И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.982

А.В. АБАНИН

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ТИПА БЕРЛИНГА

1. Постановка задачи и основной результат. В работах [1], [2] была разработана модификация известного подхода Берлинга–Бьорка [3], [4] к определению и изучению неквазианалитических классов функций. Именно, рассматривались непрерывные неубывающие на $[0,\infty)$ функции $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$(\alpha)\ \ \omega(2t) \le K(\omega(t)+1)\ \text{ на }\ [0,\infty), \qquad (\beta)\ \ \int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt < \infty,$$
$$(\gamma)\ \ \ln t = o(\omega(t))\ \text{ при }\ t\to\infty, \qquad (\delta)\ \ \varphi_\omega(x)=\omega(e^x)\ \text{ выпукла на }\ [0,\infty).$$

Такие ω называются *весовыми функциями* или просто *весами*. С каждым весом ω связывается пространство

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) := \{f\in C^\infty(\mathbb{R}^N)\,|\,\forall p\in\mathbb{N}\ \ \|f\|_p^{(\omega)} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N}\ \sup_{|x|\le p} |f^{(\alpha)}(x)|\,e^{-p\varphi_\omega^*(|\alpha|/p)} < \infty\},$$

наделенное топологией, задаваемой набором преднорм $(\|\cdot\|_p^{(\omega)})_{p\in\mathbb{N}}$. Здесь $f^{(\alpha)}$ — производная f, соответствующая мультииндексу $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$; $|\alpha| := \alpha_1+\dots+\alpha_N$; $|x| := |x_1|+\dots+|x_N|$ для $x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$; $\varphi_\omega^*(s) := \sup\{ts-\varphi_\omega(t) : t\ge 0\}$ — функция, сопряженная с φ_ω по Юнгу. $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ называется пространством ω-ультрадифференцируемых функций типа Берлинга и является ядерным пространством Фреше ([2], предложение 4.9).

Будем говорить, что два веса ω и σ *эквивалентны* ($\omega\sim\sigma$), если одновременно $\omega(t)=O(\sigma(t))$ и $\sigma(t)=O(\omega(t))$ при $t\to\infty$. Другими словами, $\omega\sim\sigma$, если имеется такое $C\ge 1$, что

$$\frac{1}{C}\,\omega(t)-C \le \sigma(t) \le C\omega(t)+C\ \ \forall t\in[0,\infty). \tag{1}$$

Выполнение (1) при всех $y\ge 0$ влечет

$$C\varphi_\omega^*\Big(\frac{y}{C}\Big)-C \le \varphi_\sigma^*(y) \le \frac{1}{C}\,\varphi_\omega^*(Cy)+C.$$

Поэтому, как нетрудно видеть, для эквивалентных весов ω и σ пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N)$ совпадают как множества и топологически (впрочем, в данном случае из первого следует второе). Из теоремы 1.3.18 работы [4] следует, что если ω и σ — полуаддитивные сверху весовые функции, то верно и обратное, т.е. равенство $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)=\mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N)$ влечет эквивалентность ω и σ. Использовав тот же метод, что и в [4], основанный на теореме Банаха об открытом отображении, У. Франкен доказал этот факт для произвольных весовых функций (результат не был опубликован, о нем сообщил автору проф. Р. Майзе). В данной работе будет доказана более сильная

Теорема. *Пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ и $\mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N)$ топологически изоморфны тогда и только тогда, когда весовые функции ω и σ эквивалентны.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 02-01-00372).

Из этой теоремы следует, что среди пространств ультрадифференцируемых функций типа Берлинга, изоморфных друг другу топологически, нет других, кроме совпадающих поэлементно. Отметим, что в данной работе применяется иной, чем в [4], метод, основанный на использовании диаметральных размерностей локально выпуклых пространств.

