Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Специальность: 010101.65 – Математика

Специализация: Геометрическая теория функций комплексного переменного

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА НА ТЕМУ:

(Дипломная работа)

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Работа завершена:

«____» _____ 2014 г. _____ (Л. И. Гафиятуллина)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.ф-м.н., доцент

«____» _____ 2014 г. _____ (Р. Г. Салахудинов)

Заведующий кафедрой:
д.ф-м.н., профессор

«____» _____ 2014 г. _____ (С. Р. Насыров)

Казань – 2014

Содержание

1 Введение **3**

2 Основные понятия, используемые в работе **5**

3 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом инерции и площадью выпуклой области **7**

4 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом порядка 1 и 2 выпуклой области **12**

5 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом порядка 1 и α выпуклой области **19**

6 Примеры вычисления функционалов и гипотеза об изопериметрической монотонности **22**

7 Заключение **35**

1 Введение

Пусть Ω - односвязная область на комплексной плоскости.Через $\partial\Omega$ обозначим границу области Ω. Пусть площадь области Ω будет конечной величиной, которую обозначим $\mathrm{A}(\Omega)$.

Рассмотрим физический функционал

$$\mathrm{P}(\Omega) := 2 \iint\limits_{\Omega} u(z, \Omega) \mathrm{d}A, \tag{1}$$

который называется жесткостью кручения области Ω, где $u(z, \Omega)$ - функция напряжения области Ω, по определению являющаяся решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{в } \Omega; \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ - оператор Лапласа.

В 1951 году Г. Полиа и Г. Сеге доказали, что для любой выпуклой области имеет место неравенство

$$\mathrm{P}(\Omega) \geq \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{2}$$

равенство в котором достигается, когда Ω - круг.

В 1962 году Е. Макаи было доказано обратное неравенство, а именно, что для любой выпуклой области

$$\mathrm{P}(\Omega) < \frac{4}{3}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2. \tag{3}$$

Постоянные входящие в неравенства (2), (3) наилучшие.

Далее нам понадобится определение евклидового момента инерции - это геометрический функционал определяемый равенством

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \int\limits_{\Omega} \rho(z, \partial\Omega)^2 \mathrm{d}A, \tag{4}$$

где $\rho(z, \partial\Omega)$ - функция расстояния от точки z до границы области Ω. (см. [1])

Неравенство (3) является следствием более сильного неравенства

$$\mathrm{P}(\Omega) \leq 4\mathrm{I}_2(\Omega). \tag{5}$$

Впервые этот результат был получен в 1962 году Е. Макаи (см. [5]).

В 1995 году Ф. Г. Авхадиев показал, что для любой односвязной области справедливы следующие оценки для жесткости кручения (см. [4])

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq \mathrm{P}(\Omega) \leq 64\mathrm{I}_2(\Omega). \tag{6}$$

Целью данной работы является установление следующих неравенств для выпуклых областей:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \geq \frac{1}{6}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2, \tag{7}$$

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega), \tag{8}$$

$$\mathrm{I}_1(\Omega) \leq \frac{1}{2}\rho(\Omega)\mathrm{A}(\Omega), \tag{9}$$

где $\mathrm{I}_1(\Omega) := \iint\limits_{\Omega} \rho(z,\Omega)\mathrm{dA}$ - евклидовый момент области относительно границы порядка 1.

Неравенство (7) является аналогом неравенства Полиа-Сегё (2). Равенство в (7) достигается для любого описанного около окружности многоугольника.

Из неравенств (9) и (7) следует, что

$$\mathrm{I}_2(\Omega) > \frac{1}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega). \tag{10}$$

Из неравенств (5), (8) и (9) вытекает следующая цепочка неравенств для жесткости кручения:

$$\mathrm{P}(\Omega) \leq 4\mathrm{I}_2(\Omega) \leq \frac{8}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) \leq \frac{4}{3}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2. \tag{11}$$

Постоянные, входящие в неравенства, наилучшие.

2 Основные понятия, используемые в работе

Пусть Ω - односвязная область на комплексной плоскости.Через $\partial\Omega$ обозначим границу области Ω. Пусть площадь области Ω будет конечной величиной, которую обозначим $A(\Omega)$.

Геометрический функционал определяемый равенством

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \int\limits_\Omega \rho(z,\partial\Omega)^\alpha \mathrm{dA} \tag{12}$$

называется евклидовым моментом области относительно границы порядка α, где $\rho(z,\partial\Omega)$ - функция расстояния от точки z до границы области Ω (см. [1]).

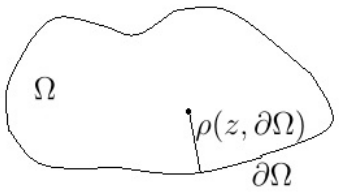


Рис. 1:

Введем следующие обозначения
$\rho(\Omega)$ - радиус максимального вписанного в область Ω круга.
$\Omega(t) := \{z \in \Omega | \rho(z,\partial\Omega) > t\}$ - множество уровня.
$\mathrm{a}(t) := \mathrm{A}(\Omega(t)) := \int\limits_{\Omega(t)} \mathrm{d}A$ - площадь множества уровня.
$\mathrm{l}(t) := \mathrm{L}(\Omega(\mathrm{t}))$ - длина границы множества уровня.
$G(\rho(\Omega)) := \{z \in \Omega | \rho(z,\Omega) = \rho(\Omega)\}$
$\mathrm{l}(\rho(\Omega)) := \lim_{t\to\rho(t)} \mathrm{l(t)}$ - длина границы множества $\Omega(t)$ (см. [2]).

Евклидовый момент односвязных областей можно вычислить применив определение кратного интеграла по Лебегу

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \int\limits_0^{\mathrm{A}(\Omega)} t(a)^\alpha \mathrm{d}a = \int\limits_{\rho(\Omega)}^0 t^\alpha \mathrm{d}(a(t)) =$$

$$-\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^\alpha \mathrm{d}(a(t)) = -t^\alpha a(t)|_{t=0}^{\rho(\Omega)} + \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} a(t) t^{\alpha-1} \mathrm{d}t = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1} a(t) \mathrm{d}t. \tag{13}$$

Физический функционал, определяемый равенством

$$\mathrm{P}(\Omega) := 2 \iint\limits_\Omega u(z,\Omega) \mathrm{dA} \tag{14}$$

называется жесткостью кручения области Ω, где $u(z,\Omega)$ - функция напряжения области Ω, которая по определению является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & \text{в } \Omega; \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ - оператор Лапласа.

Существует также другое определение жесткости кручения $\mathrm{P}(\Omega)$, как наибольшее число, для которого справедливо неравенство

$$\frac{\iint\limits_{\Omega} (f_x^2 + f_y^2) dxdy}{4\left(\iint\limits_{\Omega} f dxdy\right)^2} \geq \frac{1}{\mathrm{P}(\Omega)} \tag{15}$$

где $f = f(x,y)$ обозначает функцию, определенную и достаточно гладкую в Ω и на $\partial\Omega$, удовлетворяющую условию $f = 0$ на $\partial\Omega$ (см. [3]).

3 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом инерции и площадью выпуклой области

Теорема 1. *Пусть Ω - произвольная выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \geq \frac{1}{6}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2. \tag{16}$$

Причем равенство достигается тогда, когда Ω - описанный около окружности многоугольник.

Доказательство. Докажем случай равенства. Пусть Ω — произвольный описанный около окружности n-угольник, со сторонами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, углами равными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (n-2)\pi$ и $\rho(\Omega)$ - радиус максимального вписанного круга.

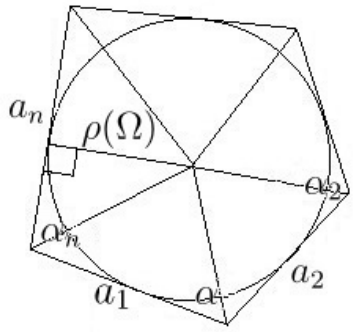


Рис. 2:

Впишем в многоугольник круг максимально возможного радиуса биссектрисами разобьем на n треугольников. Выразим стороны многоугольника через радиус окружности и прилежащие к ним углы.

$$a_i = \rho(\Omega)\left(\cot\frac{\alpha_i}{2} + \cot\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right),\ a_n = \rho(\Omega)\left(\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}\right);$$

Определим площадь каждого треугольника и сложим.

$$\mathrm{A}(\triangle_i) = \frac{1}{2}\rho(\Omega)^2\left(\cot\frac{\alpha_i}{2} + \cot\frac{\alpha_{i+1}}{2}\right),\ \mathrm{A}(\triangle_n) = \frac{1}{2}\rho(\Omega)^2\left(\cot\frac{\alpha_n}{2} + \cot\frac{\alpha_1}{2}\right).$$

$$\mathrm{A}(\Omega) = \rho(\Omega)^2\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i}{2}.$$

Пусть t - линия уровня функции расстояния, $0 \leq t \leq r$. Определим площадь множества уровня многоугольника

$$a(t) = (\rho(\Omega) - t)^2\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i}{2}.$$

Посчитаем евклидовый момент инерции:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t \cdot a(t)\mathrm{d}t = 2\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i}{2}\int\limits_0^{\rho(\Omega)}(\rho(\Omega)-t)^2 t\mathrm{d}t = \frac{\rho(\Omega)^4}{6}\sum_{i=1}^{n}\cot\frac{\alpha_i}{2}.$$

Таким образом, момент инерции описанного около окружности многоугольника равен:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \frac{\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2}{6}.$$

Докажем случай неравенства. Пусть Ω - произвольный n-угольник с вершинами $A_1, A_2, ..., A_n$ и пусть хотя бы одна сторона многоугольника не касается максимального вписанного в Ω круга.

