ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 514.763.35

С.Е. СТЕПАНОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ СТРУКТУР ПОЧТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИИ С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

Перечисляя на m-мерном дифференцируемом многообразии M наиболее важные G-структуры, Ш. Кобаяси (см. [1], гл. 1, § 2) выделяет G-структуры с группой $G = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$, состоящей из блочно-диагональных матриц $A = \mathrm{diag}\{B, C\}$ с $B \in GL(n, \mathbf{R})$ и $C \in GL(m-n, \mathbf{R})$. Эти структуры находятся в естественном биективном соответствии с множеством пар $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ взаимно дополнительных n- и $(m-n)$-мерных дифференцируемых распределений на M.

Данным структурам посвящено большое количество работ, обзор которых можно найти в [2], а также отдельные главы и параграфы в монографиях [3], [4] и др. А.П. Норденом (см. [5], с. 128–129) была дана частичная классификация $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структур, в основу которой он положил понятие параллельного переноса структурных распределений $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$. В данной работе мы продолжили исследования в этом направлении, сведя проблему классификации к классической задаче элементарной теории представлений полной линейной группы о разложении тензорного произведения представлений на неприводимые компоненты. В результате наряду с известными классами $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структур (см. [5], с. 128–129) выделены новые классы, которые получили здесь же и геометрическую характеристику.

1. $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структуры на m-мерном многообразии

Пусть M — дифференцируемое многообразие размерности m и $L(M)$ — расслоение линейных реперов над M со структурной группой $GL(, \mathbf{R})$. Рассмотрим в $GL(m, \mathbf{R})$ подгруппу $G = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$, которую будем рассматривать как группу линейных преобразований векторного пространства $E = T_x M$, оставляющих инвариантными два его дополнительных подпространства H и V размерностей n и $m-n$ соответственно $(m < n)$.

Зададим на многообразии M главное G-подрасслоение расслоения $L(M)$ со структурной группой $G = GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$. Тогда на многообразии M определятся (см. [1], с. 22) два взаимно дополнительных дифференцируемых распределения — *горизонтальное* $\mathcal{H}$ и *вертикальное* $\mathcal{V}$ размерностей n и $m-n$ соответственно.

Такую G-структуру на многообразии M назовем *полуинтегрируемой*, если одно из ее распределений, например, $\mathcal{V}$, инволютивно. В этом случае через каждую точку $x \in M$ проходит единственное максимальное интегральное многообразие M' для $\mathcal{V}$. При этом в окрестности U точки x существует локальная система координат $x^1, \dots, x^m$ такая, что $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ образует локальный базис распределения $\mathcal{V}$.

В соответствии с общей теорией (см. [1], гл. 1, § 1, с. 8 и § 2, с. 22) *интегрируемая* $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структура на многообразии M имеет оба своих распределения $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ инволютивными и, следовательно, в окрестности U каждой точки $x \in M$ существует такая система координат $x^1, \dots, x^m$, что $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ и $\mathcal{H} = \mathrm{Span}\{\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$.

Обозначим через h и v операторы проектирования на $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ соответственно, которые обладают следующими свойствами:

$$h^2 = h; \quad v^2 = v; \quad hv = vh = 0. \tag{1.1}$$

Определим *тензоры интегрируемости* F^h и F^v распределений $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ соответственно равенствами:

$$F^h(X,Y) = \frac{1}{2}v[hX,hY]; \quad F^v = \frac{1}{2}h[vX,vY]$$

для любых $X, Y \in C^\infty TM$. Известно (см. [6], с. 19), что распределение, например, $\mathcal{V}$, инволютивно, если $[X,Y]$ принадлежит $\mathcal{V}$, как только два векторных поля X и Y принадлежат $\mathcal{V}$. Тогда обращение в нуль на M тензора интегрируемости F^v означает инволютивность распределения $\mathcal{V}$ изучаемой структуры.