2. Оценки поперечников. Всюду далее ω — фиксированный вес. Для доказательства основного результата будет достаточно в этом разделе рассмотреть одномерный случай, т. е. пространство $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Помимо этого технического упрощения, будем считать, что $\omega|_{[0,1]} = 0$, не ограничивая общности рассуждений. Действительно, функция $\widetilde{\omega}(x) := (\omega(x) - \omega(1))^+$ является весовой, совпадает с $\omega(x)-\omega(1)$ при $x \geq 1$ и равна 0 на $[0,1]$. В силу вышеизложенного $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{E}_{(\widetilde{\omega})}(\mathbb{R}^N)$ при любом $N \geq 1$. Из этого дополнительного ограничения на ω следует $\varphi_\omega^*(0) = 0$, а значит, и полуаддитивность снизу функции φ_ω^* на $[0,\infty)$:

$$\varphi_\omega^*(x) + \varphi_\omega^*(y) \leq \varphi_\omega^*(x+y) \quad \forall x, y \in [0,\infty). \tag{2}$$

Фундаментальную систему замкнутых абсолютно выпуклых окрестностей нуля пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ образуют множества $U_p^{(\omega)} := \{f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}) \mid \|f\|_p^{(\omega)} \leq 1\}$. Величина

$$d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) := \inf_{L \in \mathcal{L}_s} \inf \{\delta > 0 \mid U_q^{(\omega)} \subset \delta U_p^{(\omega)} + L\},$$

где $q \geq p$, $s \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{L}_s$ — совокупность всех s-мерных подпространств в $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$, называется *$s$-поперечником $U_q^{(\omega)}$ относительно $U_p^{(\omega)}$* (по Колмогорову). Цель данного раздела — дать двусторонние оценки $d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)})$.

а) *Оценка $d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)})$ сверху.* Возьмем функцию $\eta \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ с $\operatorname{supp} \eta \subset [-2,2]$ и $\eta(x) \equiv 1$ на $[-1,1]$. Положим $\eta_p(x) = \eta\left(\frac{x}{p}\right)$. Ясно, что $\eta_p(x) \equiv 1$ на $[-p,p]$ и $\eta_p(x) \equiv 0$ для $x \notin (-2p, 2p)$.

Зафиксируем произвольное $q \geq 2p$. Для любых $j \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$|\eta_p^{(j)}(x)| = \frac{1}{p^j}\left|\eta^{(j)}\left(\frac{x}{p}\right)\right| \leq \frac{1}{p^j} \max_{x \in [-2,2]} |\eta^{(j)}(x)| \leq \|\eta\|_q^{(\omega)} e^{q\varphi_\omega^*(j/q)}. \tag{3}$$

Заметим, что правая часть этой оценки не зависит от p.

Пусть $f \in U_q^{(\omega)}$. Тогда для всех $j \in \mathbb{N}_0$ и $|x| \leq q$

$$|f^{(j)}(x)| \leq e^{q\varphi_\omega^*(j/q)}. \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $g = f\eta_p$. Так как $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ — алгебра относительно операции поточечного умножения ([2], предложение 4.4), то $g \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Из (2)–(4) для всех $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq q$, имеем

$$|g^{(j)}(x)| = \left|\sum_{k=0}^{j} C_k^j \eta_p^{(k)}(x) f^{(j-k)}(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{j} C_k^j \|\eta\|_q^{(\omega)} e^{q\varphi_\omega^*(\frac{k}{q})} e^{q\varphi_\omega^*(\frac{j-k}{q})} \leq$$

$$\leq \|\eta\|_q^{(\omega)} \sum_{k=0}^{j} C_k^j e^{q\varphi_\omega^*(j/q)} = \|\eta\|_q^{(\omega)} 2^j e^{q\varphi_\omega^*(j/q)}. \tag{5}$$

Так как $g^{(j)}(-q) = g^{(j)}(q) = 0$ для всех $j \in \mathbb{N}_0$, то при $|x| \leq q$