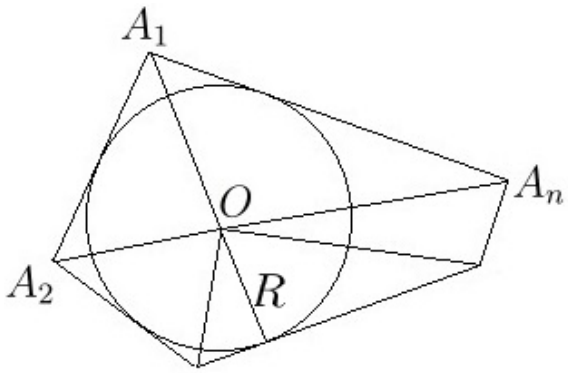


Рис. 3:

Впишем в нашу область Ω круг максимально возможного радиуса $R = \rho(\Omega)$. И разобьем n-угольник на треугольники OA_1A_2, OA_2A_3,...,OA_nA_1. Рассмотрим случай, когда у всех треугольников углы при основании острые. Евклидовый момент инерции области Ω будет равен сумме значений евклидового момента инерции каждого треугольника

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \iint\limits_{\Omega}\rho(z,\Omega)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\triangle_i}\rho(z,\Omega)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где $\triangle_i$ - это треугольник OA_iA_{i+1}.

Для доказательства неравенства необходимо оценить величину $\iint\limits_{\triangle_i}\rho(z,\Omega)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Рассмотрим один из треугольников $\triangle_i$. Мы знаем, что функция расстояния $\rho(z,\Omega)$ на основании треугольника A_iA_{i+1} равна нулю, а $\rho(O,\Omega) = R$.

Введем новую функцию

$$\rho_{\triangle_i}(z) = R\left(1 - \frac{x}{h}\right) = \frac{R(h-x)}{h} = \frac{Ra}{h},$$

где h - высота, опущенная из точки O на основание A_iA_{i+1} (см. рис. 4).

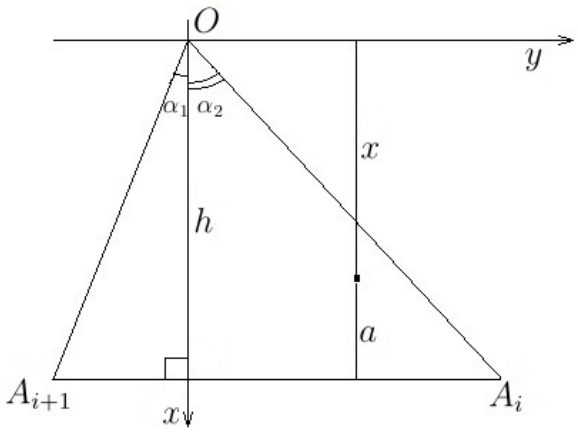


Рис. 4:

Значение функции $\rho_{\triangle_i}(z)$ на основании треугольника равно нулю и значение в точке $\rho_{\triangle_i}(O) = R$. Эта функция линейная и сохранились свойства функции расстояния.

Посчитаем следующий интеграл

$$\iint\limits_{\triangle_i} \rho_{\triangle_i}(z)^2 \mathrm{d}\triangle_i = \int\limits_0^h \int\limits_{-xtg\alpha_1}^{xtg\alpha_2} \left(R - x\frac{R}{h}\right)^2 \mathrm{dxdy} = \frac{1}{12}R^2h^2(tg\alpha_2 + tg\alpha_1) = \frac{1}{6}\mathrm{A}(\triangle_i)R^2.$$

Таким образом, если мы покажем, что для любого треугольника $\triangle_i$ выполняется $\rho(z,\Omega) \geq \rho_{\triangle_i}(z)$, то неравенство (16) будет доказано. Действительно,

$$\iint\limits_{\Omega} \rho(z,\Omega)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_i \iint\limits_{\triangle_i} \rho(z,\Omega)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \sum_i \iint\limits_{\triangle_i} \rho_{\triangle_i}(z)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \sum_i \frac{1}{6}\mathrm{A}(\triangle_i)\rho(\Omega)^2 = \frac{1}{6}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2.$$

Фиксируем i и рассмотрим треугольник $\triangle_i$. Длину высоты опущенной из точки O на основание треугольника A_iA_{i+1} обозначим за h_1. Фиксируем в треугольнике точку z. И пусть расстояние от точки z до стороны A_iA_{i+1} равно a.

Пусть $\triangle_j$ другой треугольник. Длину высоты опущенной из точки O на сторону A_jA_{j+1} обозначим за h_2. А расстояние от точки z, лежащей в треугольнике $\triangle_i$ до основания A_jA_{j+1} треугольника $\triangle_j$ равно b (см. рис. 5).

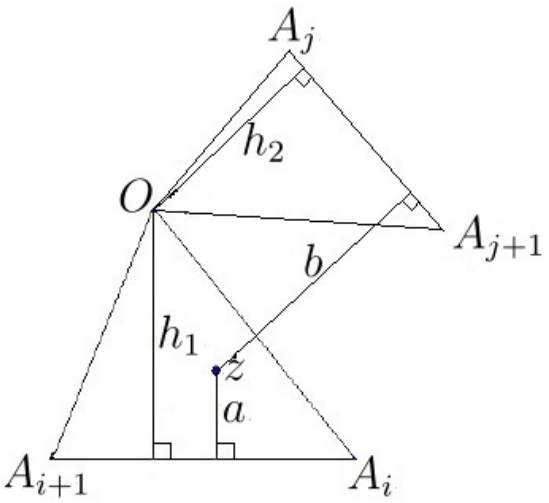


Рис. 5:

Докажем вспомогательное утверждение, а именно, что

$$\frac{b}{a} \geq \frac{h_2}{h_1}. \tag{17}$$

Для доказательства неравенства (17) выделим два случая.
I. Пусть основания A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} треугольников $\triangle_i$ и $\triangle_j$ параллельны.

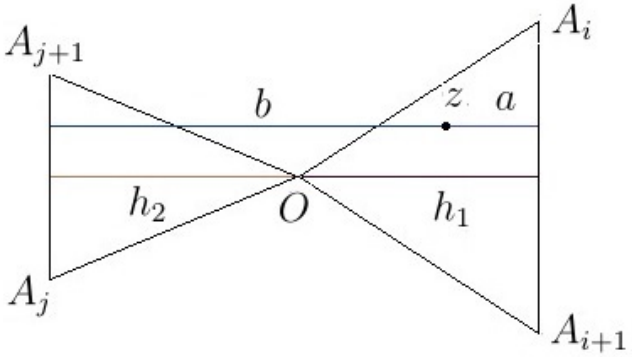


Рис. 6:

В этом случае $b \geq h_2$ и $a \leq h_1$. Поэтому

$$\frac{b}{a} \geq \frac{h_2}{a} \geq \frac{h_2}{h_1}.$$

II. Пусть основания A_iA_{i+1} и A_jA_{j+1} треугольников $\triangle_i$ и $\triangle_j$ пересекаются в некоторой точке F. В силу выпуклости n-угольника Ω эти прямые пересекаются вне отрезков $[A_i, A_{i+1}]$ и $[A_j, Aj+1]$ (см. рис. 7).

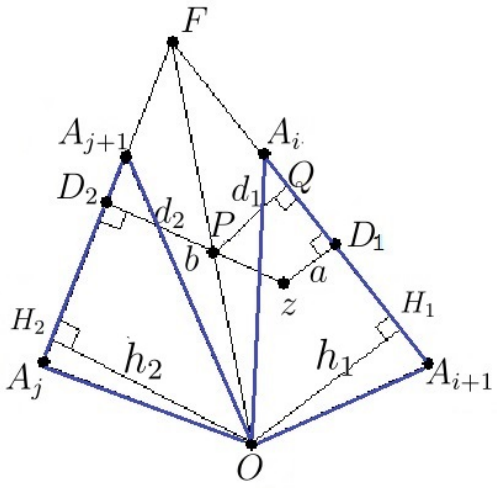


Рис. 7:

Расстояние от точки z до точки D_1 пусть равен a, а расстояние от точки z до D_2 равен b. Прямая ZD_2 пересекает отрезок OF в точке P. Расстояние от точки P до основания A_iA_{i+1} обозначим за d_1, расстояние от P до стороны A_jA_{j+1} обозначим d_2. Высоты OH_1 и OH_2 равны h_1 и h_2 соответственно. Здесь $b \geq d_2$, $a \leq d_1$ и треугольник FPQ подобен треугольнику FOH_1, а треугольник FPD_2 подобен треугольнику FOH_2 . Из этих неравенств и подобий треугольников следует

$$\frac{b}{a} \geq \frac{d_2}{a} \geq \frac{d_2}{d_1} = \frac{h_2}{h_1}.$$

Утверждение (17) доказано.

Итак, $\frac{b}{a} \geq \frac{h_2}{h_1} \geq \frac{R}{h_1}$ и $\rho(z, \Omega) = \min\{a, b_1, b_2, ..., b_n\}$. Следовательно,

$$\rho(z, \Omega) \geq \frac{aR}{h_1} = \rho_{\triangle_i}(z).$$

Таким образом, неравенство (16) доказано.

Приведенное рассуждение верно и в случае, когда у треугольников угол при основании тупой. □

4 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом порядка 1 и 2 выпуклой области

Установим изопериметрические неравенства между $\mathrm{I}_2(\Omega)$ и $\mathrm{I}_1(\Omega)$

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \le C_1 \rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega), \tag{18}$$

$$\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) \le C_2 \mathrm{I}_2(\Omega), \tag{19}$$

где Ω - выпуклая область на плоскости и $\mathrm{I}_1(\Omega) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} a(t)dt$, $\mathrm{I}_2(\Omega) = 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} ta(t)dt$ - Евклидовы моменты порядка 1 и 2.

Исследуем неравенство (18).

Отметим следующий почти очевидный факт. Поскольку $\rho(z,\Omega) \le \rho(\Omega)$, где $z \in \Omega$, то

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \iint\limits_\Omega \rho(z,\Omega)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \rho(\Omega) \iint\limits_\Omega \rho(z,\Omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega).$$

Таким образом константа $C_1 = \sup\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{I}_2(\Omega)}{\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega)} \le 1$.

Для определения точной константы C_1 применим метод Е. Макаи, который заключается в замене функции $a(t)$ на линейную (см. [5]).

