ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.763

Л.В. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ

ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ МОНЖА–АМПЕРА

Промежуточные интегралы — один из путей нахождения точных решений дифференциальных уравнений. В этой работе описываются промежуточные интегралы для уравнений Монжа–Ампера. Выбор класса уравнений является причиной того, что наши результаты получены в рамках геометрии 1-джетов. Приводится критерий существования промежуточных интегралов для уравнений Монжа–Ампера. А именно, существование промежуточных интегралов для уравнения Монжа–Ампера на n-мерном гладком многообразии эквивалентно существованию симплектически точной характеристической 1-формы для линейного дифференциального оператора второго порядка, ассоциированного с той же эффективной n-формой, что и оператор Монжа–Ампера. В 2-мерном случае это условие эквивалентно существованию собственного вектора из пространства симплектически точных 1-форм для оператора, порожденного двумя 2-формами: дифференциалом 1-формы Картана и эффективной формой, ассоциированной с уравнением Монжа–Ампера. Для уравнений Монжа–Ампера, ассоциированных с замкнутыми формами постоянного класса, получено полное описание промежуточных интегралов. А именно, если пфаффиан такого уравнения отличен от константы, то все промежуточные интегралы суть функции этого пфаффиана. Если пфаффиан равен константе, то уравнение Монжа–Ампера либо гиперболическое, либо параболическое. В первом случае уравнение определяет два 3-мерных интегрируемых распределения на многообразии 1-джетов, пересечения которых с распределением Картана неинтегрируемы, и промежуточные интегралы суть первые интегралы любого из этих распределений. Во втором случае уравнение определяет одно 3-мерное интегрируемое распределение на многообразии 1-джетов, пересечение которого с распределением Картана интегрируемо, и промежуточные интегралы являются первыми интегралами этого распределения. Полученные результаты иллюстрируются на примере полного описания промежуточных интегралов задач Минковского и Александрова в классической дифференциальной геометрии.

Отметим, что данная работа содержит полное изложение результатов, анонсированных в статье [1].

1. Семейство лиевских структур на многообразии 1-джетов

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim M = n$ и μ_x — идеал кольца $C^\infty(M)$, связанный с точкой $x \in M : \mu_x = \{f \in C^\infty(M) \mid f(x) = 0\}$. Гладкое векторное расслоение $\pi_k : J^k M \to M$ со слоем $J^k_x M = C^\infty(M)/\mu_x^{k+1} C^\infty(M)$ над точкой $x \in M$ называется расслоением k-джетов. Для любых чисел $k > l \geq 0$ определена естественная проекция $\pi_{k,l} : J^k M \to J^l M$. Образ функции $f \in C^\infty(M)$ в слое $J^k_x M$ обозначается через $j_k(f)_x = [f]^k_x$. Обозначим также через $\mathcal{J}^k(M)$ модуль гладких сечений расслоения $J^k M$ и через $S_{j_k(f)} \subset \mathcal{J}^k(M)$ — сечение $S_{j_k(f)}(m) = j_k(f)_m$, $m \in M$.

Любое гладкое отображение $F : M_1 \to M_2$ порождает гомоморфизм модулей

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^k(F) : \mathcal{J}^k(M_2) &\to \mathcal{J}^k(M_1), \\ [f]^k_{m_2} &\mapsto [F^*(f)]^k_{m_1}, \end{aligned}$$

где $f \in C^\infty(M_2)$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$, $m_2 = F(m_1)$.

Напомним определение естественной контактной структуры на $J^1 M$ [2].

Предложение 1. *Существует единственный элемент $\rho_1 \in \mathcal{J}^1(J^1M)$ такой, что для любого сечения $\theta \in \mathcal{J}^1(M)$ справедливо равенство $\mathcal{J}^1(\theta)(\rho_1) = \theta$.*

Модуль $\mathcal{J}^1(M)$ является прямой суммой модуля 1-форм $\Lambda^1(M)$ и кольца $C^\infty(M)$: $\mathcal{J}^1(M) = \Lambda^1(M) \oplus C^\infty(M)$. Более того, определен оператор Спенсера

$$D : \mathcal{J}^1(M) \to \Lambda^1(M),$$
$$(\omega,\, f) \mapsto df - \omega,$$

где d — оператор де Рама, $\omega \in \Lambda^1(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

Предложение 2. *Многообразие J^1M допускает естественную контактную структуру, определенную универсальной 1-формой Картана $U_1 = D\rho_1$.*

Определение 1. Дифференциальный идеал $\mathcal{C}$ в алгебре $\Lambda^\bullet(J^1M)$, порожденный формой U_1, называется *идеалом Картана.* Распределение $K : x_1 \mapsto \operatorname{Ker} U_{1,x_1}$, $x_1 \in J^1M$, называется *распределением Картана.* Векторное поле X на многообразии J^1M называется *контактным векторным полем*, если производная Ли вдоль поля X сохраняет идеал Картана (или распределение Картана) $L_X(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ (или $L_X(K) \subset K$).

Обозначим через $C^\infty_*(J^1M)$ группу (относительно умножения), порожденную функциями $\alpha \in C^\infty(J^1M)$ такими, что $\alpha \neq 0$ в любой точке $x_1 \in J^1M$. Определим также 1-форму $U_1^\alpha = \frac{1}{\alpha}U_1$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$.

