И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.17

А.М. ГУРИН

О ЗАМКНУТЫХ И НЕОГРАНИЧЕННЫХ МНОГОГРАННИКАХ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ ГРАНЯМИ

Введение

Одно из направлений наглядной геометрии — построение многогранников с теми или иными метрическими свойствами — берет свое начало от Платона и Архимеда. Необходимое условие в определении многогранников Платона и Архимеда состоит в требовании правильности их граней. Потребовалось почти две тысячи лет, чтобы были открыты все выпуклые многогранники, гранями которых являются правильные многоугольники [1], [2]. В предлагаемой статье требование правильности граней заменено на более общее условие — требование равноугольности граней.

1. Замкнутые многогранники с равноугольными гранями

Строение замкнутых выпуклых многогранников с правильными гранями в трехмерном евклидовом пространстве было изучено в [1], [2], где был приведен полный перечень искомых многогранников. Расширение этого класса за счет допущения граней, разбитых на правильные "условными" ребрами (без введения новых вершин), было сделано Б.А. Ивановым [3]. Б.А. Иванов и Ю.А. Пряхин [4] перечислили так называемые "простые" многогранники с условными ребрами.

Ю.А. Пряхин предложил дальнейшее обобщение и показал [5], что многогранники с равноугольными гранями, а также с "паркетными" гранями (разбитыми условными ребрами на равноугольные) могут быть изучены подобно многогранникам с правильными гранями, т. к. с точностью до комбинаторной эквивалентности их конечное число (кроме четырех просто устроенных бесконечных серий).

Теорема 1 ([6]). *С точностью до комбинаторной эквивалентности каждому замкнутому выпуклому многограннику с равноугольными гранями соответствует один и только один замкнутый выпуклый многогранник с правильными гранями, а число различных многогранников в обоих множествах совпадает.*

Ее справедливость вытекает из двух фактов. Во-первых, при построении сетей ребер выпуклых многогранников с правильными гранями [2] равенство ребер всех граней использовалось лишь как условие, обеспечивающее требование подклейки граней друг к другу по целым ребрам. Это условие выполняется при построении многогранников с равноугольными гранями. Во-вторых, при проверке сетей ребер на метрическую реализуемость их в виде выпуклых многогранников с правильными гранями использовались лишь величины плоских углов граней и двугранные углы между гранями. Этого также достаточно для проверки существования многогранника с равноугольными гранями.

Очевидно, что теорема верна и для многогранников с условными ребрами.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного Научного Фонда Сороса (грант № U22000).

Теорема 2. *В трехмерном евклидовом пространстве все множество комбинаторно различных замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными гранями состоит из ста десяти многогранников и двух бесконечных серий — призм и антипризм.*

Справедливость теоремы 2 следует из основного результата, приведенного в [1], [2], и теоремы 1.

Сравним два двойственные по определению класса многогранников — многогранники с равноугольными вершинами [7] и многогранники с равноугольными гранями. Они имеют общую часть, состоящую из пяти правильных многогранников и пяти многогранников с правильными гранями, помеченных номерами 12, 13, 17, 51, 84 в табл. 3 [1], [2]. Они имеют комбинаторно двойственную часть, состоящую из двух бесконечных серий многогранников и еще сорока иных многогранников. В число сорока многогранников входят все тридцать два правильновершинных [8] и восемь других многогранников [9]. Остальные многогранники двух классов независимы.

2. Неограниченные (бесконечные) многогранники с равноугольными гранями

Обратимся к собственно многогранникам, а не к заполнению многоугольниками плоскости. Таких многогранников с правильными гранями (даже при допущении условных ребер) не существует (см. [2]). Строение бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями, некоторые из которых бесконечны, исследовалось в [10], [11]. Было установлено строение этих многогранников в окрестности вершин и показано, что существует с точностью до комбинаторной эквивалентности лишь конечное число различных бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями, кроме трех бесконечных серий многогранников, строение которых очевидно.

Будем называть n-мерный выпуклый многогранник правильногранным, если его двумерные грани являются правильными многоугольниками. Многогранники с правильными гранями для размерности евклидова пространства больше трех не изучены. Известно только, что для каждой размерности указаны правильные многогранники и существуют полуправильные многогранники, отличные от правильных [12].

Заметим, что для четырехмерного пространства полный перечень полуправильных многогранников был трижды переоткрыт [13]–[15]. Тот же список многогранников был получен и автором при помощи построения двойственных им многогранников, трехмерными гранями которых являются многогранники с правильными вершинами [8].

Будем называть n-мерный выпуклый многогранник $M(n)$ многогранником с равноугольными гранями, если его двумерные грани равноугольны. В частности, $M(n)$ может быть бесконечным многогранником.

Пусть $M(n,k)$ означает множество бесконечных многогранников $M(n)$, каждый из которых имеет одну и только одну ограниченную k-грань — вершинную фигуру многогранника $M(n,k)$.

Напомним [10], [11], что каждый бесконечный многогранник $M(n)$ принадлежит целой серии многогранников, у которых вершинная фигура неизменна, но число бесконечных ребер и граней различно. Не уменьшая общности, будем рассматривать лишь один представитель из каждой серии многогранников. В [10] такие представители называются исходными многогранниками, а в [11] — неприводимыми. Итак, $M(n,k)$ — исходные многогранники.