Рассматривая функцию $a(t)$ конкретных областей, например круга, прямоугольника, трапеции, можно заметить, что функция $a(t)$ - убывающая и выпукла вниз (см. [7]).

Очевидно, что существует линейная функция $\lambda(t) = c\,(\rho(\Omega)^2 - \rho(\Omega)t)$, $(c > 0)$:

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} a(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \lambda(t)\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Графики функций $a(t)$ и $\lambda(t)$ будут иметь вид

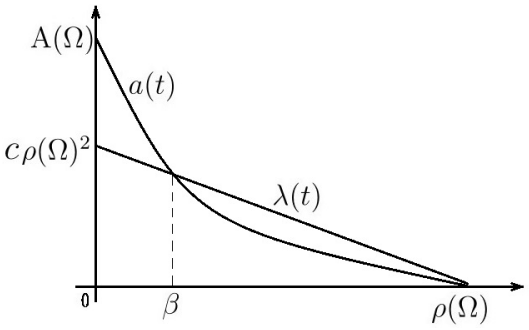


Рис. 8:

Константа c однозначно определяется из равенства (20).

Так как функция $a(t) - \lambda(t)$ выпукла вниз, то существует такое число β $(0 < \beta < \rho(\Omega))$:

$$\begin{cases} a(t) - \lambda(t) \geq 0, 0 \leq t \leq \beta \\ a(t) - \lambda(t) \leq 0, \beta \leq t \leq \rho(\Omega). \end{cases} \tag{21}$$

Представим $\mathrm{I}_2(\Omega)$ в следующем виде

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} ta(t)\mathrm{dt} = 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t(a(t) - \lambda(t))\mathrm{dt} + 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{dt}.$$

Представим первый интеграл в виде суммы интегралов

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = 2\int\limits_0^{\beta} t(a(t) - \lambda(t))\mathrm{dt} + 2 \int\limits_{\beta}^{\rho(\Omega)} t(a(t) - \lambda(t))\mathrm{dt} + 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{dt}.$$

В силу (20), (21) имеем

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq 2\int\limits_0^{\beta} \beta(a(t) - \lambda(t))\mathrm{dt} + 2 \int\limits_{\beta}^{\rho(\Omega)} \beta(a(t) - \lambda(t))\mathrm{dt} + 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{dt}.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{dt} = 2c \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\left(\rho(\Omega)^2 - \rho(\Omega)t\right)\mathrm{dt} = \frac{c\rho(\Omega)^4}{3}.$$

Из (20) посчитаем $\mathrm{I}_1(\Omega)$

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \lambda(t)\mathrm{dt} = c \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \left(\rho(\Omega)^2 - \rho(\Omega)t\right)\mathrm{dt} = \frac{c\rho(\Omega)^3}{2}.$$

Имеем следующие неравенства

$$\mathrm{I}_2(\Omega) - C_1\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) \leq \frac{c\rho(\Omega)^4}{3} - C_1\frac{c\rho(\Omega)^4}{2} = c\rho(\Omega)^4\left(\frac{1}{3} - \frac{C_1}{2}\right) \leq 0.$$

Так как $c > 0$, то

$$\frac{1}{3} - \frac{C_1}{2} \leq 0.$$

Отсюда получаем, что $C_1 \geq \dfrac{2}{3}$.

Обоснуем неулучшаемость постоянной 2/3. Для этого рассмотрим примеры областей для которых в (18), где $C_1 = 2/3$, достигается равенство.

Пример 1. Пусть Ω - прямоугольник со сторонами равными a, b и $a > b$.

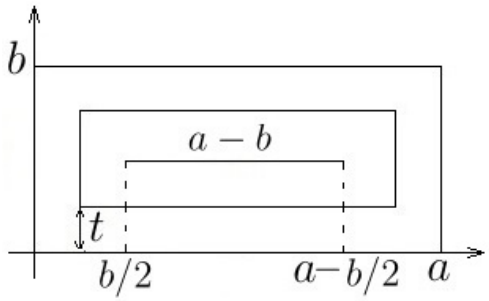


Рис. 9:

Для прямоугольника площадь множества уровня $a(t) = (b - 2t)(a - 2t)$, радиус максимального вписанного круга равен $\rho(\Omega) = b/2$.
Посчитаем момент Евклида порядка α

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha \int\limits_0^{b/2} t^{\alpha-1}(b-2t)(a-2t)\mathrm{dt} = \alpha \int\limits_0^{b/2} (abt^{\alpha-1} - (2b+2a)t^\alpha + 4t^{\alpha+1})\mathrm{dt} =$$

$$= \alpha \left(\frac{abt^\alpha}{\alpha} - \frac{(2b-2a)t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{4t^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right) \Bigg|_0^{b/2} =$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^\alpha \left(\frac{ab(\alpha+1)(\alpha+2) - \alpha(\alpha+2)(b+a)b + \alpha(\alpha+1)b^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) =$$

$$= \left(\frac{b}{2}\right)^\alpha \left(\frac{\alpha ab + 2ab - \alpha b^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right) = \frac{b^{\alpha+1}}{2^\alpha} \frac{(a(\alpha+2) - \alpha b)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Тем самым получаем, что

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = \frac{ab^2}{4}\left(1 - \frac{b}{3a}\right), \quad \mathrm{I}_2(\Omega) = \frac{ab^3}{12}\left(1 - \frac{b}{2a}\right).$$

Учитывая, что $\rho(\Omega) = b/2$, приведем евклидовый момент инерции к следующему виду

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \frac{ab^3}{12}\left(1 - \frac{b}{2a}\right) = \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) - \frac{4\rho(\Omega)^4}{9}.$$

Рассмотрим предельный случай при $\rho(\Omega) \to 0$. Получим

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \cdot \left(\frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega)\right)^{-1} \to 1, \;\; \rho(\Omega) \to 0.$$

Таким образом, для узкого прямоугольника или по-другому для ″иглы″ в (18), где $C_1 = 2/3$, имеет место равенство.

Пример 2. Рассмотрим область, состоящую из двух полукругов радиуса r и прямоугольника со сторонами d и $2r$. Такую область называют областью типа Боннезена (см. [6]).

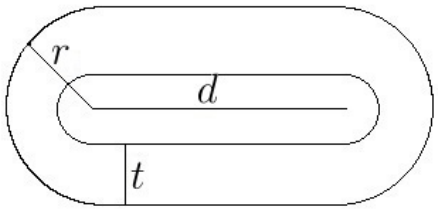


Рис. 10: Область типа Боннезена

Площадь множества уровня $a(t)$ для данной области равна

$$a(t) = \pi(r-t)^2 + 2d(r-t).$$

Максимальный радиус вписанного круга $\rho(\Omega) = r$. Вычислим евклидовый момент порядка α

$$\mathrm{I}_\Omega(\alpha) = \alpha \int\limits_0^r t^{\alpha-1}(\pi(r-t)^2 + 2d(r-t))\mathrm{dt} = \alpha \int\limits_0^r t^{\alpha-1}(\pi r^2 - 2r\pi t + t^2 + 2dr - 2dt)\mathrm{dt} =$$

$$= \alpha\left(\frac{\pi r^2 t^\alpha}{\alpha} - \frac{2r\pi t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{\pi t^{\alpha+2}}{\alpha+2} + \frac{2drt^\alpha}{\alpha} - \frac{2dt^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)\Bigg|_0^r = \pi r^{\alpha+2} - \frac{2\alpha\pi r^{\alpha+2}}{\alpha+1} + 2dr^{\alpha+1} -$$

$$-\frac{2d\alpha r^{\alpha+2}}{\alpha+1} = \pi r^{\alpha+2}\left(1 - \frac{2\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\alpha+2}\right) + 2r^{\alpha+1}d\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right) =$$

$$= \pi r^{\alpha+2}\left(\frac{\alpha^2+3\alpha+2-2\alpha^2-4\alpha+\alpha^{2+\alpha}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right) + \frac{2r^{\alpha+1}d}{\alpha+1} = \frac{2\pi r^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2r^{\alpha+1}d}{\alpha+1}.$$

Евклидовый момент порядка 1 и евклидовый момент инерции соответственно равны

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = r^2\left(d + \frac{\pi r}{3}\right), \quad \mathrm{I}_2(\Omega) = \frac{2r^3}{3}\left(1 + \frac{\pi r}{4}\right).$$

Запишем евклидовый момент инерции через евклидовый момент порядка 1, получим

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = \frac{2}{3}r\left(r^2 d + \frac{\pi r^3}{3}\right) - \frac{\pi r^4}{18} = \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) - \frac{\pi\rho(\Omega)^4}{18}.$$

Устремим $\rho(\Omega) \to 0$, получим

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \cdot \left(\frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega)\right)^{-1} \to 1, \;\; \rho(\Omega) \to 0.$$

Сформулируем полученный результат

Теорема 2. *Пусть Ω - произвольная выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \le \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega). \tag{22}$$

Постоянная в неравенстве наилучшая из возможных, так как существует последовательность областей, которые в пределе вырождаются и для которых в пределе $\mathrm{I}_2(\Omega) \sim \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega)$.

Из теоремы 2 и неравенства Е. Макаи (5) вытекает

Следствие 1. *Для любой выпуклой области Ω справедливо неравенство*

$$\mathrm{P}(\Omega) \le \frac{8}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega). \tag{23}$$

Поскольку узкий прямоугольник является экстремальной областью в (5) и (22), то равенство в (23) достигается для узкого прямоугольника.

Перейдем теперь к исследованию неравенства (19). Для этого сформулируем и докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть Ω - произвольная выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\mathrm{I}_1(\Omega) \le \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega). \tag{24}$$

Причем постоянная в неравенстве наилучшая из возможных.

Для обоснования леммы 1 воспользуемся методом Е. Макаи (см. [5]).

Обозначим через $l(t)$ периметр кривой, которая состоит из тех точек из Ω, для которых минимальное расстояние до границы Ω равно t. Если Ω является выпуклой многоугольной областью, то $l(t)$ - кусочно-линейная, убывающая и вогнутая.