Очевидно, любая форма U_1^α, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, также является образующей идеала Картана $\mathcal{C}$. Выбор образующей в идеале Картана устанавливает соответствие между контактными векторными полями и функциями на многообразии J^1M. А именно, справедливо

Предложение 3. *Пусть $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$. Любое контактное векторное поле X на многообразии J^1M однозначно определяется производящей функцией $f = U_1^\alpha(X)$.*

Для $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$ обозначим через $X_{\langle f|\alpha\rangle}$ контактное векторное поле с производящей функцией f относительно 1-формы U_1^α, а через $L_{\langle f|\alpha\rangle}$ — производную Ли вдоль векторного поля $X_{\langle f|\alpha\rangle}$. Пусть $\alpha, \beta \in C^\infty_*(J^1M)$. Тогда легко видеть, что выполнены следующие соотношения (см. [3]): $X_{\langle f|\alpha\rangle} = X_{\langle \frac{\alpha}{\beta}f|\beta\rangle}$.

Отметим, что любое контактное векторное поле $X_{\langle 1|\alpha\rangle} = X_{\langle \alpha|1\rangle} = X_\alpha$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, определяет разложение пространства $T_{x_1}(J^1M)$ в прямую сумму

$$T_{x_1}(J^1M) = K_{x_1} \oplus \mathbb{R}X_{\langle 1|\alpha\rangle, x_1} \tag{1}$$

в любой точке $x_1 \in J^1M$.

В локальных координатах $q_1, \ldots, q_n, u, p_1, \ldots, p_n$ на многообразии J^1M векторное поле $X_{\langle f|\alpha\rangle}$ имеет вид

$$X_{\langle f|\alpha\rangle} = \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{d^{(\alpha)}}{dq_i} + \frac{d^{(\alpha)}f}{dq_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) + fX_{\langle 1|\alpha\rangle},$$

где $\frac{d^{(\alpha)}}{dq_i} = \alpha\frac{\partial}{\partial q_i} + p_i X_{\langle 1|\alpha\rangle}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Коммутатор векторных полей $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ порождает скобку в кольце $C^\infty(J^1M)$

$$[f_1,\, f_2]_\alpha = U_1^\alpha([X_{\langle f_1|\alpha\rangle},\, X_{\langle f_2|\alpha\rangle}]).$$

Эта скобка определяет структуру алгебры Ли на $C^\infty(J^1M)$ для любой функции $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$. Используя свойства производной Ли, получаем следующее выражение для скобки:

$$[f_1,\, f_2]_\alpha = L_{\langle f_1|\alpha\rangle}(f_2) - [1,\, f_1]_\alpha f_2.$$

Обозначим через $\mathbf{Diff}(J^1M)$ алгебру линейных дифференциальных операторов в кольце $C^\infty(J^1M)$. С парой дифференциальных операторов $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{Diff}(J^1M)$ свяжем кососимметрический бидифференциальный оператор $(\triangle_1, \triangle_2) : C^\infty(J^1M) \bigotimes C^\infty(J^1M) \to C^\infty(J^1M)$ такой, что $\langle(\triangle_1,\triangle_2)\mid(f_1,f_2)\rangle=\det(\triangle_i(f_j))$, где $i,j=1,2$, $f_1,f_2\in C^\infty(J^1M)$. Тогда в локальных координатах на многообразии J^1M скобка допускает следующее выражение:

$$[f_1,f_2]_\alpha=-\sum_{i=1}^{n}\left\langle\left(\frac{\partial}{\partial p_i},\ \frac{d^{(\alpha)}}{dq_i}\right)\middle|(f_1,f_2)\right\rangle+\langle(1,[1,\ ]_\alpha)|(f_1,f_2)\rangle.$$

Рассмотрим отображение $N_\alpha^\beta:C^\infty(J^1M)\to C^\infty(J^1M)$ такое, что $f_\alpha\mapsto f_\beta=\frac{\alpha}{\beta}f_\alpha$. Действие производной Ли вдоль контактного векторного поля на универсальную форму Картана следующим образом выражается через введенную скобку и отображение N_α^β

$$L_{\langle f|\alpha\rangle}U_1^\beta=\left[1,\,N_\alpha^\beta(f)\right]_\beta U_1^\beta.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение (см. [3]).

Предложение 4. *Пусть $\alpha,\beta\in C_*^\infty(J^1M)$, $f_1,f_2\in C^\infty(J^1M)$. Отображение N_α^β согласовано с лиевскими структурами на $C^\infty(J^1M)$*

$$\left[N_\alpha^\beta(f_1),\,N_\alpha^\beta(f_2)\right]_\beta=N_\alpha^\beta([f_1,f_2]_\alpha).$$

2. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-представление на дифференциальных формах над многообразием 1-джетов

Для любой функции $\alpha\in C_*^\infty(J^1M)$ определено векторное расслоение $\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)\subset\Lambda^\bullet(T^*J^1M)$, слой которого в точке $x_1\in J^1M$ порожден внешними формами, аннулирующими вектор $X_{\langle 1|\alpha\rangle,x_1}$.

Разложение (1) задает проекцию $P_\alpha:\Lambda^\bullet(T_{x_1}^*J^1M)\to\Lambda_\alpha^\bullet(K_{x_1}^*)$ такую, что $\omega\mapsto X_{\langle1|\alpha\rangle}\rfloor(U_1^\alpha\wedge\omega)$. Ограничение 2-формы dU_{1,x_1}^α определяет симплектическую структуру на пространстве K_{x_1}. Как обычно, симплектическая структура задает двойственность $\zeta\in K_{x_1}^*\longmapsto\widehat{\zeta}\in K_{x_1}$.

Определим операторы $\top_\alpha:\Lambda_\alpha^s(K^*)\to\Lambda_\alpha^{s+2}(K^*)$ и $\perp_\alpha$: $\Lambda_\alpha^s(K^*)\to\Lambda_\alpha^{s-2}(K^*)$ так, что $\top_\alpha:\omega\mapsto dU_1^\alpha\wedge\omega$ и $\perp_\alpha$: $\omega\mapsto\widehat{dU_1^\alpha}\rfloor\omega$.