Определим *фундаментальный тензор* $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры как тензорное поле $P \in C^\infty T^{(1,1)}M$ такое, что $P = v - h$. В силу (1.1) тензорное поле P удовлетворяет тождеству $P^2 = \mathrm{Id}$. Тогда в произвольной точке $x \in M$ для собственного вектора $X \in T_xM$ оператора P имеем $PX = \lambda X$ и $X = P^2X = P(\lambda X) = \lambda^2 X$. Следовательно, $\lambda = +1$ или $\lambda = -1$ и при этом все векторы подпространства $H = \mathcal{H}_x$ из T_xM отвечают собственному значению -1, а векторы подпространства $V = \mathcal{V}_x$ — собственному значению $+1$.

Обратно, пусть на многообразии M задано тензорное поле $P \in C^\infty T^{(1,1)}M$, подчиняющееся условию $P^2 = \mathrm{Id}$. В этом случае говорят (см., напр., [3], гл. XI, § 1), что на M задана структура почти произведения, а в случае, когда число собственных значений P, равных -1, равно числу его собственных значений, равных $+1$, структура носит название паракомплексной. Определим на M два дополнительных распределения $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ операторами проектирования

$$h = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} - P) \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + P). \tag{1.2}$$

Очевидно, что оба распределения будут дифференцируемыми, т. е. каждая точка $x \in M$ имеет окрестность U и m линейно независимых векторных полей $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_m$ на U, первые n из которых образуют базис $\mathcal{H}_y$, а остальные — базис $\mathcal{V}_y$ для каждой $y \in U$. При этом группа $GL(m,\mathbf{R})$, редуцированная к данной структуре, разлагается в прямое произведение подгрупп $GL(n,\mathbf{R})$ и $GL(m-n,\mathbf{R})$. Это подтверждает эквивалентность описанных выше подходов к определению $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры.

Для произвольных тензорных полей $A, B \in C^\infty T^{(1,1)}M$ согласно предложенной Нейенхейсом конструкции

$$\begin{aligned} N(X,Y) = [A,B](X,Y) = [AX,BY] + [BX,AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] - \\ - A[X,BY] - A[BX,Y] - B[X,AY] - B[AX,Y], \end{aligned}$$

где $X, Y \in C^\infty TM$, строится тензорное поле $N \in C^\infty(TM \otimes \Lambda^2 M)$, называемое (см. [6], гл. 1, § 3, с. 44) кручением A и B. Полагая $A = B = P$, получаем поле

$$N(X,Y) = [P,P](X,Y) = [X,Y] + [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY],$$

которое в соответствии с общей теорией можно назвать *тензором Нейенхейса* или *кручением* $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры. Если воспользоваться равенствами (1.2), получим

$$\begin{gathered} F^h(X,Y) + F^v(X,Y) = \\ = \frac{1}{16}\{(\mathrm{Id}+P)[(\mathrm{Id}-P)X,(\mathrm{Id}-P)Y] + (\mathrm{Id}-P)[(\mathrm{Id}+P)X,(\mathrm{Id}+P)Y]\} = \\ = \frac{1}{8}\{[X,Y] + [PX,PY] - P[PX,Y] - P[X,PY]\}, \end{gathered}$$

а в результате доказано тождество (см. также [7])

$$N = 8(F^h + F^v).$$

Поэтому обращение в нуль на M тензора Нейенхейса N является необходимым и достаточным условием (ср. [3], гл. XI, § 2) интегрируемости $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры.

2. $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-связность на m-мерном многообразии

В соответствии с общей теорией (см. [1], гл. 1, § 1 и [8], гл. 2, § 11) для интегрируемой $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структуры на M существует линейная связность ∇' без кручения, редуцируемая к подгруппе $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$. Такая связность характеризуется условием $\nabla' P = 0$. Если предположить, что на M уже имеется линейная связность ∇, например, связность Леви-Чивита ∇, которую всегда можно задать на C^∞-дифференцируемом многообразии M (см. [9], § 3, сс. 91, 102), то искомая связность определяется равенством $\nabla' = \nabla + T$ для *тензора деформации* (ср. [10])

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}\{(\nabla_X P)PY - (\nabla_{PX} P)Y + 2P[(\nabla_Y P)X]\}, \tag{2.1}$$