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nx/q}, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2q}\int_{-q}^{q} g(x) e^{-i\pi nx/q} dx, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Поскольку для $n \neq 0$ при любом $j \in \mathbb{N}_0$

$$c_n = \frac{1}{2q}\int_{-q}^{q} g^{(j)}(x) \left(i\frac{\pi n}{q}\right)^{-j} e^{-i\pi nx/q} dx,$$

то, использовав (5), при всех $n \neq 0$ и $j \in \mathbb{N}_0$ получим

$$|c_n| \le \frac{1}{2q}\int_{-q}^{q} |g^{(j)}(x)| \left(\frac{\pi n}{q}\right)^{-j} dx \le \|\eta\|_q^{(\omega)} e^{q\varphi_\omega^*\left(\frac{j}{q}\right) - j\ln\frac{\pi n}{2q}}.$$

Отсюда следует, что для $n \neq 0$

$$|c_n| \le \|\eta\|_q^{(\omega)} \exp\inf_{j\ge 0}\left(q\varphi_\omega^*\left(\frac{j}{q}\right) - j\ln\frac{\pi n}{2q}\right) \le \|\eta\|_q^{(\omega)}\frac{\pi n}{2q}\exp\left(-q\sup_{x\ge 0}\left(x\ln\frac{\pi n}{2q} - \varphi_\omega^*(x)\right)\right) =$$

$$= \|\eta\|_q^{(\omega)}\frac{\pi n}{2q}\exp\left(-q\varphi_\omega^{**}\left(\ln\frac{\pi n}{2q}\right)\right) = C_q n e^{-q\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)}, \qquad (6)$$

где $C_q = \frac{\pi}{2q}\|\eta\|_q^{(\omega)}$ зависит лишь от q.

Рассмотрим $(2s-1)$-мерное подпространство $L = \operatorname{span}\{\exp(i\pi n x/q) : |n| < s\}$ в $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Отметим, что $\exp\lambda x$ принадлежит $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ ([2], п. 7.1). Функция $f_{2s-1}(x) = \sum\limits_{|n|<s} c_n \exp(i\pi n x/q)$ является элементом L (c_n те же, что и выше). Обозначим $h(x) = f(x) - f_{2s-1}(x)$. Если $|x| \le p$, то $g(x) = f(x)$ и

$$h(x) = g(x) - f_{2s-1}(x) = \sum_{|n|\ge s} c_n \exp(i\pi n x/q).$$

С помощью (6) для $|x| \le p$ имеем

$$|h^{(j)}(x)| \le \sum_{|n|\ge s} |c_n| \left(\frac{\pi n}{q}\right)^j \le C_q \sum_{|n|\ge s}\left(\frac{\pi n}{q}\right)^j n\exp\left(-q\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right).$$

Тогда

$$\|h\|_p^{(\omega)} = \sup_{j\ge 0} |h^{(j)}(x)| \exp\left(-p\varphi_\omega^*(j/p)\right) \le$$

$$\le C_q \sum_{|n|\ge s} n\exp\left(-q\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right)\exp\sup_{j\ge 0}\left(j\ln\frac{\pi n}{q} - p\varphi_\omega^*\left(\frac{j}{p}\right)\right) \le$$

$$\le C_q \sum_{|n|\ge s} n\exp\left(-q\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right) + p\omega\left(\frac{\pi n}{q}\right)\right) \le C_q e^{pK}\sum_{|n|\ge s} n\exp\left(\left(-q + pK\right)\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right),$$

где K — постоянная из условия (α). Если $q \ge 2pK + 1$, то

$$\|h\|_p^{(\omega)} \le C_q e^{pK}\sum_{|n|\ge s} n\exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right) - \frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right) \le 2C_q e^{pK} e^{-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi s}{2q}\right)}\sum_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right).$$