Введем отображение $\Pi:\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)\to\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)$ такое, что $\Pi=\sum\limits_{k=0}^{2n}(n-k)\Pi_k$. Здесь $\Pi_r:\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)\to\Lambda_\alpha^r(K^*)$ — проекция на r-однородную компоненту $\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)$.

Прямым вычислением получаем

Предложение 5. *Операторы $\top_\alpha$, $\perp_\alpha$ и Π определяют $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-представление в расслоении $\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)$.*

Обозначим через $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^\bullet(K^*)$ подрасслоение $\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)$, слои которого порождены примитивными элементами $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-представления. Модули гладких сечений расслоений $\Lambda_\alpha^\bullet(K^*)$ и $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^\bullet(K^*)$ обозначим через $\Lambda_\alpha^\bullet(J^1M)$ и $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^\bullet(J^1M)$ соответственно. Используя структуру неприводимого $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-представления [4], приходим к следующему утверждению.

Предложение 6. *Пусть $\alpha\in C_*^\infty(J^1M)$, $k\le n$. k-форма $\omega\in\Lambda_\alpha^k(J^1M)$ принадлежит модулю $\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^k(J^1M)$ тогда и только тогда, когда $T_\alpha^{n-k+1}\omega=0$.*

Форма $\omega\in\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^k(J^1M)$, $k\le n$, называется *эффективной формой.*

Очевидно, с точностью до $\mathcal{C}$ примитивный элемент не зависит от выбора $\alpha\in C_*^\infty(J^1M)$. Как следствие определения получаем

Лемма 1. *Пусть $\alpha,\beta\in C_*^\infty(J^1M)$ и $\omega\in\Lambda_{\varepsilon,\beta}^{n-k}(J^1M)$. Тогда*

$$P_\alpha(\omega)\in\Lambda_{\varepsilon,\alpha}^{n-k}(J^1M).\tag{2}$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$A_{k+1}(\omega) = (dU_1^\alpha)^{k+1} \wedge (X_{\langle 1|\alpha\rangle} \rfloor [U_1^\alpha \wedge \omega]) = 0,$$

если $(dU_1^\beta)^{k+1} \wedge \omega = 0$. Для этого заметим

$$A_{k+1}(\omega) = X_{\langle 1|\alpha\rangle} \rfloor ([dU_1^\alpha]^{k+1} \wedge U_1^\alpha \wedge \omega) - (X_{\langle 1|\alpha\rangle} \rfloor [dU_1^\alpha]^{k+1}) \wedge U_1^\alpha \wedge \omega.$$

Поскольку

$$[dU_1^\alpha]^{k+1} \wedge U_1^\alpha \wedge \omega = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k+2} [dU_1^\beta]^{k+1} \wedge U_1^\beta \wedge \omega = 0, X_{\langle 1|\alpha\rangle} \rfloor dU_1^\alpha = 0,$$

то $A_{k+1}(\omega) = 0$. □

Используя известные теоремы о структуре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$-модулей [4], получаем разложение Ходжа–Лепажа форм $\omega \in \Lambda_\alpha^k(J^1M)$ для любой функции $\alpha \in C_*^\infty(J^1M)$, как и в случае $\alpha = 1$ ([5]; [6]; [7], с. 24; [8], с. 199; [9]). А именно, справедливо

Предложение 7. *Пусть $\alpha \in C_*^\infty(J^1M)$. Любая форма $\omega \in \Lambda_\alpha^k(J^1M)$ допускает единственное разложение Ходжа–Лепажа*

$$\omega = \omega_0^\alpha + \top_\alpha \omega_1^\alpha + \top_\alpha^2 \omega_2^\alpha + \cdots$$

Здесь $\omega_i^\alpha \in \Lambda_{\varepsilon,\alpha}^{k-2i}(J^1M)$.

3. Уравнения Монжа–Ампера, символы и характеристики

Существует взаимно однозначное соответствие между операторами Монжа–Ампера и эффективными формами [9].

Определение 2. Пусть $\omega \in \Lambda_{\varepsilon,\alpha}^n(J^1M)$. *Оператором Монжа–Ампера Δ_ω, ассоциированным с формой ω*, называется оператор $\Delta_\omega : C^\infty(M) \to \Lambda^n(M)$ такой, что $f \mapsto S_{j_1(f)}^* \omega$.

Напомним, что любая точка $x_2 \in J^2M$, $x_2 = [f]_x^2$, $f \in C^\infty(M)$, определяет плоскость $L(x_2) = T_{x_1}[S_{j_1(f)}(M)] \subset T_{x_1}(J^1M)$ в точке $x_1 \in J^1M$, $x_1 = [f]_x^1$.

Поэтому *уравнение Монжа–Ампера, ассоциированное с формой* $\omega \in \Lambda_{\varepsilon,\alpha}^n(J^1M)$, является подмногообразием $E_\omega \subset J^2M$ вида

$$E_\omega = \{x_2 \in J^2M \mid \omega|_{L(x_2)} = 0\}.$$

Рассмотрим символы и характеристики операторов Монжа–Ампера. Поскольку оператор Монжа–Ампера Δ_ω, вообще говоря, нелинеен, то его символ определяется как символ его линеаризации на некоторой функции $h \in C^\infty(M)$.