где $X, Y \in C^\infty TM$. Доказательство проведем в два этапа. Во-первых, заметим, что

$$T(X, Y) - T(Y, X) = -\frac{1}{4}N(X, Y). \tag{2.2}$$

Поэтому отсутствие у связности ∇' кручения равносильно интегрируемости $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структуры. Во-вторых, непосредственной подстановкой в равенство

$$(\nabla'_X P)Y = (\nabla_Y P)Y - PT(X, Y) + T(PY, X) \tag{2.3}$$

выражения для T из (2.1) получим $\nabla' P = 0$. Действительно, переписывая (2.1) и (2.3) в терминах локальных координат, будем иметь

$$T^i_{jk} = \frac{1}{4}[P^l_k(\nabla_j P^k_l) - P^l_j(\nabla_l P^i_k)] - \frac{1}{2}P^i_l(\nabla_k P^l_j); \tag{2.4}$$

$$\nabla'_k P^i_j = \nabla_k P^i_j - P^i_l T^l_{jk} + P^l_j T^i_{lk}. \tag{2.5}$$

Тогда непосредственные расчеты показывают, что

$$\begin{gathered}
\nabla'_k P^i_j = \nabla_k P^i_j - \frac{1}{4}P^i_s P^l_k(\nabla_j P^s_l) + \frac{1}{4}P^i_s P^l_j(\nabla_l P^s_k) - \\
-\frac{1}{2}P^s_l P^i_s(\nabla_k P^l_j) + \frac{1}{4}P^t_j P^l_k(\nabla_t P^i_l) - \frac{1}{4}P^t_j P^l_t(\nabla_l P^i_k) + \frac{1}{2}P^t_j P^i_l(\nabla_k P^l_t) = \\
= \nabla_k P^i_j + \frac{1}{4}P^i_s P^s_l(\nabla_j P^l_k) - \frac{1}{4}P^l_j P^s_k(\nabla_l P^i_s) - \\
-\frac{1}{2}\nabla_k P^i_j + \frac{1}{4}P^l_j P^s_k(\nabla_l P^i_s) - \frac{1}{4}\nabla_j P^i_k - \frac{1}{2}P^t_j P^l_t(\nabla_k P^i_l) = 0.
\end{gathered}$$

Замечание. Выражение (2.4) для тензора деформации T было получено из равенства (2.5) как решение уравнения $\nabla' P = 0$.

3. Плоские $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структуры на m-мерном многообразии

Предположим наличие линейной связности ∇ без кручения на M. Это позволит нам (см. [7]) ввести на $C^\infty TM$ скобку Йордена $\{X, Y\} = \frac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X)$ для любых $X, Y \in C^\infty TM$. На основе скобки Йордена зададим на многообразии M два тензорных поля $Q^h, Q^v \in C^\infty(TM \otimes S^2 M)$ следующими равенствами:

$$Q^h(X, Y) = v\{hX, hY\}; \quad Q^v(X, Y) = h\{vX, vY\}$$

для всех $X, Y \in C^\infty TM$. Назовем Q^h и Q^v *вторыми фундаментальными формами* распределений $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ соответственно (ср. [4], с. 148).

В случае полуинтегрируемой $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-структуры на M с инволютивным распределением $\mathcal{V}$ каждое его интегральное многообразие M' является связным $(m-n)$-мерным подмногообразием в M, оснащенным полем n-мерных подпространств $\mathcal{H}(M')$, а Q^v будет задавать его вторую фундаментальную форму

$$\mathrm{II} : C^\infty TM' \otimes C^\infty TM' \to C^\infty \mathcal{H}(M').$$

При этом Q^v будет обращаться в нуль на M тогда и только тогда, когда каждое его интегральное многообразие M' будет вполне геодезическим подмногообразием в M. Последнее, как известно (см. [6], с. 174), характеризуется тем, что для любой точки $x \in M'$ и любого $X \in T_x M$ геодезическая $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, определяемая начальными условиями $x = \gamma(t_0)$ и $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = X$ для $t_0 \in J$, лежит в M'.