Введем линейную функцию $\lambda(t) = \mathrm{L}(\Omega) - ct, (c > 0)$:

$$\mathrm{A}(\Omega) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} l(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \lambda(t)\mathrm{d}t. \tag{25}$$

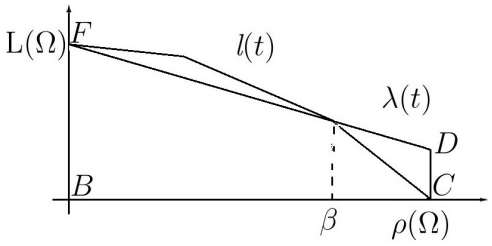


Рис. 11: Графики функций $l(t)$ и $\lambda(t)$

Из равенства интегралов (25) получаем, что площадь области Ω совпадает с площадью трапеции $BCDF$ (см. рис. 11).

Из равенства (25) следует, что существует такое число β $(0 < \beta < \rho)$:

$$\begin{cases} l(t) - \lambda(t) \geq 0, 0 \leq t \leq \beta \\ l(t) - \lambda(t) \leq 0, \beta \leq t \leq \rho(\Omega). \end{cases} \tag{26}$$

Из (26) и (25) получим, что

$$\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\left(l(t) - \lambda(t)\right) \mathrm{d}t \leq \int\limits_0^{\beta} \beta\left(l(t) - \lambda(t)\right) \mathrm{d}t + \int\limits_{\beta}^{\rho(\Omega)} \beta\left(l(t) - \lambda(t)\right) \mathrm{d}t = 0$$

Так как, $a'(t) = -l(t)$, то

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = -\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\mathrm{d}a(t) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} tl(t)\mathrm{d}t.$$

Таким образом,

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = \int\limits_0^{\rho(\Omega)} tl(t)\mathrm{d}t \leq \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{d}t.$$

Вычислим площадь области применив малую формулу трапеций

$$\mathrm{A}(\Omega) = \frac{1}{2}\left(\lambda(0) + \lambda(\rho(\Omega))\right)\rho(\Omega) = \mathrm{L}(\Omega)\rho(\Omega) - \frac{c\rho(\Omega)^2}{2}.$$

Подставим найденные значения функционалов в неравенство (24) получим

$$\mathrm{I}_1(\Omega) - \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega) \leq \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t\lambda(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega).$$

Вычислим интеграл и подставим значение площади, получим

$$\mathrm{I}_1(\Omega) - \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega) \leq \frac{\mathrm{L}(\Omega)\rho(\Omega)^2}{2} - \frac{c\rho(\Omega)^3}{3} - \frac{\mathrm{L}(\Omega)\rho(\Omega)^2}{2} + \frac{c\rho(\Omega)^3}{4} = -\frac{c\rho(\Omega)^3}{12} \leq 0$$

Таким образом, установили справедливость неравенства (24). На примере прямоугольника покажем неулучшаемость константы $1/2$.

Пример 3. Пусть Ω - прямоугольник со сторонами равными a, b и $a > b$. Радиус максимального вписанного круга $\rho(\Omega) = b/2$, площадь области $\mathrm{A}(\Omega) = ab$.

Напомним, что евклидовый момент порядка 1 прямоугольника равен

$$\mathrm{I}_1(\Omega) = \frac{ab^2}{4} - \frac{b^3}{12} = \frac{1}{2}\rho(\Omega)\mathrm{A}(\Omega) - \frac{2\rho(\Omega)^3}{3}.$$

Устремляя $\rho(\Omega) \to 0$, получим

$$\mathrm{I}_1(\Omega) \cdot \left(\frac{1}{2}\rho(\Omega)\mathrm{A}(\Omega)\right)^{-1} \to 1, \;\; \rho(\Omega) \to 0.$$

Таким образом, для узкого прямоугольника в (24) достигается равенство.

С использованием леммы 1 и теоремы 1, получим неравенство (19)

$$\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) \leq \frac{1}{2}\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2 = 3\frac{\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2}{6} \leq 3\mathrm{I}_2(\Omega).$$

Изложенный выше результат можно сформулировать в виде следующего утверждения

Теорема 3. *Пусть Ω - произвольная выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\mathrm{I}_2(\Omega) > \frac{1}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega). \tag{27}$$

Так как неравенство (27) является комбинацией двух неравенств (16) и (24), у которых экстремальные области отличны, то заключаем, что постоянную $1/3$ можно улучшить.

С помощью теоремы 2 и леммы 1 получается

Следствие 2. *Для любой выпуклой области Ω имеет место неравенство*

$$\mathrm{I}_1(\Omega) \leq \frac{1}{3}\rho(\Omega)^2\mathrm{A}(\Omega), \tag{28}$$

равенство в котором достигается для вырожденных областей.

5 Изопериметрическое неравенство между евклидовым моментом порядка 1 и α выпуклой области

Теперь рассмотрим общий случай. Установим неравенство между функционалами $\mathrm{I}_2(\Omega)$ и $\mathrm{I}_\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq C_3 \rho(\Omega)^{2-\alpha} \mathrm{I}_\alpha(\Omega), \tag{29}$$

где Ω - выпуклая область на плоскости и $\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1} a(t) dt$, $\mathrm{I}_2(\Omega) = 2 \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t a(t) dt$ - Евклидовы моменты порядка α и 2 соответственно.

Аналогичным образом, как и в случае неравенств (22) и (24), используем метом Е. Макаи.

Сделаем предположение, что функция $t^{\alpha-1}a(t)$ - убывающая и выпукла вниз, которое подтверждается на примерах. На рисунке 12 приведем изменение графика функции $t^{\alpha-1}a(t)$ в зависимости от $0 < \alpha \leq 1$.

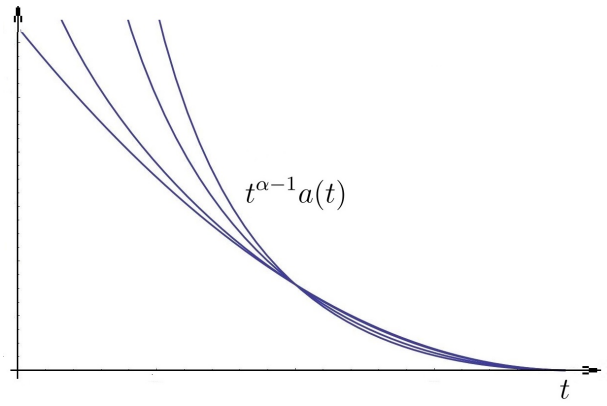


Рис. 12: График функции $t^{\alpha-1}a(t)$ на примере круга, $0 < \alpha \leq 1$

Как и в [5] введем линейную функцию $\lambda(t) = c\rho(\Omega)^\alpha (\rho(\Omega) - t)$, $(c > 0)$:

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1} a(t) dt = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \lambda(t) dt. \tag{30}$$

Из (30) вычислим евклидовый момент порядка α

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha c \int\limits_0^{\rho(\Omega)} \left(\rho(\Omega)^{\alpha+1} - \rho(\Omega)^\alpha t\right) dt = \frac{\alpha c \rho(\Omega)^{\alpha+2}}{2}.$$

Графики функций $\lambda(t)$ и $t^{\alpha-1}a(t)$ будут иметь следующий вид (см. рис. 13)

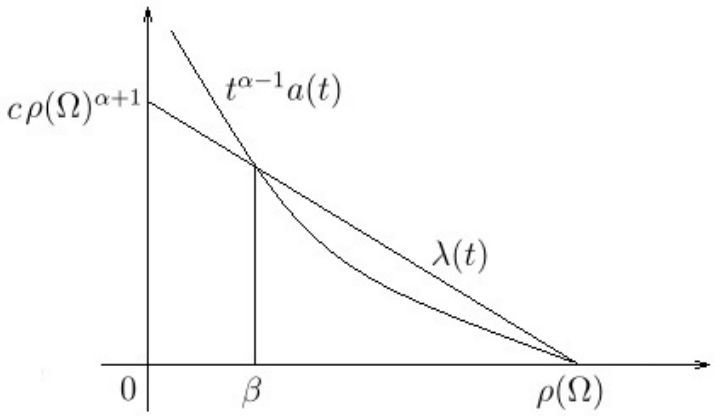


Рис. 13:

Существует такое число β $(0 < \beta < \rho(\Omega))$, для которого имеют место неравенства

$$\begin{cases} a(t) - \lambda(t) \geq 0, 0 \leq t \leq \beta \\ a(t) - \lambda(t) \leq 0, \beta \leq t \leq \rho(\Omega). \end{cases} \tag{31}$$

Перепишем $\mathrm{I}_2(\Omega)$ в следующем виде:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) = 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} ta(t)\mathrm{dt} = 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{2-\alpha}t^{\alpha-1}a(t)\mathrm{dt} = 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{2-\alpha}\left(t^{\alpha-1}a(t) - \lambda(t)\right)\mathrm{dt} + 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{2-\alpha}\lambda(t)\mathrm{dt}.$$

Далее, применяя неравенства (31) и равенство (30), получим

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq 2\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{2-\alpha}\lambda(t)\mathrm{dt} = \frac{2c\rho(\Omega)^4}{(3-\alpha)(4-\alpha)}.$$

Запишем неравенство (29) в следующем виде

$$\mathrm{I}_2(\Omega) - C_3\rho(\Omega)^{2-\alpha}\mathrm{I}_\alpha(\Omega) \leq 0.$$

Подставим найденные значения функционалов в последнее неравенство

$$\frac{2c\rho(\Omega)^4}{(3-\alpha)(4-\alpha)} - C_3\frac{\alpha c\rho(\Omega)^4}{2} \leq 0.$$

Так как $c > 0$, то

$$C_3 \geq \frac{4}{\alpha(3-\alpha)(4-\alpha)}.$$

Сформулируем полученный результат

Теорема 4. *Пусть Ω - произвольная выпуклая область на плоскости. Тогда имеет место следующее неравенство*

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \leq \frac{4\rho(\Omega)^{2-\alpha}}{\alpha(3-\alpha)(4-\alpha)}\mathrm{I}_\alpha(\Omega), \tag{32}$$

где $0 < \alpha \leq 1$. Случай равенства совпадает с теоремой 2.