Линеаризация $l_h(\Delta_\omega)$ оператора Δ_ω на функции $h \in C^\infty(M)$ — это отображение $l_h(\Delta_\omega) : C^\infty(M) \to \Lambda^n M$ такое, что

$$l_h(\Delta_\omega)(g) = \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \Delta_\omega(h + tg).$$

Поэтому символ $\sigma_{x_2}(\omega)$ оператора Монжа–Ампера Δ_ω в точке $x_2 \in J^2(M)$ — это отображение $\sigma_{x_2}(\omega) : S^2T_x^*M \to \Lambda^n T_x^*M$ такое, что $\sigma_{x_2}(\omega)([g_2]) = l_h(\Delta_\omega)(g_2) \mathrm{mod} \mu_x \Lambda^n T_x^* M$, где $g_2 \in \mu_x^2$, $[g_2] = g_2 \,\mathrm{mod}\, \mu_x^3$, $[h]_x^2 = x_2$, $\pi_2(x_2) = x$. Легко проверить, что символ $\sigma_{x_2}(\omega)$ вычисляется следующим образом: $\sigma_{x_2}(\omega)([g_2]) = S_{j_1(h)}^*[L_{\langle g_2|\alpha\rangle}\omega] \mathrm{mod}\, \mu_x \Lambda^n T_x^* M$. Окончательно, символ $\sigma_{x_2}(\omega)$ нелинейного дифференциального оператора второго порядка Δ_ω в точке $x_2 \in J^2(M)$ определяется соотношением

$$\sigma_{x_2}(\omega)(\zeta_1\zeta_2) = \frac{1}{2} S_{j_1(h)}^*[\zeta_1 \wedge [\widehat{\zeta}_2 \rfloor \omega] + \zeta_2 \wedge [\widehat{\zeta}_1 \rfloor \omega]](x), \tag{3}$$

где $\zeta_1, \zeta_2 \in T_x^*M$.

Определение 3. Ковектор $\zeta \in T^*_x M, \zeta \neq 0$, называется *характеристическим* для оператора Δ_ω в точке $x_2 \in J^2 M$, если $\sigma_{x_2}(\omega)(\zeta^2) = 0$. Мы будем называть ковектор $\zeta \in T^*_x M$ характеристическим в точке $x_1 \in J^1 M$, если он характеристичен в любой точке $x_2 \in J^2 M$ такой, что $\pi_{2,1}(x_2) = x_1$, $\pi_1(x_1) = x$.

В частности, для линейных операторов Монжа–Ампера характеристический ковектор в некоторой точке $x_2 \in J^2 M$ является характеристическим в точке $x_1 \in J^1 M$ такой, что $\pi_{2,1}(x_2) = x_1$.

Обозначим через $\mathrm{Char}_{x_1}(\omega) \subset T^*_x M$ множество характеристических ковекторов оператора Монжа–Ампера Δ_ω в точке $x_1 \in J^1 M$. Множества $\mathrm{Char}_{x_1}(\omega)$ определяют семейство $\mathrm{Char}(\omega)$: $x_1 \mapsto \mathrm{Char}_{x_1}(\omega)$ на многообразии $J^1 M$.

4. Промежуточные интегралы

Напомним, что функция $k \in C^\infty(J^1 M)$ называется *промежуточным интегралом* уравнения $E \subset J^k M$, если любое решение уравнения $k = \mathrm{const}$ является в то же время решением уравнения E.

Ниже докажем различные формы критерия существования промежуточного интеграла для уравнения Монжа–Ампера (см. [1]).

По аналогии с [9] определим оператор $d^\alpha_p : \Lambda^s_\alpha(J^1 M) \to \Lambda^{s+1}_\alpha(J^1 M)$ такой, что $\omega \mapsto P_\alpha d\omega$.

Предложение 8. *Пусть $\alpha \in C^\infty_*(J^1 M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1 M)$. Функция $k \in C^\infty(J^1 M)$ является промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера E_ω тогда и только тогда, когда*

$$d^\alpha_p k \wedge \theta - \omega \in \mathcal{C} \tag{4}$$

для некоторой $\theta \in \Lambda^{n-1}_{\varepsilon,\alpha}(J^1 M)$.

Доказательство. Из соотношения (4) получаем, что любое решение уравнения $k = \mathrm{const}$ является решением уравнения E_ω.

Предположим, что форма ω равна нулю на любом n-мерном интегральном многообразии $\mathcal{L}$ распределения Картана таком, что $d^\alpha_p k \mid_{\mathcal{L}} = 0$. Рассмотрим разложение в любой точке $x_1 \in J^1 M$

$$K = X_+ \oplus X_- \oplus K_0,$$

где $X_+, X_- \in K$, $\theta^+ = \widehat{X}_+ = d^\alpha_p k$, $\theta^- = \widehat{X}_-$, $X_- \rfloor \theta^+ = 1$. Тогда $K_0 = \mathrm{Ann}\theta^+ \cap \mathrm{Ann}\theta^- \cap K$ — симплектическое пространство с симплектической формой $dU^{\alpha_0}_1$, связанной с формой dU^α_1 соотношением

$$dU^\alpha_1 = \theta^+ \wedge \theta^- + dU^{\alpha_0}_1.$$

Поэтому операторы $\top_\alpha$ и $\bot_\alpha$ определяют операторы $\top_{\alpha_0}$ и $\bot_{\alpha_0}$ и расслоения $\Lambda^\bullet_{\alpha_0}(K^*_0)$, $\Lambda^\bullet_{\varepsilon,\alpha_0}(K^*_0)$. Как следствие получаем разложение в любой точке $x_1 \in J^1 M$

$$\omega = \theta^+ \wedge \gamma_1 + \theta^- \wedge \gamma_2 + \top_\alpha \gamma_3, \tag{5}$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda^{n-1}_{\varepsilon,\alpha_0}(K^*_{0,x_1})$, $\gamma_3 \in \Lambda^{n-2}_{\varepsilon,\alpha_0}(K^*_{0,x_1})$. По той же причине любая лагранжева n-мерная плоскость L в структуре dU^α_1 может быть представлена в виде $L = X_\theta \oplus L_0$, где X_θ принадлежит линейной оболочке X_+ и X_-, а L_0 является лагранжевой $(n-1)$-мерной плоскостью в структуре $dU^{\alpha_0}_1$.