Так как ω удовлетворяет (γ), то $B_q := \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\exp\left(-\frac{1}{2}\omega\left(\frac{\pi n}{2q}\right)\right) < \infty$, и, следовательно, $\|h\|_p^{(\omega)} \le D_q \exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi s}{2q}\right)\right)$, где $D_q = 2C_q B_q \exp(q/2)$ зависит лишь от q. Поэтому $d_{2s-1}(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \le D_q \exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi s}{2q}\right)\right)$ при $q \ge 2pK + 1$. Отсюда

$$d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \le d_{2[s/2]-1}(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \le D_q \exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi\left[\frac{s}{2}\right]}{2q}\right)\right) \le D_q\exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi s}{6q}\right)\right),$$

где $[x]$ — целая часть x. Итак, при $q \ge 2pK + 1$

$$d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \le D_q\exp\left(-\frac{q}{2}\omega\left(\frac{\pi s}{6q}\right)\right). \qquad (7)$$

б) *Оценка* $d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)})$ *снизу.* В силу известного неравенства В.М. Тихомирова

$$d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \geq \sup_{L \in \mathcal{L}_s} \sup \{\delta > 0 \mid 2\delta U_p^{(\omega)} \cap L \subset U_q^{(\omega)}\}.$$

Отметим, что в правой части этого неравенства стоит половина бернштейновского $(s-1)$-поперечника $U_q^{(\omega)}$ относительно $U_p^{(\omega)}$ (по поводу поперечников см. [5], с. 204–207). Рассмотрим следующее s-мерное подпространство в $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$:

$$L = \operatorname{span}\{\exp(i\pi nx/p) : 0 \leq n \leq s-1\}.$$

Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{s-1} a_n e^{i\pi nx/p} \in 2\delta U_p^{(\omega)}$, то $|f(x)| \leq 2\delta$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $|a_n| \leq 2\delta$ при каждом $n = 0, \ldots, s-1$ и, значит,

$$\|f\|_q^{(\omega)} \leq \sum_{n=0}^{s-1} |a_n| \, \|e^{i\pi nx/p}\|_q^{(\omega)} \leq \sum_{n=0}^{s-1} |a_n| e^{q\omega(\pi n/p)} \leq 2\delta s e^{q\omega(\pi s/p)}.$$

Из этой оценки следует, что если $\delta \leq (2s)^{-1} e^{-q\omega(\pi s/p)}$, то $\|f\|_q \leq 1$. Поэтому

$$d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \geq (2s)^{-1} e^{-q\omega(\pi s/p)}. \tag{8}$$

3. Доказательство теоремы. В доказательстве нуждается лишь необходимая часть теоремы. Рассмотрим сначала одномерный случай.

С каждым пространством $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ свяжем пространство числовых последовательностей

$$\Gamma_\omega = \{(\gamma_s)_{s=1}^\infty : \gamma_s > 0 \text{ и } \forall p \; \exists q \mid \gamma_s d_s(U_q^{(\omega)}, U_p^{(\omega)}) \to 0 \text{ при } s \to \infty\}.$$

Как известно ([6], предложение 7), Γ_ω является топологическим инвариантом, т. е. если пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R})$ топологически изоморфны, то $\Gamma_\omega = \Gamma_\sigma$. Пусть $\gamma \in \Gamma_\omega$. Тогда для $p = 1$ имеется такое q, что $\gamma_s d_s(U_q^{(\omega)}, U_1^{(\omega)}) \leq 1$ для всех достаточно больших s. В силу (8) заключаем отсюда, что $\gamma_s \leq 2s e^{q\omega(\pi s)}$ для тех же s. Так как $\omega(\pi s) \leq \omega(4s) \leq K^2\omega(s) + A$ и $s \leq Be^{\omega(s)}$, где A и B не зависят от s (см. (α) и (γ)), то $\gamma_s \leq 2Be^{Aq} e^{(K^2q+1)\omega(s)}$. Итак, для каждой последовательности γ из $\Gamma_{(\omega)}$ существуют такие $C \in (0, \infty)$ и $n \in (0, \infty)$, что