Из неравенства Е. Макаи (5) и теоремы 4 немедленно вытекает

Следствие 3. *Для любой выпуклой области Ω справедливо неравенство*

$$\mathrm{P}(\Omega) \leq \frac{16\rho(\Omega)^{2-\alpha}}{\alpha(3-\alpha)(4-\alpha)}\mathrm{I}_\alpha(\Omega), \tag{33}$$

где $0 < \alpha \leq 1$.

6 Примеры вычисления функционалов и гипотеза об изопериметрической монотонности

Введем два новых геометрических функционала области

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}}\left[\mathrm{I}_\alpha(\Omega) - \frac{\mathrm{l}(\rho(\Omega))\rho(\Omega)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right], \tag{34}$$

$$\mathrm{g}(\alpha) := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\mathrm{I}_\alpha(\Omega)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}}, \tag{35}$$

где $\alpha > 0$.

Гипотеза 1. *Если Ω- ограниченное выпуклое множество, тогда функции $g(\alpha)$ и $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$ не убывают.*

Научным руководителем была поставлена задача проверить гипотезу об изопериметрической монотонности функционалов $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$ и $g(\alpha)$ на конкретных примерах.

Приведем следующие примеры.

Пример 4. Пусть Ω - круг радиуса r.
Площадь множества уровня круга равна $a(t) = \pi(r-t)^2$ и $\rho(\Omega) = r$.
Вычислим значение евклидового момента круга порядка α используя определение интеграла по Лебегу.

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha\int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1}a(t)dt = \alpha\int\limits_0^r t^{\alpha-1}\pi(r-t)^2\mathrm{dt} = \pi\int\limits_0^r (r-t)^2\mathrm{dt}^\alpha = 2\pi\int\limits_0^r t^\alpha(r-t)\mathrm{dt} =$$

$$\frac{2\pi}{\alpha+1}\int\limits_0^r (r-t)\mathrm{dt}^{\alpha+1} = \frac{2\pi}{\alpha+1}\int\limits_0^r t^{\alpha+1}\mathrm{dt} = \frac{2\pi r^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Для круга $\mathrm{l}(\rho(\Omega)) = 0$, поэтому $F_\Omega(\alpha) = g(\alpha)$.

$$F_\Omega(\alpha) = g(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{r^{\alpha+1}}\cdot\frac{2\pi r^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} = 2\pi r.$$

Таким образом, для круга $g(\alpha)$, $F_\Omega(\alpha)$ длина окружности.

Пример 5. Пусть Ω — прямоугольник со сторонами равными a, b и $a > b$ (см. рис. 14).

Мы уже знаем, что евклидовый момент порядка α прямоугольника определяется следующей формулой

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \frac{b^{\alpha+1}}{2^\alpha}\frac{(a(\alpha+2)-\alpha b)}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

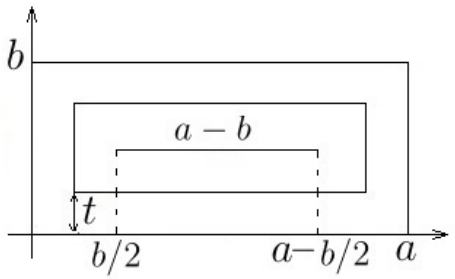


Рис. 14:

Площадь множества уровня $a(t) = (b-2t)(a-2t)$, радиус максимального вписанного круга равен $\rho(\Omega) = b/2$ и $\mathrm{l}(\rho(\Omega)) = 2(a-b)$.

Теперь по формуле (34) найдем значение функции $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}}\left[\mathrm{I}_\alpha(\Omega) - \frac{\mathrm{l}(\rho(\Omega))\rho(\Omega)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{b^{\alpha+1}}\left(\frac{b^{\alpha+1}}{2^\alpha}\frac{(a(\alpha+2)-\alpha b)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{2(a-b)b^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{b^{\alpha+1}}\left(\frac{ab^{\alpha+1}}{2^2(\alpha+1)} - \frac{\alpha b^{\alpha+2}}{2^\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)} - \frac{ab^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha+1)} + \frac{b^{\alpha+2}}{2^\alpha(\alpha+1)}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{b^{\alpha+1}}\frac{b^{\alpha+2}}{2^\alpha(\alpha+1)}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+2}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{b^{\alpha+1}}\frac{b^{\alpha+2}}{2^{\alpha-1}(\alpha+1)(\alpha+2)} = 4b = 8\rho(\Omega).$$

Получаем, что для прямоугольника функция $F_\Omega(\alpha)$ — это длина границы квадрата со стороной b.

Функция $g(\alpha)$ равна

$$g(\alpha) = 2(\alpha(a-b)+2a),$$

которая, как видно, тоже возрастает.

Пример 6. Рассмотрим область, состоящую из двух полукругов радиуса r и прямоугольника со сторонами d и $2r$ (см. рис. 15).

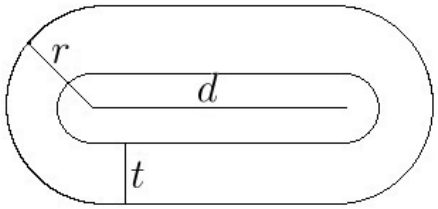


Рис. 15: Область типа Боннезена

Площадь множества уровня $a(t)$ для данной области равна

$$a(t) = \pi(r-t)^2 + 2d(r-t).$$

Максимальный радиус вписанного круга $\rho(\Omega) = r$ и $\mathrm{l}(\rho(\Omega)) = 2\mathrm{d}$. Из примера 2 знаем, что евклидовый момент порядка α для области типа Боннезена равен

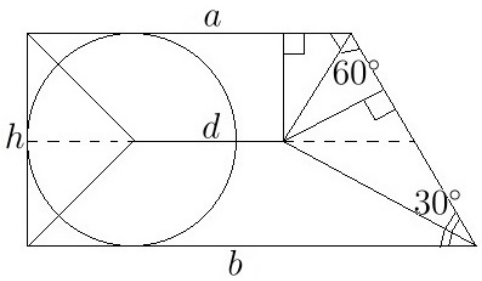
$$\mathrm{I}_\Omega(\alpha) = \alpha \int\limits_0^r t^{\alpha-1}(\pi(r-t)^2 + 2d(r-t))\mathrm{dt} = \frac{2\pi r^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2r^{\alpha+1}d}{\alpha+1}.$$

Вычислим функцию $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{r^{\alpha+1}}\left(\frac{2\pi r^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{2r^{\alpha+1}d}{\alpha+1} - \frac{2r^{\alpha+1}d}{\alpha+1}\right) = 2\pi r.$$

Получили, что $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$ - длина круга радиуса r.
Видно, что функция $g(\alpha) = 2\pi r + 2d(\alpha+2)$ является возрастающей.

Пример 7. Пусть Ω — трапеция с основаниями равными a, b и пусть углы при нижнем основании равны 30° и 60°.



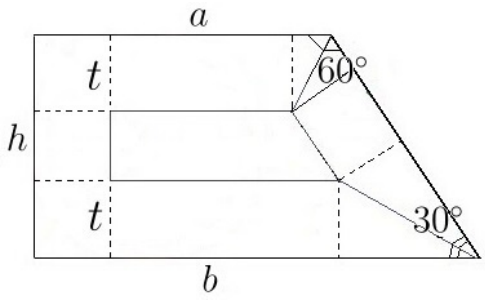
Высота трапеции будет равна $h = \dfrac{(b-a)\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/6)} = \sqrt{3}(b-a)$. Радиус максимального вписанного круга будет равен $\rho(\Omega) = h/2 = \dfrac{\sqrt{3}(b-a)}{2}$.
Вычислим $\mathrm{l}(\rho(\Omega))$

$$\mathrm{l}(\rho(\Omega)) = 2d = 2\left(a - \frac{\sqrt{3}(b-a)}{2} - \frac{b-a}{2}\right) = 2a - (\sqrt{3}-1)(b-a).$$

Посчитаем площадь множества уровня $a(t)$

$$a(t) = \left(\sqrt{3}(b-a) - 2t\right)\left(a - t - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}(b-a) - 2t\right)\left(b - t - \sqrt{3}t - \left(a - t - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3}(b-a)2t\right)\left(a - t - \frac{t}{\sqrt{3}} + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{t}{2\sqrt{3}} - \frac{a}{2}\right) = \left(\sqrt{3}(b-a)2t\right)\left(\frac{a+b}{2} - \frac{(\sqrt{3}+2)t}{\sqrt{3}}\right).$$



Вычислим евклидовый момент порядка α

$$\mathrm{I}_\Omega(\alpha) = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1} a(t)\mathrm{dt} = \alpha \int\limits_0^{\rho(\Omega)} t^{\alpha-1} \left(\sqrt{3}(b-a)2t\right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{(\sqrt{3}+2)t}{\sqrt{3}}\right) \mathrm{dt} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\left(a\left(2\sqrt{3}+3(1+\sqrt{3})\alpha\right) - b\left(-2\sqrt{3}+(3+\sqrt{3})\alpha\right)\right)}{2^{\alpha+1}(1+\alpha)(\alpha+2)}$$

Найдем значение функции $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}} \left[\mathrm{I}_\alpha(\Omega) - \frac{\mathrm{l}(\rho(\Omega))\rho(\Omega)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{(\sqrt{3}(b-a))^{\alpha+1}} \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{3}^{\alpha}(b-a)^{\alpha}\left(\alpha(b-a)(3+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(a+b)\right)}{2^{\alpha+1}(1+\alpha)(\alpha+2)} - \frac{(2a-(\sqrt{3}+1)(b-a))(\sqrt{3}(b-a))^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}\right) =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}{\left(\sqrt{3}(b-a)\right)^{\alpha+1}} \frac{\left(3+2\sqrt{3}\right)(b-a)^{\alpha+2}3^{\alpha/2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)^{\alpha}} = \frac{2\left(3+2\sqrt{3}\right)(b-a)}{\sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3}+4\right)(b-a).$$

Посчитаем длину границы трапеции при $d = 0$

$$\mathrm{l}(\Omega) = \sqrt{3}(b-a) + 2(b-a) + a + b - 2a + (\sqrt{3}+1)(b-a) =$$

$$= 2\sqrt{3}b - 2\sqrt{3}a + 4b - 4a = (b-a)(2\sqrt{3}+4).$$

Таким образом, получаем, что значение функции $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$ совпадает с длиной границы описанной трапеции.