Легко видеть, что если $L \in \ker\theta^+$, то $L = X_{\theta^+} \oplus L_0$, где $X_{\theta^+} = X_+$ и L_0 — произвольная лагранжева $(n-1)$-мерная плоскость в структуре $dU^{\alpha_0}_1$.

Пусть $\theta^+ \mid_L = 0$. В этом случае в наших предположениях $\omega \mid_L = 0$. Поскольку $X_{\theta^+} \rfloor \theta^- = -1$, $X_{\theta^+} \rfloor \gamma_2 = 0$, то как следствие получаем $\gamma_1 \mid_{L_0} = 0$ для произвольной лагранжевой $(n-1)$-мерной плоскости в структуре $dU^{\alpha_0}_1$. Из теоремы Лепажа (см. следствие теоремы 1.6 из [9]) получаем, что форма γ_2 принадлежит образу оператора $\top_{\alpha_0}$. Поскольку γ_2 — эффективная форма, то $\gamma_2 = 0$. Поэтому разложение (5) имеет вид $\omega = \theta^+ \wedge \gamma_1 + \top_\alpha \gamma_3$, откуда и следует наше утверждение. □

Приведем другую форму предыдущего критерия.

Предложение 9. *Пусть* $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. *Функция* $k \in C^\infty(J^1M)$ *является промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера* E_ω *тогда и только тогда, когда справедливо соотношение*

$$d_p^\alpha k \wedge (X_{\langle k|\alpha\rangle} \rfloor \omega) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Поскольку форма ω эффективна, то $\top_\alpha \omega = 0$. Применяя к последнему равенству оператор $X_{\langle k|\alpha\rangle}\rfloor$, получаем

$$d_p^\alpha k \wedge \omega + \top_\alpha (X_{\langle k|\alpha\rangle} \rfloor \omega) = 0. \tag{7}$$

Пусть функция $k \in C^\infty(J^1M)$ — промежуточный интеграл уравнения Монжа–Ампера E_ω, т. е. существуют формы $\theta \in \Lambda^{n-1}_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$ и $\vartheta \in \Lambda^{n-2}_\alpha(J^1M)$ такие, что $\omega = d_p^\alpha k \wedge \theta + T_\alpha \vartheta$. Поэтому внешнее умножение формы ω на 1-форму $d_p^\alpha k$ дает

$$d_p^\alpha k \wedge \omega = \top_\alpha (d_p^\alpha k \wedge \vartheta). \tag{8}$$

Используя соотношение (7) и мономорфность оператора $\top_\alpha$ на формах $\Lambda^s_\alpha(J^1M)$ при $s < n$, приходим к равенству

$$d_p^\alpha k \wedge \vartheta + X_{<k|\alpha>} \rfloor \omega = 0, \tag{9}$$

простым следствием которого является соотношение (6).

Наоборот, пусть справедливо соотношение (6). Тогда существует форма $\vartheta \in \Lambda^{n-2}_\alpha(J^1M)$ такая, что справедливо соотношение (9). Применяя оператор $\top_\alpha$ к этому равенству и используя (7), получим соотношение $d_p^\alpha k \wedge (\omega - \top_\alpha \vartheta) = 0$, простым следствием которого является (4). $\square$

Сравнив критерий с определением символа и характеристик операторов Монжа–Ампера, дадим другое описание промежуточных интегралов.

Кроме оператора Монжа–Ампера Δ_ω любая форма $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$ определяет линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$\square_\omega : C^\infty(J^1M) \to \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$$

такой, что $f \mapsto P_\alpha L_{\langle f|\alpha\rangle}\omega$. Легко видеть, что символ

$$\sigma[\omega] : S^2\Lambda^1_\alpha(J^1M) \otimes C^\infty(J^1M) \to \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$$

оператора $\square_\omega$ имеет вид $\xi_1\xi_2 f \mapsto \frac{1}{2}[\xi_1 \wedge [\widehat{\xi_2}\rfloor\omega] + \xi_2 \wedge [\widehat{\xi_1}\rfloor\omega]]f$.

Определение 4. Ковектор $\xi \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)_{x_1}$, $\xi \neq 0$, называется характеристическим для оператора $\square_\omega$ в точке $x_1 \in J^1M$, если $\sigma[\omega](\xi^2) = 0$.

Обозначим через $\mathrm{Char}_{x_1}[\omega] \subset \Lambda^1_\alpha(J^1M)_{x_1}$ множество характеристических ковекторов оператора $\square_\omega$ в точке $x_1 \in J^1M$. Множества $\mathrm{Char}_{x_1}[\omega]$ определяют семейство $\mathrm{Char}[\omega] : x_1 \mapsto \mathrm{Char}_{x_1}[\omega]$ на J^1M. Как следствие получаем, что ковектор $\xi \in T^*_xM$, $\xi \neq 0$, характеристичен для оператора $\square_\omega$ в точке $x_1 \in J^1M$ такой, что $\pi_1(x_1) = x$, тогда и только тогда, когда он характеристичен для оператора Δ_ω в той же точке. Другими словами, справедливо включение $\mathrm{Char}(\omega) \subset \mathrm{Char}[\omega]$.

Будем называть 1-форму $\xi \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$ характеристической для дифференциального оператора $\square_\omega$, если ковекторы $\xi_{x_1} \in T^*_{x_1}(J^1M)$ характеристичны во всех точках $x_1 \in J^1M$.