Пусть распределение $\mathcal{V}$ не является инволютивным. Тогда $\mathcal{V}$ также называется (см., напр., [4], с. 150 и [11]) *вполне геодезическим*, если для любой точки $x \in M$ и любого $X \in \mathcal{V}_x$ геодезическая $\gamma : J \subset \mathbf{R} \to M$, определяемая начальными условиями $x = \gamma(t_0)$ и $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = X$ для $t_0 \in J$, является на всем своем протяжении интегральной кривой распределения $\mathcal{V}$. Необходимым и достаточным условием этого служит (см. [11]; [4], с. 150) равенство $h(\nabla_X Y + \nabla_Y X) = 0$ для всех $X, Y \in C^\infty \mathcal{V}$, которое в наших обозначениях имеет вид $Q^h = 0$.

Определим на M тензор Йордена $J \in C^\infty(TM \otimes S^2 M)$ следующим равенством:

$$J(X,Y) = \{J,J\}(X,Y) = \{X,Y\} + \{PX,PY\} - P\{PX,Y\} - P\{X,PY\}$$

для любых $X, Y \in C^\infty TM$. Используя равенства (1.3), без труда доказываем, что

$$Q^h(X,Y) + Q^v(X,Y) =$$
$$= \frac{1}{16}[(\mathrm{Id} + P)\{(\mathrm{Id} - P)X, (\mathrm{Id} - P)Y\} + (\mathrm{Id} - P)\{(\mathrm{Id} + P)X, (\mathrm{Id} + P)Y\}] =$$
$$= \frac{1}{8}[\{X,Y\} + \{PX,PY\} - P\{PX,Y\} - P\{X,PY\}],$$

т. е. справедливо тождество (см. также [7]) $J = 8(Q^h + Q^v)$. Поэтому обращение в нуль тензора Йордена J является необходимым и достаточным для того, чтобы оба распределения $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры были вполне геодезическими.

Поскольку по другой терминологии (см., напр., [12]) вполне геодезическое распределение называют еще и *плоским*, то $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуру с распределениями $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ назовем *полуплоской* или *плоской*, если вполне геодезическим будет одно или сразу два из этих распределений.

4. Инвариантные классы $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структур на m-мерном многообразии

Рассмотрим $GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуру на многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения. Тогда ковариантная производная ∇P фундаментального тензора структуры является сечением тензорного расслоения

$$\mathcal{P}(TM) = (\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{V}) \oplus (\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}) \oplus (\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}^* \otimes \mathcal{V}) \oplus (\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{V}^* \otimes \mathcal{H}) \tag{4.1}$$

над M со стандартным слоем

$$\mathcal{P}(E) = (H^* \otimes H^* \otimes V) \oplus (V^* \otimes V^* \otimes H) \oplus (V^* \otimes H^* \otimes V) \oplus (H^* \otimes V^* \otimes H) \tag{4.2}$$

и группой преобразований $G = GL(n,\mathbf{R}) \times GL(m-n,\mathbf{R})$. Здесь через H^* и V^* обозначены подпространства $E^* = T_x^* M$, состоящие из 1-форм, которые обращаются в нуль на V и H соответственно.

Докажем это. Сначала продифференцируем ковариантным образом тождество $P^2 = \mathrm{Id}$ и получим

$$\nabla P \cdot P + P \cdot \nabla P = 0. \tag{4.3}$$

Воспользовавшись еще раз тождеством $P^2 = \mathrm{Id}$, из (4.3) выводим

$$\nabla P = -P \cdot \nabla P \cdot P. \tag{4.4}$$

Из (4.4), в частности, следует

$$v(\nabla_X P)vY = 0; \quad h(\nabla_X P)hY = 0 \tag{4.5}$$

для любых $X, Y \in C^\infty TM$. Поскольку $P \in C^\infty T^{(1,1)}M$, в каждой точке $x \in M$ ковариантная производная ∇P, вообще говоря, есть элемент тензорного пространства $E^* \otimes E^* \otimes E$ такого, что $E = H \oplus V$ и $E^* = H^* \oplus V^*$. Поэтому

$$E^* \otimes E^* \otimes E = (H^* \oplus V^*) \otimes (H^* \oplus V^*) \otimes (H \oplus V). \tag{4.6}$$

Согласно свойствам (4.5) фундаментального тензора P в правой части равенства (4.6) отсутствуют компоненты вида $H^* \otimes V^* \otimes V$; $V^* \otimes V^* \otimes V$; $H^* \otimes H^* \otimes H$ и $V \otimes H^* \otimes H$. Следовательно, для подпространства (4.2) тензорного пространства $E^* \otimes E^* \otimes E$, которое обладает указанными свойствами, будем иметь

$$\mathcal{P}(E) = (H^* \otimes H^* \otimes V) \oplus (V^* \otimes V^* \otimes H) \oplus (V^* \otimes H^* \otimes V) \oplus (H^* \otimes V^* \otimes H), \tag{4.7}$$

что и доказывает наше утверждение.

