналитическими коэффициентами при $\zeta \neq z$. Форма $U(\Psi)$ является ядром в формуле многомерного логарифмического вычета для отображения $\Psi(\zeta - z)$ (напр., [3]).

Пусть $J_\Psi = \left\| \frac{\partial \psi_s}{\partial \zeta_k} \right\|_{k,s=1}^{n}$ — матрица Якоби отображения Ψ, $|J_\Psi|$ — ее определитель и

$$H_k(\zeta - z) = \frac{1}{|J_\Psi(\zeta - z)|} \sum_{s=1}^{n} A_s^k(\zeta - z) \psi_s(\zeta - z), \quad k = 1, \dots, n, \tag{3}$$

где A_s^k — алгебраические дополнения к элементам $\frac{\partial \psi_s}{\partial \zeta_k}$ в матрице J_Ψ.

При доказательстве теоремы 1 потребуется утверждение, сформулированное в [2]: *пусть* $\partial D \in \mathcal{C}^2$ *и функция* $f \in \mathcal{C}(\partial D)$. *Если выполнены условия*

$$\int_{\partial D_\zeta} f(\zeta) H_k(\zeta - z) U(\Psi(\zeta - z)) = 0 \ \ \textit{для всех} \ \ z \notin \partial D, \quad k = 1, \dots, n, \tag{4}$$

то функция f *голоморфно продолжается в область* D *до функции* F, *непрерывной вплоть до границы области* D.

Якобиан $|J_\Psi| \not\equiv 0$ и, как отмечено в [2], произведение $H_k(\zeta - z) U(\Psi(\zeta - z))$ не имеет особенностей при $\zeta \neq z$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\Psi^*(t, b) = (\psi_1^*, \dots, \psi_n^*) = (\Psi \circ \Phi)(b_1 t^{k_1}, \dots, b_n t^{k_n}) = (b_1^{p_1} t^p, \dots, b_n^{p_n} t^p)$$

и распишем формулу

$$U^* = U(\Psi^*(t, b)) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \overline{\psi_k^*} \, d\overline{\psi^*}[k]}{|\Psi^*|^{2n}} \wedge d\psi^*$$

в переменных t и b. Имеем

$$|\Psi^*|^2 = |t|^{2p} \sum_{j=1}^{n} |b_j|^{2p_j}$$

и

$$d\psi^* = d\psi_1^* \wedge \dots \wedge d\psi_n^* = d(b_1^{p_1} t^p) \wedge \dots \wedge d(b_n^{p_n} t^p) = t^{p(n-1)} p \, dt \wedge \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} b_k^{p_k} \, db^p[k],$$

где

$$db^p[k] = db_1^{p_1} \wedge \dots \wedge db_{k-1}^{p_{k-1}} \wedge db_{k+1}^{p_{k+1}} \wedge \dots \wedge db_n^{p_n}.$$

Аналогично получим

$$d\psi^*[k] = d(b_1^{p_1}t^p)\wedge\cdots[k]\cdots\wedge d(b_n^{p_n}t^p) =$$

$$= (t^p\,db_1^{p_1} + b_1^{p_1}pt^{p-1}\,dt)\wedge\cdots[k]\cdots\wedge(t^p\,db_n^{p_n} + b_n^{p_n}pt^{p-1}\,dt) = t^{p(n-1)}db^p[k] + \frac{pt^{p(n-1)}}{t}dt\wedge B_k,$$

где

$$B_k = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}b_j^{p_j}\,db^p[j,k] + \sum_{j=k+1}^{n}(-1)^j b_j^{p_j}\,db^p[k,j].$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\psi_k^*\,d\psi^*[k] = t^{pn}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k^{p_k}\,db^p[k] + pt^{pn-1}dt\wedge\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k^{p_k}B_k. \qquad (5)$$

В силу

$$\sum_{j>k}(-1)^{j+k-1}b_k^{p_k}b_j^{p_j}\,db^p[k,j] = \sum_{j<k}(-1)^{j+k-1}b_j^{p_j}b_k^{p_k}\,db^p[j,k]$$

второе слагаемое в (5) равно нулю. Отсюда легко получить, как и в случае алгебраических кривых [4], что

$$U^* = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{\overline{t}^{pn}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{b}_k^{p_k}\,d\overline{b}^p[k]\wedge t^{pn-1}p\,dt\wedge\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k^{p_k}\,db^p[k]}{|t|^{2pn}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^{2p_k}\Big)^n} =$$

$$= \frac{|t|^{2pn}\,dt\wedge\lambda(b)}{t|t|^{2pn}} = \frac{dt}{t}\wedge\lambda(b), \qquad (6)$$