Сравнивая определение 4 и условие (6), получаем следующую переформулировку критерия существования промежуточного интеграла.

Предложение 10. *Пусть* $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. *Функция* $k \in C^\infty(J^1M)$ *является промежуточным интегралом оператора Монжа–Ампера* Δ_ω *тогда и только тогда, когда 1-форма* $d_p^\alpha k$ *характеристична для оператора* $\square_\omega$.

Будем называть 1-форму $\xi \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$ *симплектически точной*, если справедливо равенство $\xi = d^\alpha_p g$ для некоторой функции $g \in C^\infty(J^1M)$.

Таким образом, существование промежуточного интеграла уравнения Монжа–Ампера эквивалентно существованию симплектически точной характеристической 1-формы для оператора $\Box_\omega$.

В качестве примера рассмотрим промежуточные интегралы для уравнений Монжа-Ампера над 2-мерным многообразием M. Пусть $\Omega \in \Lambda^2_\alpha(J^1M)$. Обозначим через Θ_Ω отображение $TM \to T^*M$ такое, что $\mathrm{v} \to \mathrm{v}\rfloor\Omega$.

Легко видеть, что критерий существования промежуточного интеграла уравнения Монжа–Ампера допускает в этом случае следующую переформулировку.

Предложение 11. *Пусть $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. Уравнение Монжа–Ампера E_ω тогда и только тогда допускает промежуточный интеграл, когда существует симплектически точная 1-форма, которая является собственным вектором оператора $\Theta_\omega \circ \Theta^{-1}_{dU^\alpha_1}$.*

Далее в вычислениях будет использоваться пфаффиан эффективной формы ω, ассоциированный с симплектической структурой dU^α_1.

Определение 5. Пусть $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. Функция $\mathrm{Pf}_\alpha(\omega) \in C^\infty(J^1M)$ называется *пфаффианом* эффективной формы ω, если справедливо соотношение $\mathrm{Pf}_\alpha(\omega) dU^\alpha_1 \wedge dU^\alpha_1 = \omega \wedge \omega$.

Прямым следствием определения является соотношение

$$L_{\langle 1|\alpha\rangle}(\mathrm{Pf}_\alpha(\omega)) = 0. \tag{10}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем опускать индекс α. Напомним, что форма $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$ называется

1. эллиптической, если $\mathrm{Pf}\omega > 0$,
2. гиперболической, если $\mathrm{Pf}\omega < 0$,
3. параболической, если $\mathrm{Pf}\omega = 0$.

Предложение 12. *Пусть $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. Если уравнение Монжа–Ампера E_ω допускает промежуточный интеграл, то форма ω не является эллиптической, т. е.* $\mathrm{Pf}\omega \leq 0$.

Доказательство. В нашем случае соотношение (4) имеет вид

$$\omega - d^\alpha_p k \wedge \theta = t dU^\alpha_1, \tag{11}$$

где $\theta \in \Lambda^1_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$, $t \in \mathbb{R}^1$. Используя эффективность формы ω, получаем необходимое условие существования промежуточного интеграла $\mathrm{Pf}\omega + t^2 = 0$. Поэтому $\mathrm{Pf}\omega \leq 0$. $\square$

Замечание 1. Неголономным промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера E_ω называется форма $\xi \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$ такая, что $\xi \wedge \theta - \omega \in \mathcal{C}$ для некоторой формы $\theta \in \Lambda^{n-1}_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$. Условия существования неголономного промежуточного интеграла определяются предложениями 9, 10, 11, 12 с естественной заменой симплектически точной формы $d^\alpha_p k \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$ на произвольную форму $\xi \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$.

Будем называть промежуточный интеграл $k \in C^\infty(J^1M)$ *положительным* (*отрицательным*), если функция t в формуле (11) положительна (отрицательна).

Замечание 2. Предположим, что существуют положительная (отрицательная) функция $\gamma \in C^\infty(J^1M)$ и формы $\varpi_1, \varpi_2 \in \Lambda^1_\alpha(J^1M)$ такие, что $\omega - \gamma dU^\alpha_1 = \varpi_1 \wedge \varpi_2$. Тогда функция $f \in C^\infty(J^1M)$ — положительный (отрицательный) промежуточный интеграл уравнения Монжа–Ампера E_ω, если выполнено условие $d^\alpha_p f \wedge \varpi_1 \wedge \varpi_2 = 0$.

Ниже используем обозначение

$$C^\infty_\alpha(J^1M) = \{f \in C^\infty(J^1M) \mid L_{\langle 1|\alpha\rangle}(f) = 0\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$, $d\omega = 0$, $\mathrm{cl}\omega = \mathrm{const}$. *Если форма* ω *гиперболическая, то все промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера* E_ω *принадлежат* $C^\infty_{\alpha t}(J^1M)$.

Доказательство. Пусть $k \in C^\infty(J^1M)$ — промежуточный интеграл уравнения Монжа–Ампера E_ω. Используя соотношение (10), получаем $d^\alpha_p t = dt$. Применяя оператор d^α_p к равенству (11), приходим к соотношению $-dt\wedge dU^\alpha_1 = -L_{\langle 1|\alpha\rangle}(k)\theta\wedge dU^\alpha_1 - d^\alpha_p k\wedge d^\alpha_p\theta$. Умножая его на $d^\alpha_p k$ и используя еще раз (11), приходим к равенству $0 = dU^\alpha_1(\widehat{d^\alpha_p k}, \widehat{dt}\,) + tX_{\langle 1|\alpha\rangle}(k) = X_{\langle t|\alpha\rangle}(k) = X_{\langle 1|\alpha t\rangle}(k)$, т. е. все промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера E_ω принадлежат $C^\infty_{\alpha t}(J^1M)$. $\square$

Воспользовавшись результатом предыдущей леммы и применяя оператор $X_{\langle t|\alpha\rangle}\rfloor$ к соотношению (6), получим $dk\omega(\widehat{dt}\,, \widehat{dk}) = 0$. Поскольку форма ω гиперболическая, т. е. невырожденная, то $dt \wedge dk = 0$. Поэтому существуют только две возможности: либо $dk = \lambda dt$ для некоторой функции $\lambda \in C^\infty_{\alpha t}(J^1M)$, т. е. t — промежуточный интеграл, либо $dt = 0$.