$$\gamma_s \leq Ce^{n\omega(s)} \quad \text{для всех} \quad s \geq 0. \tag{9}$$

Предположим, что две весовые функции ω и σ не эквивалентны. Пусть для определенности σ растет на бесконечности быстрее ω. Тогда существует возрастающая последовательность (s_k), для которой $\sigma(s_k)/\omega(s_k) \to \infty$ при $k \to \infty$. В силу неубывания σ и условия (α) для ω можно считать s_k натуральными. Возьмем последовательность (t_k), $t_k > 0$, $t_k \to 0$ и $t_k\sigma(s_k)/\omega(s_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, и рассмотрим

$$\gamma_s = \begin{cases} 0, & s \neq s_k \; (k = 1, 2, \ldots); \\ e^{t_k \sigma(s_k)}, & s = s_k. \end{cases}$$

Из (9) следует $(\gamma_s) \notin \Gamma_\omega$. С другой стороны, $(\gamma_s) \in \Gamma_\sigma$. Действительно, заметим, что для любого $q \in \mathbb{N}$ существует такое $A \in (0, \infty)$, что

$$\sigma(s) \leq \sigma\left(2^q \frac{\pi s}{6q}\right) \leq K^q \sigma\left(\frac{\pi s}{6q}\right) + A \;\; \text{для всех} \;\; s.$$

Использовав (7) с σ вместо ω, заключаем, что для любого $p \in \mathbb{N}$ существуют $q \in \mathbb{N}$ и $D_q \in (0, \infty)$, для которых

$$\gamma_{s_k} d_{s_k}(U_q^{(\sigma)}, U_p^{(\sigma)}) \leq D_q \exp\left(t_k\sigma(s_k) - qK^{-q}\sigma(s_k)/2 + qAK^{-q}/2\right) \to 0 \;\; \text{при} \;\; k \to \infty.$$

Поэтому $(\gamma_s) \in \Gamma_\sigma$.

Итак, для неэквивалентных ω и σ соответствующие классы Γ_ω и Γ_σ не совпадают. Это доказывает теорему для $N = 1$. Случай $N > 1$ сводится к одномерному с помощью предложения 4.9 из [2], в силу которого $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ топологически изоморфно $\mathcal{E}_{(\Omega)}(\mathbb{R})$, где $\Omega(t) := \omega(t^{1/N})$. Очевидно, что эквивалентность весовых функций при замене переменной t на $t^{1/N}$ и обратно сохраняется. $\square$

Замечание. В [2] рассматривались пространства $\mathcal{E}_{(\omega)}(G)$ (G — произвольное открытое в $\mathbb{R}^N$ множество), которые вводятся аналогично $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Поскольку в силу предложения 4.9 из [2] при фиксированных ω и N все эти пространства топологически изоморфны $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$, то из доказанной теоремы следует, что если $\mathcal{E}_{(\omega)}(G_1) \simeq \mathcal{E}_{(\sigma)}(G_2)$ хотя бы для одной пары открытых в $\mathbb{R}^N$ множеств G_1 и G_2, то весовые функции ω и σ эквивалентны.

Автор признателен участникам семинара по анализу университета Билькент (Анкара, Турция), вопрос которых об изоморфизме пространств типа Берлинга инициировал данную работу, и профессору Р. Майзе за сообщение о результате У. Франкена.

Литература

1. Meise R., Taylor B.A. *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type* // Ark. Mat. – 1988. – V. 26. – P. 265–287.
2. Braun R., Meise R., Taylor B.A. *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis* // Result. Math. – 1990. – V. 17. – P. 207–237.
3. Beurling A. *Quasianalyticity and general distributions* // AMS Summer Institute. Lectures 4 and 5. – Stanford, 1961.
4. Björck G. *Linear partial differential operators and generalized distributions* // Ark. Mat. – 1965. – V. 6. – P. 351–407.
5. Тихомиров В.М. *Теория приближений* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1987. – Т. 14. – С. 103–260.
6. Митягин Б.С. *Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах* // УМН. – 1961. – Т. 16. – № 4. – С. 63–132.

Ростовский государственный университет

Поступила
03.02.2003