Известно (см. [13], с. 178–179), что $GL(n, \mathbf{R})$ — неприводимое разложение тензорного пространства

$$H^* \otimes H^* = S^2 H \oplus \Lambda^2 H \tag{4.8}$$

и $GL(m-n, \mathbf{R})$ — неприводимое разложение тензорного пространства

$$V^* \otimes V^* = S^2 V \oplus \Lambda^2 V. \tag{4.9}$$

На основании равенств (4.8) и (4.9) разложению (4.7) можно еще придать следующий вид:

$$\mathcal{P}(E) = (S^2 H \otimes V) \oplus (\Lambda^2 H \otimes V) \oplus (S^2 V \otimes H) \oplus (\Lambda^2 V \otimes H) \oplus (V^* \otimes H^* \otimes V) \oplus (H^* \otimes V \otimes H).$$

В свою очередь пространство $V^* \otimes V$ допускает следующее $GL(n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение:

$$V^* \otimes V = \mathbf{R}\,\mathrm{Id}_V \oplus T_0^{(1,1)} V.$$

При этом для каждого $K \in V^* \otimes V$ имеем $K = K_1 + K_0$, где $K_1 \in \mathbf{R}\,\mathrm{Id}_V$ и $K_0 \in T_0^{(1,1)} V$ удовлетворяют соотношениям $K_1 = \frac{1}{m-n}(\operatorname{trace} K)\,\mathrm{Id}_V$ и $\operatorname{trace} K_0 = 0$.

Аналогичное $GL(m-n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение на “следовую” и “бесследовую” компоненты допускает и пространство $H^* \otimes H$. С учетом сказанного получаем $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение вида

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) = (S^2 H \otimes V) \oplus (\Lambda^2 H \otimes V) \oplus (S^2 V \otimes H) \oplus (\Lambda^2 V \otimes H) \oplus \\ \oplus (\mathbf{R}\,\mathrm{Id}_V \otimes H^*) \oplus (T_0^{(1,1)} V \otimes H^*) \oplus (\mathbf{R}\,\mathrm{Id}_H \otimes V^*) \oplus (T_0^{(1,1)} H \otimes V^*).\end{aligned} \tag{4.10}$$

На основании (4.10) можно определить поточечно $GL(n, \mathbf{R}) \times GL(m-n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение тензорного расслоения (4.1). При этом проекции на неприводимые компоненты разложения будут задаваться формулой

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_{\mathcal{P}(TM)} = \mathrm{Pr}_{S^2\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}} + \mathrm{Pr}_{\Lambda^2\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}} + \mathrm{Pr}_{S^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}} + \mathrm{Pr}_{\Lambda^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}} + \\ + \mathrm{Pr}_{C^\infty M\,\mathrm{Id}_\mathcal{V} \otimes\mathcal{H}^*} + \mathrm{Pr}_{T_0^{(1,1)}\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}^*} + \mathrm{Pr}_{C^\infty M\,\mathrm{Id}_\mathcal{H} \otimes\mathcal{V}^*} + \mathrm{Pr}_{T_0^{(1,1)}\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}^*}.\end{aligned}$$