Суммируя, получим

Предложение 13. *Пусть* $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$, $d\omega = 0$, $\mathrm{cl}\omega = \mathrm{const}$, $\mathrm{Pf}\omega \neq \mathrm{const}$. *Тогда существуют только две возможности.*

1. $\mathrm{Pf}\omega$ *является промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера* E_ω. *В этом случае все промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера* E_ω *— функции* $\mathrm{Pf}\omega$.
2. $\mathrm{Pf}\omega$ *не является промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера* E_ω. *В этом случае уравнение Монжа–Ампера* E_ω *не имеет промежуточных интегралов.*

Опишем промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера E_ω при условии, что $\mathrm{Pf}\omega = \mathrm{const}$.

Предложение 14. *Пусть* $n = 2$, $\alpha \in C^\infty_*(J^1M)$, $\omega \in \Lambda^n_{\varepsilon,\alpha}(J^1M)$, $d\omega = 0$, $\mathrm{cl}\omega = \mathrm{const}$. *Если форма* ω *гиперболическая и* $\mathrm{Pf}\omega = \mathrm{const}$, *то все положительные (соответственно отрицательные) промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера* E_ω *принадлежат* $C^\infty_\alpha(J^1M)$. *Более того, эти интегралы суть первые интегралы 3-мерных интегрируемых распределений* $T(J^1M) \supset \Phi_\pm = \Psi_\pm \oplus \mathbb{R}X_{\langle 1|\alpha\rangle}$, *где* $\Psi_\pm$ *— 2-мерные неинтегрируемые распределения из* K *такие, что* $[\Psi_\pm, \Psi_\pm] \not\subset K$. *Если форма* ω *параболическая, то все промежуточные интегралы уравнения Монжа–Ампера* E_ω *суть первые интегралы 3-мерного интегрируемого распределения* $T(J^1M) \supset \Phi = \Psi \oplus \mathbb{R}X_{\langle 1|\alpha\rangle}$ *такого, что* Ψ *— двумерное интегрируемое распределение из* K.

Доказательство. Рассмотрим 2-форму $\omega' = \omega + t \cdot dU^\alpha_1$, где $t = \sqrt{|\mathrm{Pf}\omega|}$. Поскольку $\mathrm{cl}\omega = \mathrm{const}$, $\mathrm{cl}dU^\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\mathrm{Pf}\omega = \mathrm{const}$, то $\mathrm{cl}\omega' = \mathrm{const}$. Более того, поскольку $\mathrm{Pf}\omega \leq 0$, то форма ω' разложима (см. предложение 12), $\mathrm{cl}\omega' = 2$ и $\omega' = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$. В силу равенства $d\omega' = 0$ и теоремы Дарбу форма ω' имеет вид $dg_1 \wedge dg_2$, где $g_1, g_2 \in C^\infty_\alpha(J^1M)$.

Из замечания 2 следует, что функция $f \in C^\infty(J^1M)$ является положительным промежуточным интегралом уравнения Монжа–Ампера E_ω тогда и только тогда, когда выполнено соотношение

$$d^\alpha_p f \wedge dg_1 \wedge dg_2 = 0. \tag{12}$$

Поскольку $\{dg_1, dg_2\}$ — интегрируемая пфаффова система, то распределение $\Phi_+ = \mathrm{Ann}dg_1 \cap \mathrm{Ann}dg_2 \subset T(J^1M)$ интегрируемо. Более того, поскольку $g_1, g_2 \in C^\infty_\alpha(J^1M)$, то $\Phi_+ = \Psi_+ \oplus \mathbb{R}X_{\langle 1|\alpha\rangle}$, где $\Psi \subset K$ — 2-мерное распределение.

Если Ψ_+ интегрируемо, то в силу (12) f — первый интеграл Ψ_+. Легко видеть, что Ψ_+ интегрируемо тогда и только тогда, когда $U^\alpha_1([X,Y]) = 0$ для всех $X, Y \in \Psi_+$, т. е. Ψ_+ — лагранжево распределение. Распределение Ψ_+ лагранжево тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}\Psi_+ = \Psi_+ \rfloor dU_1^\alpha = \{dg_1, dg_2\}$ лагранжево в структуре, определенной бивектором $\widehat{dU}_1^{\alpha}$, т. е. выполнено равенство

$$\perp_\alpha(dg_1 \wedge dg_2) = 0. \tag{13}$$

Поскольку $dg_1 \wedge dg_2 = \omega + t \cdot dU_1^\alpha$ и ω — эффективная форма, то равенство (13) можно представить в виде $t = \sqrt{|\mathrm{Pf}\omega|} = 0$. Другими словами, форма ω параболическая и $\Psi_+ = \Psi_-$.