Функция $g(\alpha) = \alpha(\sqrt{3}+1) + 2(a+b)$ — линейная и возрастающая.

Пример 8. Пусть Ω — трапеция с вершинами A, B, C, D, с основаниями $a+b$, b, углы при стороне $a+b$ равны $90°$ и $60°$. И пусть максимальный вписанный круг касается только одной из параллельных сторон трапеции (см. рис. 16).

Найдем радиус максимального вписанного круга $\rho(\Omega)$. Пусть (x_1, y_1) - точка касания окружности и стороны BC трапеции, (ρ, ρ) - центр окружности.
Запишем уравнение окружности, вписанной в данную область

$$(x_1-\rho)^2 + (y_1-\rho)^2 = \rho^2. \tag{36}$$

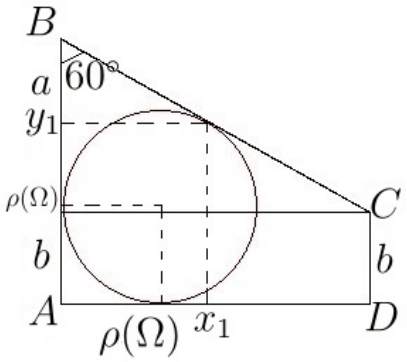


Рис. 16:

Найдем точку касания (x_1, y_1)

$$y_1 = a + b - (a + b - \rho)\sin(\pi/6) = \frac{a + b + \rho}{2}$$

$$x_1 = (a + b - \rho)\sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}(a + b - \rho)}{2}$$

Подставим найденную точку в уравнение окружности (36)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a + b - \rho) - \rho\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(a + b - \rho)\right)^2 = \rho^2$$

Раскроем скобки и упростим выражение

$$\frac{3}{4}(a + b - \rho)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{2}(a + b - \rho)\rho + \rho^2 + \frac{1}{4}(a + b - \rho)^2 = \rho^2$$

$$(a + b - \rho)\left(a + b - \rho - \sqrt{3}\rho\right) = 0$$

$$\rho_1 = \frac{a + b}{\sqrt{3} + 1}, \rho_2 = a + b.$$

Второе решение ρ_2 не лежит внутри трапеции, поэтому не является радиусом максимального вписанного круга. Следовательно,

$$\rho(\Omega) = \rho_1 = \frac{a + b}{1 + \sqrt{3}}.$$

В случае когда окружность касается лишь одной из параллельных сторон с некоторого значения t, где $0 < t < \rho(\Omega)$, трапеция перейдет в треугольник. А при $t = \rho(\Omega)$ треугольник перейдет в точку, поэтому $\mathrm{l}(\rho(\Omega)) = 0$ (см. рис. 17).

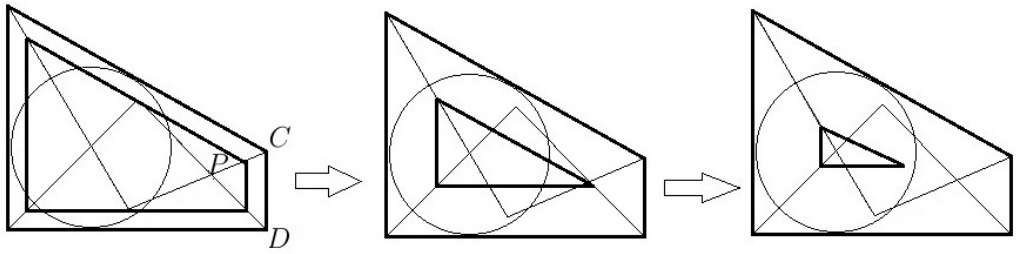


Рис. 17:

Найдем значение t, при котором трапеция переходит в треугольник.

Проведем биссектрисы углов при основании CD. Они пересекутся в некоторой точке P. При $t = \rho(P, CD) = p$ получим граничный треугольник.

$$p = \sin(\pi/3)PC = \frac{\sin(\pi/4)\sin(\pi/3)}{\sin(15\pi/36)}b = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}b = \frac{\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}}.$$

Посчитаем площадь множества уровня трапеции $a_1(t)$

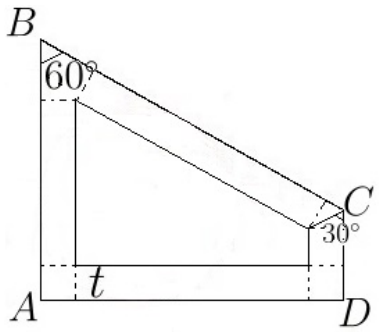


Рис. 18:

$$a_1(t) = \left(\sqrt{3}a - 2t\right)\left(b - t - \frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}a - 2t\right)\left(a + b - t - \sqrt{3}t - \left(b - t - \frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3}a - 2t\right)\left(\frac{a}{2} + b - t - \frac{2t}{\sqrt{3}}\right). \qquad (37)$$

При $t = 0$ в (37) должны получить площадь граничной трапеции, а при $t = p = \sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})$ — площадь граничного треугольника.

Действительно, $a_1(0) = \sqrt{3}a\left(\frac{a}{2} + b\right)$ — площадь трапеции $A(\Omega)$.

$$a_1\left(\frac{\sqrt{3}b}{a+b}\right) = \frac{\sqrt{3}\left(a + \sqrt{3}a - 2b\right)^2}{2\left(1+\sqrt{3}\right)^2}.$$

Вычислим площадь граничного треугольника

$$A(\triangle) = \frac{1}{2}\left(a + b - \frac{\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}} - \frac{3b}{1+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}a - \frac{2\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}(a+\sqrt{3}a-2b)^2}{2(1+\sqrt{3})^2}.$$

Получаем $a_1\left(\sqrt{3}b/(a+b)\right)$ — площадь граничного треугольника.

Найдем площадь множества уровня треугольника $a_2(t)$, для этого продолжим трапецию до треугольника

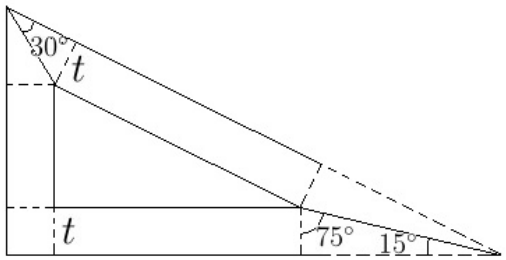


Рис. 19:

$$a_2(t) = \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{3}t-t\right)\left(\sqrt{3}(a+b)-t-\frac{(1+\sqrt{3})t}{\sqrt{3}-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a+b-(\sqrt{3}+1)t\right)\left(\sqrt{3}(a+b)-\frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-1}\right). \qquad (38)$$

Площадь множества уровня $a_2(0) = \dfrac{\sqrt{3}(a+\sqrt{3}a-2b)^2}{2(1+\sqrt{3})^2}$ - площадь исходного треугольника. Площадь $a_2\left(\rho(\Omega)-\dfrac{\sqrt{3}b}{1+\sqrt{3}}\right)=0$.

Теперь посчитаем евклидовый момент порядка α

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \alpha\int\limits_0^{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})} t^{\alpha-1}a_1(t)\mathrm{dt} + \alpha\int\limits_{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})}^{(a+b)/(1+\sqrt{3})} t^{\alpha-1}a_2(t)\mathrm{dt}.$$

Обозначим первый интеграл за I_1, второй - I_2.

$$\mathrm{I}_1 = \alpha\int\limits_0^{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})} (\sqrt{3}a-2t)t^{\alpha-1}\left(\frac{a}{2}+b-t-\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)\mathrm{dt} =$$

$$= \alpha\int\limits_0^{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})} t^{\alpha-1}\left(\frac{\sqrt{3}a^2+2\sqrt{3}ab}{2}-\left(\sqrt{3}a+3a+2b\right)t+\left(2+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)t^2\right)\mathrm{dt} =$$

$$= \alpha\left(\frac{\left(\sqrt{3}a^2+2\sqrt{3}ab\right)t^\alpha}{2\alpha}-\frac{\left(\sqrt{3}a+3a-2b\right)t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{2(\sqrt{3}+2)t^{\alpha+2}}{\sqrt{3}(\alpha+1)}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}b)^{\alpha}}{(1+\alpha)(2+\alpha)\left(1+\sqrt{3}\right)^{\alpha+2}}\left(2b^2\alpha(-3+\sqrt{3}\alpha) - 2ab(a+\alpha)\left(-3-2\sqrt{3}+\left(3+\sqrt{3}\right)\alpha\right)\right) +$$

$$+\frac{\left(\sqrt{3}b\right)^{\alpha}\left(3+2\sqrt{3}\right)a^2}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{\alpha+2}}.$$

$$\mathrm{I}_2 = \alpha\int\limits_{\sqrt{3}b/(1+\sqrt{3})}^{(a+b)/(1+\sqrt{3})} t^{\alpha-1}\frac{1}{2}\left(a+b-(\sqrt{3}+1)t\right)\left(\sqrt{3}(a+b)-\frac{2\sqrt{3}t}{\sqrt{3}-1}\right)\mathrm{dt} =$$

$$= \frac{2ab\left(a\left(3+\sqrt{3}\right)(a+b)^{\alpha}+\left(\sqrt{3}b\right)^{\alpha}(2+\alpha)\left(-3-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\alpha\right)\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^{\alpha+2}} -$$

$$-\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)a^2(-2(a+b)^{\alpha}+(\sqrt{3}b)^{\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2))}{(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\sqrt{3}-1\right)}+$$

$$+\frac{2b^2\left(\left(3+\sqrt{3}\right)(a+b)^{\alpha}+\left(\sqrt{3}b\right)^{\alpha}\right)\left(-3-\sqrt{3}+3\left(-1+\sqrt{3}\right)\alpha+\left(-3+\sqrt{3}\right)\alpha^2\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\sqrt{3}-1\right)}.$$