Здесь непосредственные вычисления позволяют заключить, что

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Pr}_{S^2\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}}\,\nabla P](X,Y) &= \frac{1}{2}v[(\nabla_{hX}P)hY+(\nabla_{hY}P)hX] = \\
&= -v(\nabla_{hX}hY+\nabla_{hY}hX) = -2Q^h(X,Y), \\
[\mathrm{Pr}_{\Lambda^2\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}}\,\nabla P](X,Y) &= \frac{1}{2}v[(\nabla_{hX}P)hY-(\nabla_{hY}P)hX] = \\
&= -v(\nabla_{hX}hY-\nabla_{hY}hX) = -2F^h(X,Y); \\
[\mathrm{Pr}_{S^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}}\,\nabla P](X,Y) &= \frac{1}{2}h[(\nabla_{vX}P)vY+(\nabla_{vY}P)vX] = \\
&= h(\nabla_{vX}vY+\nabla_{vY}vX) = 2Q^v(X,Y); \\
[\mathrm{Pr}_{\Lambda^2\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}}\,\nabla P](X,Y) &= \frac{1}{2}h[(\nabla_{vX}P)vY-(\nabla_{vY}P)vX] = \\
&= h(\nabla_{vX}vY-\nabla_{vY}vX) = 2F^v(X,Y); \\
[\mathrm{Pr}_{C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{H}^*}\,\nabla P](X,Y) &= \frac{2}{m-n}[(\mathrm{trace}\,\nabla v)hY]vX; \\
[\mathrm{Pr}_{T_0^{(1,1)}\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}^*}\,\nabla P](X,Y) &= -2\Big\{v(\nabla_{vX}hY)+\frac{1}{m-n}[(\mathrm{trace}\,\nabla v)hY]vX\Big\}; \\
[\mathrm{Pr}_{C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{V}^*}\,\nabla P](X,Y) &= -\frac{2}{n}\{[(\mathrm{trace}\,\nabla h)vY]hX\}; \\
[\mathrm{Pr}_{T_0^{(1,1)}\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}^*}\,\nabla P](X,Y) &= 2\Big\{h(\nabla_{hX}vY)+\frac{1}{n}[(\mathrm{trace}\,\nabla h)vY]hX\Big\}
\end{aligned}
$$

для любых $X,Y\in C^\infty TM$. В результате доказана

Теорема А. *Ковариантная производная ∇P фундаментального тензора $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры на m-мерном дифференцируемом многообразии M разлагается в сумму из восьми поточечно неприводимых относительно действий группы $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$ компонент, четыре из которых — это вторые фундаментальные формы и тензоры интегрируемости распределений структуры.*

Найдем теперь проекции ковариантной производной ∇P фундаментального тензора $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры на тензорные расслоения $\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{H}$, типовые слои которых $V^*\otimes H^*\otimes V$ и $H^*\otimes H^*\otimes H$ являются приводимыми компонентами инвариантного относительно действия группы $G=GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$ разложения (4.2). Будем иметь

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Pr}_{\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}}\,\nabla P](X,Y) &= v(\nabla_{vX}P)hY = -2v(\nabla_{vX}hY); \\
[\mathrm{Pr}_{\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}}\,\nabla P](X,Y) &= h(\nabla_{hX}P)vY = 2h(\nabla_{hX}vY).
\end{aligned}
$$

Назовем проекцию ковариантной производной ∇P фундаментального тензора P на $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-инвариантное расслоение $\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}$ *тензором кривизны $K_{\mathcal{H}\mathcal{V}}$ распределения $\mathcal{H}$ в направлении распределения $\mathcal{V}$*. Соответствующее название дадим и проекции ∇P на $\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}$. Таким образом,

$$K_{\mathcal{H}\mathcal{V}}(X,Y) = -2v(\nabla_{vX}hY); \quad K_{\mathcal{V}\mathcal{H}}(X,Y) = 2h(\nabla_{hX}vY).$$

Очевидно, обращение на многообразии M в нуль тензора кривизны $K_{\mathcal{H}\mathcal{V}}$ означает, что распределение $\mathcal{H}$ параллельно вдоль интегральных кривых распределения $\mathcal{V}$. Аналогичный вывод можно сделать и при обращении в нуль тензора кривизны $K_{\mathcal{V}\mathcal{H}}$. В этом случае распределение $\mathcal{V}$ будет параллельно вдоль интегральных кривых распределения $\mathcal{H}$. В каждом из этих случаев $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структура согласно А.П. Нордену (см. [5]) будет *получебышевской*. Обращение же на M в нуль сразу обоих тензоров $K_{\mathcal{H}\mathcal{V}}$ и $K_{\mathcal{V}\mathcal{H}}$ выделяет (см. [5]) *чебышевскую*

$GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуру. Таким образом, мы нашли геометрический смысл проекции ∇P не на поточечно неприводимые компоненты $C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{V}^*$ и $T_0^{(1,1)}\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}^*$, $C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{H}^*$ и $T_0^{(1,1)}\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}^*$, а на их прямые суммы — компоненты $\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}^*\otimes\mathcal{H}^*\otimes\mathcal{V}$.