Если распределения $\Psi_\pm$ неинтегрируемы, то интегрируемы распределения $\Phi_\pm$. В этом случае форма ω гиперболическая, и уравнение Монжа–Ампера E_ω имеет два семейства промежуточных интегралов из $C_\alpha^\infty(J^1M)$. Более того, эти интегралы суть первые интегралы 3-мерных интегрируемых распределений $\Phi_\pm$ на J^1M. □

5. Пример: задачи Минковского и Александрова

Задача Минковского состоит в восстановлении поверхности по данной функции кривизны (в нашем случае, гауссовой кривизны), а задача Александрова — в восстановлении поверхности по данной площади сферического отображения как функции проекции точек поверхности на некоторую плоскость ([10], [11]).

Реализациям этих поверхностей в пространстве $J^0\mathbb{R}^2 = (q_1, q_2, u)$ отвечают решения уравнений Монжа–Ампера E_M и E_A. Эти уравнения ассоциированы с дифференциальными 2-формами

$$\omega_M = dp_1 \wedge dp_2 - \varphi_M(p_1, p_2)dq_1 \wedge dq_2,$$
$$\omega_A = (1 + p_1^2 + p_2^2)^{-\frac{3}{2}} dp_1 \wedge dp_2 - \varphi_A(q_1, q_2)dq_1 \wedge dq_2$$

на пространстве $J^1\mathbb{R}^2 = (q_1, q_2, u, p_1, p_2)$, где $\varphi_M, \varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Объединяя задачи Минковского и Александрова, рассмотрим уравнение Монжа–Ампера, ассоциированное с формой $\omega = v dp_1 \wedge dp_2 - w dq_1 \wedge dq_2$, где $v = 1$, $w = \varphi_M$ для E_M и $v = (1 + p_1^2 + p_2^2)^{-\frac{3}{2}}$, $w = \varphi_A$ для E_A. Заметим, что $\mathrm{Pf}(\omega) = 2wv$.

Найдем промежуточные интегралы задач Минковского и Александрова. Соотношение (6) эквивалентно двум системам дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dk}{dq_1} \pm B\frac{\partial k}{\partial p_2} = 0, \\ \frac{dk}{dq_2} \mp B\frac{\partial k}{\partial p_1} = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где $B^2 = -\frac{w}{v}$. Поэтому задача допускает промежуточный интеграл, если $\mathrm{Pf}\omega = vw \leq 0$ (см. предложение 12). Условия интегрируемости систем (14) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dq_1} \pm B\frac{\partial B}{\partial p_2} = 0, \\ \frac{dB}{dq_2} \mp B\frac{\partial B}{\partial p_1} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Решая системы (14) и (15), получаем следующие результаты для задач Минковского и Александрова.

1. Для задачи Александрова условие интегрируемости (15) имеет вид $\varphi_A = 0$ (т. е. уравнение Александрова допускает промежуточный интеграл, если является уравнением развертывающихся поверхностей). В этом случае системы (14) и интегрируемое распределение $\Psi \subset K$ суть
$$\frac{dk}{dq_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Psi = \left\{\frac{d}{dq_1}, \frac{d}{dq_2}\right\}$$
(см. предложение 14), а промежуточные интегралы суть $k = g(p_1, p_2)$, где $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

2. Для задачи Минковского условие интегрируемости (15) имеет вид $\varphi_M = \text{const} \leq 0$. Если $\varphi_M = 0$, то получаем предыдущий результат. Предположим, что $\varphi_M = \text{const} < 0$. Тогда $B = \text{const}$, и из систем (14) получаем, что промежуточные интегралы суть первые интегралы двух интегрируемых распределений: $\Phi_\pm \subset T(J^1M)$, заданных генераторами

$$X_\pm = \frac{d}{dq_1} \pm B\frac{\partial}{\partial p_2}, \quad Y_\pm = \frac{d}{dq_2} \mp B\frac{\partial}{\partial p_1}, \quad H_\pm = \pm B\frac{\partial}{\partial u}$$

и общей таблицей умножения

$$[X_\pm, Y_\pm] = 2H_\pm, \quad [X_\pm, H_\pm] = [Y_\pm, H_\pm] = 0$$

(см. предложение 14). Слой этих распределений изоморфен максимальной нильпотентной подалгебре алгебры $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$. Поэтому все промежуточные интегралы задачи Минковского в этом случае имеют вид $k = g(p_1 \pm Bq_2, p_2 \mp Bq_1)$, где $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Литература

1. Зильберглейт Л.В. *G-модельные решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1981. – Т. 36. – Вып. 1. – С. 207–208.
2. Лычагин В.В. *Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка* // УМН. – 1975. – Т. 30. – Вып. 1. – С. 101–171.
3. Zilbergleit L.V. *Second order differential equation associated with the contact geometry: symmetries, conservation laws and shock waves* // Acta Appl. Math. – 1996. – V. 45. – №. 1. – P. 51–70.
4. Serre J.-P. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* – New York-Amsterdam: Benjamin, 1966. – 80 p.
5. Lepage Th.N. *Sur certaines congruences de formes alternées* // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. – 1946. – № 15. – P. 21–31.
6. Chern S.S. *On a generalization of Kähler geometry. Algebraic Geometry and Topology* // A Symposium in Honor of S. Lefschetz. – Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1957. – P. 103–121.
7. Weil A. *Introduction à l'étude des variétés kahlerieness.* – Paris: Hermann, 1958. – 175 p.
8. Wells R.O. *Differential analysis on complex manifolds.* – New York: Prentice-Hall, 1973. – 252 p.
9. Лычагин В.В. *Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка* // УМН. – 1979. – Т. 34. – Вып. 1. – С. 137–165.
10. Minkowski H. *Volumen und Oberfläche* // Math. Ann. – 1903. – T. 57. – S. 447–495.
11. Александров А.Д. *Выпуклые многогранники.* – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 428 с.

Московский институт
коммунального хозяйства
и строительства

Поступила
03.06.1997