Так как, $l(\rho(\Omega)) = 0$, то $g(\alpha) = \mathrm{F}_{\Omega}(\alpha)$

$$\mathrm{F}_{\Omega}(\alpha) = g(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\left(\sqrt{3}+1\right)^{\alpha+1}}{\left(\sqrt{3}b\right)^{\alpha+1}}(\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2) =$$

$$= -\frac{(3+\sqrt{3})(3^{\alpha/2}b^{\alpha+2}-a^2(a+b)^{\alpha}-2ab(a+b)^{\alpha}-b^2(a+b)^{\alpha})}{(\sqrt{3}b)^{\alpha}}.$$

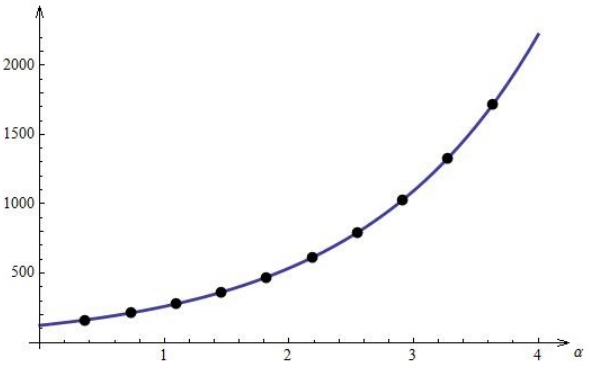


Рис. 20: График функции $\mathrm{F}_{\Omega}(\alpha)$ при фиксированных a и b

Итак, получили, что $\mathrm{F}_{\Omega}(\alpha)$ и $g(\alpha)$ возрастают с увеличением α.

Пример 9. Пусть Ω — параллелограмм $ABCD$. Пусть их стороны равны a, b, $b > a$, а угол между ними обозначим β (см. рис. 21).

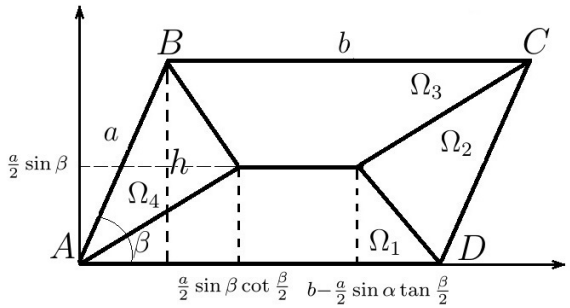


Рис. 21:

По определению вычислим функцию расстояния $\rho(z, \Omega)$. Для этого разобьем параллелограмм эквидистантами на подобласти (см.рис. 21).

Для любой точки $z \in \Omega_1$ минимальным расстоянием будет перпендикуляр, опущенный из точки z на основание AD.

Вычислим функцию $\rho(z, \Omega)$ области Ω_2. Найдем расстояние от точки $z \in \Omega_2$ до прямой CD, которая задана уравнением

$$y = \tan\beta(x - b)$$

или по-другому

$$\sin\beta x - \cos\beta y - \sin\beta = 0.$$

Применяя формулу из аналитической геометрии, получим

$$\rho(z, \Omega) = \frac{|\sin\beta x - \cos\beta y - b|}{\sqrt{(\sin\beta)^2 + (-\cos\beta)^2}} = |\sin\beta x - \cos\beta y - b|, z \in \Omega_2.$$

Высота параллелограмма h равна $a\sin\beta$. Для области Ω_3 функция расстояния

$$\rho(z, \Omega) = h - y = a\sin\beta - y, z \in \Omega_3.$$

Для области Ω_4 функция расстояния $\rho(z, \Omega)$ — это перпендикуляр опущенный из точки z на прямую AB. Запишем нормальное уравнение прямой AB

$$\sin\beta x - \cos\beta y = 0.$$

Тогда расстояние от точки z до прямой AB

$$\rho(z, \Omega) = |\sin\beta x - \cos\beta y|, z \in \Omega_4.$$

Таким образом, функция расстояния определится следующим образом

$$\rho(z, \Omega) = \begin{cases} y, z \in \Omega_1; \\ |\sin\beta x - \cos\beta y - b|, z \in \Omega_2; \\ a\sin\beta - y, z \in \Omega_3; \\ |\sin\beta x - \cos\beta y|, z \in \Omega_4. \end{cases}$$

Используя аддитивность интеграла вычислим евклидовый момент порядка α, пусть $\alpha > 0$ - четные целые числа.

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = \mathrm{I}_\alpha(\Omega_1) + \mathrm{I}_\alpha(\Omega_2) + \mathrm{I}_\alpha(\Omega_3) + \mathrm{I}_\alpha(\Omega_4).$$

Достаточно посчитать относительно Ω_1 и Ω_4.

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega_1) = \mathrm{I}_\alpha(\Omega_3) = \int\limits_0^{\frac{a}{2}\sin\beta\cot\frac{\beta}{2}} \int\limits_0^{\tan\frac{\beta}{2}x} y^\alpha \mathrm{dydx} + \int\limits_{\frac{a}{2}\sin\beta\cot\frac{\beta}{2}}^{b-\frac{a}{2}\sin\alpha\tan\frac{\beta}{2}} \int\limits_0^{\frac{a}{2}\sin\beta} y^\alpha \mathrm{dydx} + \int\limits_{b-\frac{a}{2}\sin\beta\tan\frac{\beta}{2}}^{b} \int\limits_0^{(b-x)\cot\frac{\beta}{2}} y^\alpha \mathrm{dxdy} =$$

$$= \frac{\tan(\beta/2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int\limits_0^{\frac{a}{2}\sin\beta\cot\frac{\beta}{2}} x^{\alpha+1}\mathrm{dx} + \frac{(a\sin\beta)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} \int\limits_{\frac{a}{2}\sin\beta\cot\frac{\beta}{2}}^{b-\frac{a}{2}\sin\beta\tan\frac{\beta}{2}} \mathrm{dx} + \frac{\cot(\beta/2)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \int\limits_{b-\frac{a}{2}\sin\beta\tan\frac{\beta}{2}}^{b} (b-x)^{\alpha+1}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{a^{\alpha+2}\csc(\beta/2)^2\sin\beta^{\alpha+3}}{2^{\alpha+3}(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{(b-a)(a\sin\beta)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)} + \frac{a\sin(\beta/2)^2(a\sin\beta)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)} =$$

$$= \frac{a\sin\beta\,(a^{\alpha+1}(1+\cos\beta)\sin\beta^\alpha - (2b(2+\alpha) + a(3+2\alpha) + a\cos\beta)(a\sin\beta)^\alpha)}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Теперь вычислим евклидовый момент относительно четвертой области.

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega_4) = \int\limits_0^{a\cos\beta} \int\limits_{\tan(\beta/2)x}^{\tan\beta x} |\sin\beta x - \cos\beta y|^\alpha \mathrm{dxdy} + \int\limits_{a\cos\beta}^{\frac{a}{2}\sin\beta\cot(\beta/2)} \int\limits_{\tan(\beta/2)x}^{\frac{\frac{-a}{2}\sin\beta(x-a\cos\beta)}{\frac{a}{2}\sin\beta\cot(\beta/2)-a\cos\beta}+a\sin\beta} |\sin\beta x - \cos\beta y|^\alpha \mathrm{dxdy} =$$

$$= \int\limits_0^{a\cos\beta} \frac{x(x\tan(\beta/2))^\alpha\tan\beta - (x\tan(\beta/2))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathrm{dx} +$$

$$+ \int\limits_{a\cos\beta}^{\frac{a}{2}\sin\beta\cot(\beta/2)} \frac{\cot(\beta/2)((x-a\cos\beta)\cot(\beta/2))^\alpha(a - x\sec\beta) + \sec\beta(x\tan(\beta/2))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{a(a\cos\beta\tan(\beta/2))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} +$$

$$+ \frac{\sec\beta\tan(\beta/2)\,(a^2(a\sin\beta)^\alpha + 2a^2\cos\beta(a\sin\beta)^\alpha - 2^{\alpha+1}a^2(a\cos\beta\tan(\beta/2))^\alpha)}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)} +$$

$$+ \frac{\sec\beta\tan(\beta/2)(a^2\cos2\beta((a\sin\beta)^\alpha - 2^{\alpha+1}(a\cos\beta\tan(\beta/2))^\alpha))}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)} = \frac{a(a\sin\beta)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Таким образом, $\mathrm{I}_\alpha(\Omega_4) = \mathrm{I}_\alpha(\Omega_2) = \dfrac{a(a\sin\beta)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}$.

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega) = 2\mathrm{I}_\alpha(\Omega_1) + 2\mathrm{I}_\alpha(\Omega_4) = \frac{a^{\alpha+1}\sin\alpha(\sin\beta)^{\alpha+1}(2a\cos\beta - 2a\alpha + 4b - \alpha)}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Максимальный радиус вписанного круга $\rho(\Omega) = \dfrac{a}{2}\sin\beta$, и

$$l(\rho(\Omega)) = 2\left(b - \frac{a}{2}\sin\beta\cot\frac{\beta}{2} - \frac{a}{2}\sin\beta\tan\frac{\beta}{2}\right) = 2(b-a).$$

Подставим найденные значения функционалов в формулу (34), вычислим функцию $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}}\left[\mathrm{I}_\alpha(\Omega) - \frac{\mathrm{l}(\rho(\Omega))\rho(\Omega)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = 4a.$$

Таким образом, в данном случае $F_\Omega(\alpha)$ — это длина границы ромба со стороной равной a.