Заметим здесь же, что на M равенства $Q^h=F^h=0$ записываются в виде одного $v(\nabla_{hX}hY)=0$ для всех $X,Y\in C^\infty TM$. Последнее означает, что распределение $\mathcal{H}$ параллельно вдоль своих интегральных кривых. Аналогичный вывод можно сделать и при одновременном обращении на M в нуль тензоров Q^v и F^v. В каждом из этих случаев $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структура согласно А.П. Нордену (см. [5]) называется *полугеодезической*. При $Q^h=F^h=Q^v=F^v=0$ структура будет называться *геодезической*. Если же при этом будет справедливо одно из равенств $K_{\mathcal{H}\mathcal{V}}=0$ или $K_{\mathcal{V}\mathcal{H}}=0$ (или сразу оба), то $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структура называется (см. [5]) *полудекартовой* (или соответственно *декартовой*).

Замечание. Таким образом, мы перечислили все виды $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структур по классификации А.П.Нордена (см. [5], с. 128–129), пополнив ее структурами с вполне геодезическими и инволютивными структурными распределениями.

В итоге доказана

Теорема B. *На многообразии M с линейной связностью ∇ без кручения инвариантным образом выделяются восемь основных классов $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структур. Это полуинтегрируемые и интегрируемые, полуплоские и плоские, получебышевские и чебышевские, полугеодезические и геодезические $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры.*

В заключение приведем одно методическое

Замечание. Список структур, приведенный в данном утверждении, может быть значительно увеличен, если, например, к требованию для $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуры быть чебышевской добавить условие ее интегрируемости или геодезичности. В этом случае получим декартову $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структуру. Поэтому в формулировку теоремы B вошло словосочетание "основных классов $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структур". Более того, остался открытым вопрос геометрической интерпретации обращения в нуль проекций ∇P на поточечно неприводимые компоненты $C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}\otimes\mathcal{V}^*$ и $T_0^{(1,1)}\mathcal{H}\otimes\mathcal{V}^*$, $C^\infty M\,\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{H}^*$ и $T_0^{(1,1)}\mathcal{V}\otimes\mathcal{H}^*$. Это, очевидно, также приведет к появлению новых классов $GL(n,\mathbf{R})\times GL(m-n,\mathbf{R})$-структур.

Литература

1. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1986. – 224 с.
2. Широков А.П. *Структуры на дифференцируемых многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. – М., 1967. – С. 127–188.
3. Yano K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* – Oxford: Pergamon Press, 1965. – 326 p.
4. Reinhart B.L. *Differential geometry of foliations.* – Berlin–New York: Springer Verlag, 1983. – 194 p.
5. Норден А.П. *Теория композиций* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1978. – Т. 10. – С. 117–145.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
7. Stepanov S.E. *An integral formula for a Riemannian almost-product manifold* // Tensor. – 1994. – V. 55. – № 3. – P. 209–214.
8. Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения.* – М.: Мир, 1975. – 348 с.
9. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* – М.: Мир, 1971. – 343 с.
10. Yano K. *Affine connexions in an almost product space* // Kodai Math. Semin. Reps. – 1959. – V. 11. – № 1. – P.1–24.

11. Hangan T. *On totally geodesic distributions of planes.* – Top. Differ. Geom.: Colloq., Debrecen., 26 Aug. – 1 Sept., 1984. – Amsterdam, 1988. – V. 1. – P. 519–530.
12. Акивис М.А. *О плоских гиперраспределениях в* P^n // Матем. заметки. – 1984. – Т. 36. – № 2. – С. 213–222.
13. Мантуров О.В. *Элементы тензорного исчисления.* – М.: Просвещение, 1991. – 255 с.

Владимирский государственный педагогический университет

Поступила 10.12.1996