ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.752

В.А. МИРЗОЯН

ПОДМНОГООБРАЗИЯ С ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМИ ФОРМАМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА КАК ОГИБАЮЩИЕ

Подмногообразие M в пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ называется полусимметрическим, если его вторая фундаментальная форма (ф. ф.) α_2 удовлетворяет условию $\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y\alpha_2 = \overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X\alpha_2$, где $\overline{\nabla}$ обозначает связность Ван дер Вардена-Бортолотти [1]. Если для связности $\overline{\nabla}$ ввести оператор кривизны $\overline{R}(X,Y) = [\overline{\nabla}_X, \overline{\nabla}_Y]$, то данное условие, которое также называется условием полупараллельности α_2, можно записать в виде $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_2 = 0$.

Одну из важнейших геометрических характеристик полусимметрических подмногообразий дает

Теорема 1 ([2]). *Подмногообразие M в $M_n(c)$ является полусимметрическим тогда и только тогда, когда оно является огибающим второго порядка семейства симметрических* (*по Д. Ферусу* [3]) *подмногообразий.*

Симметрические подмногообразия аналитически характеризуются условием параллельности второй ф. ф. α_2, т. е. $\overline{\nabla}\alpha_2 = 0$ [3].

Полное освещение результатов о полусимметрических подмногообразиях и подробная библиография даны в обзорной статье Ю.Г. Лумисте [4] (см. также [5]–[8]).

Приведенную выше теорему 1 можно обобщать и развивать в направлениях усиления или ослабления закона огибания. Одна из возможностей в первом направлении была рассмотрена автором в [9], где доказана

Теорема 2 ([9]). *Пусть m-мерное подмногообразие M класса C^∞ в евклидовом пространстве E_n имеет симметрические ф. ф. $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{s-1}$ $(s \geq 4)$. Тогда ф. ф. α_s будет симметрической в том и только том случае, если M является огибающим $(s-2)$-го порядка семейства m-мерных подмногообразий, каждое из которых обладает следующими свойствами: все его ф. ф. до $(s-2)$-го порядка включительно являются симметрическими, а ф. ф. $\widetilde{\alpha}_{s-2}$, кроме того, параллельна, т. е. $\overline{\nabla}\widetilde{\alpha}_{s-2} = 0$.*

Как теорема 1, так и теорема 2 являются частными проявлениями общего принципа, который сформулируем в следующем утверждении.

Теорема 3. *m-мерное подмногообразие M класса C^∞ в евклидовом пространстве E_n имеет полупараллельные ф. ф. α_{s-1} и α_s (при $s = 2$ только полупараллельную вторую ф. ф. α_2) тогда и только тогда, когда оно является огибающим s-го порядка семейства m-мерных подмногообразий, каждое из которых имеет параллельную ф. ф. порядка s.*

Полупараллельность α_r означает, что $\overline{R}(X,Y)\cdot\alpha_r = 0$.

Доказательство теоремы 3 проводится с помощью метода подвижного репера Картана и теории вполне интегрируемых дифференциальных систем Фробениуса–Картана. Идейная сторона доказательства такая же, как в [2] и [9].

Статья написана при финансовой поддержке А/О “Прометей”.

Литература

1. Lumiste Ü. *Decomposition and classification theorems for semi-symmetric immersions* // Изв. АН Эст. ССР. – Сер. физ.-матем. н. – 1987. – Т. 36. – № 4. – С. 414–417.
2. Lumiste Ü. *Semi-symmetric submanifolds as the second-order envelope of symmetric submanifolds* // Изв. АН Эст. ССР. – Сер. физ.-матем. н. – 1990. – Т. 39. – № 1. – С. 1–8.
3. Ferus D. *Symmetric submanifolds of euclidean space* // Math. Ann. – 1980. – Bd. 247. – № 1. – S. 81–93.
4. Лумисте Ю.Г. *Полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 3–28.
5. Мирзоян В.А. Ric-*полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – С. 29–66.
6. Dillen F., Nölker S. *Semi-parallelity, multi-rotation, surfaces and the helix-property* // J. reine und angew. Math. – 1993. – Bd. 435. – S. 33–63.
7. Lumiste Ü. *Modified Nomizu problem for semi-parallel submanifolds* // Geom. Topol. of submanifolds. – 1995. – V. 7. – P. 176–181.
8. Lumiste Ü. *Symmetric orbits of orthogonal Veronese actions and their second-order envelopes* // Results Math. – 1995. – V. 27. – P. 284–301.
9. Мирзоян В.А. *Подмногообразия с симметрическими фундаментальными формами высшего порядка как огибающие* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 9. – С. 35–40.
10. Кобаяси Ш., Номидзу К. *основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.

Государственный инженерный
университет Армении

Поступила
08.04.1996