Пример 10. Пусть Ω — равнобокая трапеция $ABCD$ с основанием равным a, высотой h и углом при основании β.

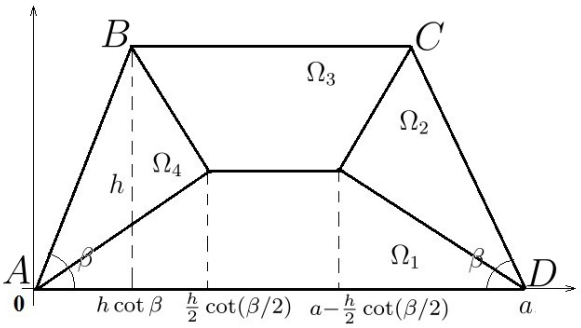


Рис. 22:

Найдем значение функции расстояния в каждой из подобластей.

Для области Ω_1 функция расстояния — это перпендикуляр, опущенный на основание трапеции AD.

Найдем расстояние от точки $z \in \Omega_2$ до прямой CD. Координаты вершин трапеции C и D соответственно равны $(a, 0)$, $(a - h\cot\beta, h)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(a, 0)$ параллельно вектору с координатами $\{\cot\beta, -1\}$

$$\sin\beta x + \cos\beta y - \sin\beta a = 0.$$

Тогда, по формуле из аналитической геометрии функция расстояния равна

$$\rho(z, \Omega) = |\sin\beta x + \cos\beta y - \sin\beta a|, z \in \Omega_2.$$

Для Ω_3 функция расстояния $\rho(z, \Omega) = h - y$.

Найдем значение $\rho(z, \Omega)$ относительно Ω_4. Уравнение прямой AB имеет вид

$$\sin\beta x - \cos\beta = 0.$$

Отсюда функция $\rho(z, \Omega)$ равна

$$\rho(z, \Omega) = |\sin\beta x - \cos\beta y|, z \in \Omega_4.$$

Таким образом, получаем

$$\rho(z,\Omega)=\begin{cases} y, z\in\Omega_1;\\ |\sin\beta x+\cos\beta y-\sin\beta a|, z\in\Omega_2;\\ h-y, z\in\Omega_3;\\ |\sin\beta x-\cos\beta y|, z\in\Omega_4. \end{cases}$$

Пусть $\alpha>0$ — целые четные числа. Вычислим евклидовый момент порядка 1

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega_1)=\int\limits_0^{\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}\int\limits_0^{\frac{\beta}{2}x}y^\alpha\mathrm{dydx}+\int\limits_{\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}^{a-\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}\int\limits_0^{\frac{h}{2}}y^\alpha\mathrm{dydx}+\int\limits_{a-\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}^{a}\int\limits_0^{(a-x)\tan\frac{\beta}{2}}y^\alpha\mathrm{dxdy}=$$

$$=\frac{(\tan(\beta/2))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)}\int\limits_0^{\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}x^{\alpha+1}\mathrm{dx}+\frac{h^{\alpha+1}(a-h\cot(\beta/2))}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}+\frac{1}{\alpha+1}\int\limits_{a-\frac{h}{2}\cot\frac{\beta}{2}}^{a}(a-x\tan(\beta/2))^{\alpha+1}\,\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{h^{\alpha+1}(a(\alpha+2)-h(\alpha+1)\cot(\beta/2))}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Посчитаем евклидовый момент порядка α области Ω_3

$$\mathrm{I}_3(\Omega_3)=\int\limits_{h\cot\beta}^{\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}\int\limits_{\frac{x-h\cot\beta}{-\tan(\beta/2)}+h}^{h}(h-y)^\alpha\mathrm{dxdy}+\int\limits_{\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}^{a-\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}\int\limits_{h/2}^{h}(h-y)^\alpha\mathrm{dxdy}+\int\limits_{a-\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}^{a-h\cot\beta}\int\limits_{\frac{x-a+h\cot\beta}{\tan(\beta/2)}+h}^{h}(h-y)^\alpha\mathrm{dxdy}=$$

$$=\frac{(\cot(\beta/2))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int\limits_{h\cot\beta}^{\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}(x-h\cot\beta)^{\alpha+1}\mathrm{d}x+\frac{h^{\alpha+1}(a-h\cot(\beta/2))}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}+$$

$$+\frac{(\cot(\beta/2))^{\alpha+1}}{\alpha+1}\int\limits_{a-\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}^{a-h\cot\beta}(a-x-h\cot\beta)^{\alpha+1}\mathrm{d}x=\frac{h^{\alpha+1}(-a(2+\alpha)+h(\alpha+3)\cot\beta+h(\alpha+1)\csc\beta)}{2^{\alpha+2}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Теперь вычислим евклидовый момент порядка α четвертой области

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega_4)=\mathrm{I}(\Omega_2)=\int\limits_0^{h\cot\beta}\int\limits_{\tan(\beta/2)x}^{\tan\beta x}|\sin\beta x-\cos\beta y|^\alpha\mathrm{dxdy}+\int\limits_{h\cot\beta}^{\frac{h}{2}\cot(\beta/2)}\int\limits_{\tan(\beta/2)x}^{\frac{(x-h\cot\beta)}{-\tan(\beta/2)}+h}|\sin\beta x-\cos\beta y|^\alpha\mathrm{dxdy}=$$

$$=\frac{h^{\alpha+1}\csc\beta}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Таким образом, получаем

$$\mathrm{I}_\alpha(\Omega)=\mathrm{I}_\alpha(\Omega_1)+\mathrm{I}_\alpha(\Omega_3)+2\mathrm{I}_\alpha(\Omega_4)=\frac{h^{\alpha+1}(a(\alpha+2)\sin\beta-h\alpha-h(\alpha+2)\cos\beta)}{2^\alpha\sin\beta(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Максимальный радиус вписанного круга $\rho(\Omega) = \dfrac{h}{2}$ и

$$l(\rho(\Omega)) = 2\left(a - h\cot\frac{\beta}{2}\right).$$

Подставив найденные выражения функционалов в формулу (34), получим значение функции $\mathrm{F}_\Omega(\alpha)$

$$\mathrm{F}_\Omega(\alpha) := \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\rho(\Omega)^{\alpha+1}}\left[\mathrm{I}_\alpha(\Omega) - \frac{\mathrm{l}(\rho(\Omega))\rho(\Omega)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = \frac{4h}{\sin\beta}.$$

Таким образом, рассмотренные примеры подтверждают гипотезу.

Рассмотрим один частный случай, пусть $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$. Если $g(\alpha)$ возрастает, то $g(0) \le g(2)$ или

$$2\frac{\mathrm{A}(\Omega)}{\rho(\Omega)} \le 12\frac{\mathrm{I}_2(\Omega)}{\rho(\Omega)^2}.$$

Т.е. получаем неравенство

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \ge \frac{\mathrm{A}(\Omega)\rho(\Omega)^2}{6}.$$

А это доказанное выше неравенство (16).

7 Заключение

В дипломной работе получены следующие неравенства в классе выпуклых областей:

- двусторонние оценки для евклидового момента инерции через площадь области

$$\frac{1}{6}\rho(\Omega)^2\mathrm{A}(\Omega) \le \mathrm{I}_2(\Omega) \le \frac{1}{3}\rho(\Omega)^2\mathrm{A}(\Omega),$$

  равенство в левом неравенстве достигается для любых описанных около окружности многоугольников. Постоянная в правом неравенстве также лучшее из возможных, так как для области типа Боннезена $\mathrm{I}_2(\Omega) \sim \frac{1}{3}\rho(\Omega)^2\mathrm{A}(\Omega)$, $\rho(\Omega) \to 0$. Левое неравенство является аналогом неравенства Г. Полиа—Г. Сегё, а правое – аналогом неравенства Е. Макаи.

- оценка евклидового момента инерции через момент порядка 1:

$$\frac{1}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega) < \mathrm{I}_2(\Omega) \le \frac{2}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega),$$

  причем постоянная в правом неравенстве наилучшая и достигается для вырожденных областей, в частности для "иглы".

  Как следствие получена следующая оценка для жесткости кручения

$$\mathrm{P}(\Omega) \le \frac{8}{3}\rho(\Omega)\mathrm{I}_1(\Omega),$$

  справедливая для любой выпуклой области и известно, что равенство достигается для узкого прямоугольника.

- оценка евклидового момента инерции через момент инерции порядка α:

$$\mathrm{I}_2(\Omega) \le \frac{4\rho(\Omega)^{2-\alpha}}{\alpha(3-\alpha)(4-\alpha)}\mathrm{I}_\alpha(\Omega),$$

  равенство, в котором имеет место также для вырожденных областей.

  В качестве следствия, при некоторых предположениях, получено неравенство для жесткости кручения через евклидовый момент порядка α

$$\mathrm{P}(\Omega) \le \frac{16\rho(\Omega)^{2-\alpha}}{\alpha(3-\alpha)(4-\alpha)}\mathrm{I}_\alpha(\Omega),$$

  где $0 < \alpha \le 1$.

Список литературы

[1] Р. Г. Салахудинов. Введение в геометрическую теорию изопериметрических неравенств, I. — Казань, 2013. —100 с.

[2] Р. Г. Салахудинов. Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области. — Известия вузов. Математика. — 2013:8, с. 66-79.

[3] Г. Полиа и Г. Сегё. Изопериметрические неравенства в математической физике. — М., Физматгиз, 1962. — 336 с.

[4] Ф. Г. Авхадиев. Решение обобщенной задачи Сен-Венана. — Матем. сб. —1998, 189:12. с. 3-12.

[5] E. Makai. On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Regidity of a Beam. — Stanford University Press. — 1962. — pp. 227-231.

[6] R. G. Salakhudinov. Refined inequalities for euclidean moments of a domain with respect to its doundary. — Siam J. Math. Anal. Vol.44, No. 4. — 2012. — pp. 2949-2961.

[7] C. Bandle. Isoperimetric inequalities and applications. — Pitman, Boston, 1980. — 228 p.