где

$$\lambda(b) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{p\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\overline{b}_k^{p_k}\,d\overline{b}^p[k]\wedge\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}b_k^{p_k}\,db^p[k]}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}|b_k|^{2p_k}\Big)^n}.$$

Поскольку $(\Psi\circ\Phi)(w) = (w_1^{p_1},\ldots,w_n^{p_n})$, то

$$J_\Psi(\Phi)J_\Phi = \begin{pmatrix} p_1w_1^{p_1-1} & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & p_nw_n^{p_n-1}\end{pmatrix} = E_p.$$

Отсюда получим при $w_1\neq 0,\ldots,w_n\neq 0$, что

$$J_\Psi^{-1} = E_p^{-1}J_\Phi = \left\|\frac{A_s^k}{|J_\Psi|}\right\|(\Phi),$$

поэтому $J_\Phi = E_pJ_\Psi^{-1}$.Тогда

$$\frac{A_s^k}{|J_\Psi|}p_s\zeta_s^{p_s-1} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}.$$

Следовательно, полагая в (3) $z=0$, получим

$$H_k(\zeta) = \sum_{s=1}^{n}\frac{A_s^k}{|J_\Psi|}\psi_s = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}\frac{\zeta_s}{p_s}.$$

С другой стороны, ввиду (1) имеем

$$\frac{d\varphi_k}{dt}(b_1t^{k_1},\ldots,b_nt^{k_n}) = \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}b_sk_st^{k_s-1} = \frac{1}{t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}\zeta_sk_s = \frac{p}{t}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}\frac{\zeta_s}{p_s}.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{t}{p}\frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial\varphi_k}{\partial\zeta_s}\frac{\zeta_s}{p_s} = H_k(\zeta) = H_k^*(b,t).$$

Используя формулу (6), получим

$$H_k^* U^* = d\varphi_k \wedge \lambda(b).$$

Это равенство справедливо при любых $\zeta \neq z$, хотя предыдущие выкладки верны лишь при $J_\Psi(\zeta - z) \neq 0$.

Поэтому из (4) по теореме Фубини получим

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta) H_k(\zeta - z) U(\Psi(\zeta - z)) = \int\limits_{\mathbb{CP}^{n-1}(k_1,\ldots,k_n)} \lambda(b) \int\limits_{\partial D \cap L_{z,b}} f^*(t,b)\, d\varphi_k = 0,$$

т.к. $d\varphi_k = d\zeta_k$. $\square$

Доказательство теоремы 1 и условия теоремы из [2] показывают, что можно рассматривать отображения Φ и Ψ, состоящие не из целых функций, а из функций φ_j, определенных в окрестности такого компакта $K \subset \mathbb{C}^n$, что $\Phi^{-1}(K)$ содержит множество $\{z - w : z, w \in \overline{D}\}$, а функции ψ_j определены в окрестности этого множества.

Если вместо условия (2) рассматривать функции f с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых $L_{z,b}$, то получим теоремы о голоморфной продолжимости таких функций из [4]–[6].

Пусть $f \in \mathcal{C}(\partial D)$. Будем говорить, что функция f обладает свойством *одномерного голоморфного продолжения* вдоль кривых $L_{z,b}$, если для каждой точки $z \in \mathbb{C}^n$ и каждого вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}(k_1,\ldots,k_n)$ существует функция $F_{z,b}(t)$ такая, что

1. $F_{z,b} \in \mathcal{C}(\overline{D} \cap L_{z,b})$;
2. $F_{z,b}(t)$ голоморфна по t во внутренних точках множества $\overline{D} \cap L_{z,b}$;
3. $F_{z,b} = f$ на множестве $\partial D \cap L_{z,b}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in \mathcal{C}(\partial D)$ и f обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль кривых $L_{z,b}$, тогда f голоморфно продолжается в D.*

Доказательство прямо следует из теоремы 1.

Литература

1. Globevnik J., Stout E.L. *Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. – 1991. – V. 64. – № 3. – P. 571–615.
2. Kytmanov A.M., Myslivets S.G. *On functions with one-dimensional property of holomorphic contiuation and boundary analogues of the Morera theorem* // J. Natur. Geometry. – 1999. – V. 10. – № 3. – P. 415–430.
3. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1979. – 366 с.
4. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О функциях, представимых интегралом Коши-Фантаппье определенного вида* // Комплексн. анализ и дифференц. уравнения. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1996. – С. 96–112.
5. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О голоморфности функций, представимых формулой логарифмического вычета* // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 2. – С. 351–361.
6. Stout E.L. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. – 1977. – V. 44. – № 1. – P. 105–108.

Красноярский государственный университет

Поступила 30.06.1997