Теорема 3. *С точностью до комбинаторной эквивалентности множество полуправильных бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями в n-мерном евклидовом пространстве состоит из многогранников $M(n,k)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, где многогранники $M(n,k)$ взаимно однозначно соответствуют полуправильным многогранникам в k-мерном евклидовом пространстве.*

Доказательство. Бесконечная гипергрань в n-мерном пространстве, она же — бесконечный многогранник $M(n-1, n-2)$, строится следующим образом: ограниченная $(n-2)$-грань располагается в $(n-2)$-мерном пространстве, а ее элементы продолжаются в ортогональном к $(n-2)$-мерному пространству направлении. Выпуклость ограниченной гиперграни и подклеенных таким образом полученных бесконечных гиперграней обеспечивает выпуклость всему многограннику $M(n, n-1)$.

В трехмерном пространстве бесконечные многогранники $M(3, 2)$ имеют одну ограниченную грань — правильный многоугольник, к его ребрам подклеены бесконечные грани, составляющие, например, прямой угол с ограниченной гранью. Всего их неограниченная серия по числу сторон ограниченной грани. Следовательно, какая бы ни была ограниченная гипергрань в четырехмерном пространстве, к любой ее двумерной грани можно подклеить соответствующий бесконечный многогранник $M(3, 2)$. И каждый трехмерный полуправильный многогранник даст один и только один бесконечный многогранник $M(4, 3)$. Таким образом, методом математической индукции убедимся в справедливости утверждения теоремы для случая $k = n - 1$.

При $k = 0$ или $k = 1$ вершинная фигура многогранника $M(n, k)$ вырождается в точку и соответственно ребро. Следовательно, для каждой размерности пространства существует один и только один многогранник $M(n, 0)$ и $M(n, 1)$.

Пусть $k = 2$. Устройство многогранников $M(3, 2)$ уже описано. Многогранник $M(4, 2)$ состоит из одной двумерной грани, к которой подклеены два многогранника $M(3, 2)$ следующим образом: ограниченная грань подклеивается по ограниченной, а бесконечные грани подклеиваются друг к другу, если имеют общее ребро. Многогранники $M(4, 2)$ составляют бесконечную серию многогранников аналогично $M(3, 2)$.

Здесь и дальше исключается случай, когда ограниченные грани могут составить грань большей размерности, т. к. такой многогранник будет учтен в своем разделе. Многогранник $M(n, 2)$ устроен так, что к его одной ограниченной грани подклеены $n - 2$ бесконечных $M(3, 2)$-многогранников. Для каждого n многогранники $M(n, 2)$ образуют бесконечную серию.

Пусть $k = 3$. Многогранники $M(4, 3)$ уже описаны. Многогранник $M(5, 3)$ состоит из одной трехмерной грани, к которой подклеены два многогранника $M(4, 3)$ следующим образом: ограниченная грань подклеивается по ограниченной, а бесконечные гиперграни подклеиваются друг к другу, если имеют общую двумерную грань. Многогранник $M(n, 3)$ устроен так, что к его одной трехмерной грани подклеены $n - 3$ бесконечных $M(4, 3)$-многогранников.

Для каждого n число бесконечных многогранников взаимно однозначно соответствует числу полуправильных многогранников в трехмерном пространстве.

Многогранники $M(n, k)$, $k = 4, \ldots, n-2$, устроены аналогично описанным, а их число взаимно однозначно соответствует числу полуправильных многогранников в k-мерном пространстве. $\square$

Литература

1. Johnson N.W. *Convex polyhedra with regular faces* // Canad. J. Math. – 1966. – V. 18. – № 1. – P.169–200.
2. Залгаллер В.А. *Выпуклые многогранники с правильными гранями* // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1966. – Т. 2. – С. 1–220.
3. Иванов Б.А. *Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников* // Укр. геом. сб. – 1971, вып. 10. – С. 20–34.
4. Пряхин Ю.А. *О выпуклых многогранниках с правильными гранями* // Укр. геом. сб. – 1973, вып. 14. – С. 83–88.
5. Пряхин Ю.А. *Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных* // Зап. науч. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1974. – Т. 45. – С. 111–112.
6. Гурин А.М. *О выпуклых многогранниках, грани которых равноугольны* // Всесоюзн. совещание по дифференц. геом. Тез. докл. – 1990. – 27 с.
7. Гурин А.М. *Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.* 4 // Укр. геом. сб. – 1986, вып. 29. – С. 32–47.

8. Гурин А.М. *Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.* 1 // Укр. геом. сб. – 1983, вып. 26. – С. 41–48.
9. Гурин А.М. *Реализация сетей выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.* 2 // Укр. геом. сб. –1984, вып. 27. – С. 22–26.
10. Гурин А.М. *Бесконечные выпуклые многогранники с равноугольными гранями* // Укр. геом. сб. – 1991, вып. 34. – С. 31–39.
11. Медяник А.И. *К вопросу о конечности числа комбинаторных типов бесконечных выпуклых многогранников с равноугольными гранями* // Укр. геом. сб. – 1992, вып. 35. – С. 75–83.
12. Gosset T. *On the regular and semi-regular figures in space of* n *dimensions* // Messenger of Math. – 1900. – V. 29. – P. 43–48.
13. Elte E.L. *The semiregular polytopes of the hyperspace.* – Groningen, 1912. – 128 p.
14. Coxeter H.S.M. *Regular polytopes.* – New York: Macmillen, 1963. – 321 p.
15. Макаров П.В. *О выводе четырехмерных полуправильных многогранников* // Матем. исслед. – Кишинев, 1988. – Вып. 103. – С. 139–150.

Физико-технический институт низких температур
Национальной Академии наук Украины

Поступила
26.03.1997