Известия вузов. Математика
2015, № 2, с. 82–86

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Р.З. Даутовым

А.В. ЛАПИН, А.Д. РОМАНЕНКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ СРЕДЫ БИНГАМА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТРУБОПРОВОДЕ

Аннотация. Рассматривается эллиптическое вариационное неравенство в круговой области, которое моделирует течение вязко-пластической среды Бингама в трубе. Вариационное неравенство аппроксимируется конечно-разностной схемой на сетке в полярных координатах. Для решения сеточной задачи предлагается итерационный метод типа обобщенного метода Удзавы. Обосновывается сходимость итерационного метода.

Ключевые слова: среда Бингама, конечно-разностная аппроксимация, итерационный метод.

УДК: 519.632

Введение. Многие геологические материалы обладают поведением вязко-пластической среды Бингама: ниже определенного предельного значения напряжений (предела текучести $\tau_s > 0$) среда ведет себя как жесткое тело, выше этого предела — как несжимаемая вязкая жидкость. Граница жесткой зоны — это неизвестная (свободная) граница. Одной из детально исследованных моделей течения среды Бингама является математическая модель стационарного ламинарного течения в поперечном сечении цилиндрической трубы [1]–[3]. Используем формулировку этой задачи из [3] как задачи на минимум выпуклого функционала, содержащего квадратичную часть и недифференцируемое слагаемое. Известные методы ее численного решения базируются на аппроксимации схемами конечных элементов или конечных разностей на ортогональных сетках в декартовой системе координат [4]–[8], а соответствующие конечномерные задачи решаются методами, основанными на расширенной (модифицированной) функции Лагранжа [9], [10]. В то же время при решении задачи в трубе круглого сечения естественным является переход к полярным координатам, который позволяет с высокой точностью аппроксимировать граничные условия Дирихле при использовании простейших конечно-элементных и конечно-разностных аппроксимаций. В данной статье построены конечно-разностная аппроксимация задачи в полярных координатах и итерационный метод ее решения. Сходимость итерационного метода обоснована с использованием результатов [11] для итерационных методов решения седловых задач с ограничениями. Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают точность и эффективность предложенного метода решения задачи.

Постановка задачи и ее аппроксимация. Рассмотрим следующую задачу: *найти*

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega)} \left\{ \frac{\mu}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 |\nabla u|^2\, r\, dr\, d\varphi + \tau_s \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\nabla u|\, r\, dr\, d\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^1 f u\, r\, dr\, d\varphi \right\}. \qquad (1)$$

Поступила 25.09.2014

Здесь f — заданная функция, $|\nabla u|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2$ — квадрат градиента функции u в полярных координатах. Входные данные имеют следующий физический смысл: u — скорость течения среды вдоль оси цилиндра, постоянная μ – вязкость жидкости, а τ_s — предел текучести. Функция f в приложениях, как правило, является постоянной и соответствует перепаду давления. Задача (1) имеет единственное решение [3].

Аппроксимируем (1) конечно-разностной схемой на сетке $\overline{\omega}$ с шагом h_r по r и h_φ по φ: $\overline{\omega} = \omega_r \times \omega_\varphi$, где

$$\omega_r = \big\{r_1 = h_r/2, r_2 = h_r/2 + h_r, \ldots, r_{N_r} \equiv 1 = h_r/2 + N_r h_r\big\},$$

$$\omega_\varphi = \{\varphi_1 = h_\varphi, \varphi_2 = 2h_\varphi, \ldots, \varphi_{N_\varphi} \equiv 2\pi = N_\varphi h_\varphi\}.$$

Для сеточной функции y, заданной на $\overline{\omega}$, разностные производные по r и по φ в точке сетки (r_i, φ_j) определим равенствами

$$\overline{\partial}_r y_{ij} = \frac{y(r_i,\varphi_j) - y(r_{i-1},\varphi_j)}{h_r}, \quad \partial_r y_{ij} = \frac{y(r_{i+1},\varphi_j) - y(r_i,\varphi_j)}{h_r},$$

$$\overline{\partial}_\varphi y_{ij} = \frac{y(r_i,\varphi_j) - y(r_i,\varphi_{j-1})}{h_\varphi}, \quad \partial_\varphi y_{ij} = \frac{y(r_i,\varphi_{j+1}) - y(r_i,\varphi_j)}{h_\varphi}.$$

Кроме того, для сокращения записи будем использовать обозначение для взвешенной суммы $\sum = h_r h_\varphi \sum\limits_{i=1}^{N_r} \sum\limits_{j=1}^{N_\varphi}$.

Используя введенные обозначения, запишем конечно-разностную аппроксимацию функционала (1)

$$\frac{\mu}{2}\sum\left(\left(r_i - \frac{h_r}{2}\right)\overline{\partial}_r y_{ij}^2 + \frac{1}{r_i}\overline{\partial}_\varphi y_{ij}^2\right) + \tau_s \sum\left(\overline{\partial}_r y_{ij}^2 + \frac{1}{r_i}\overline{\partial}_\varphi y_{ij}^2\right)^{1/2} r_i^{1/2} - \sum r_i f_{ij} y_{ij}. \tag{2}$$

Отметим, что исследование сходимости разностной схемы находится вне рамок данной статьи и может быть проведено с использованием общих результатов [4].

Определим сеточную вектор-функцию $\overline{p} = (p_1, p_2)$ с координатами $p_{1,ij} = (r_i - h_r/2)^{1/2}\overline{\partial}_r y_{ij}$, $p_{2,ij} = 1/r_i^{1/2}\overline{\partial}_\varphi y_{ij}$. Тогда функция (2) может быть записана в виде

$$J(y,\overline{p}) = \frac{\mu}{2}\sum(p_{1,ij}^2 + p_{2,ij}^2) + \tau_s \sum(p_{1,ij}^2 + p_{2,ij}^2)^{1/2} r_i^{1/2} - \sum r_i f_{ij} u_{ij},$$

и дифференциальная задача (1) аппроксимируется следующей дискретной:

$$\min_{y,\overline{p}}\left\{J(y,\overline{p}) = \frac{\mu}{2}\sum(p_{1,ij}^2 + p_{2,ij}^2) + \tau_s \sum(p_{1,ij}^2 + p_{2,ij}^2)^{1/2} r_i^{1/2} - \sum r_i f_{ij} u_{ij}\right\} \tag{3}$$

$$\text{при условиях связи} \;\; p_{1,ij} = (r_i - h_r/2)^{1/2}\overline{\partial}_r y_{ij}, p_{2,ij} = 1/r_i^{1/2}\overline{\partial}_\varphi y_{ij} \;\; \forall i,j.$$

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(y,\overline{p},\overline{\lambda}) = J(y,\overline{p}) + \sum \lambda_{1,ij}\big(p_{1,ij} - (r_i - h_r/2)^{1/2}\overline{\partial}_r y_{ij}\big) + \sum \lambda_{2,ij}\big(p_{2,ij} - 1/r_i^{1/2}\overline{\partial}_\varphi y_{ij}\big).$$

Для более компактной записи функции Лагранжа введем обозначения

$$(y,v) = \sum y_{ij} v_{ij}, \quad \|y\|^2 = (y,y), \quad (\overline{p},\overline{\lambda}) = \sum p_{1,ij}\lambda_{1,ij} + \sum p_{2,ij}\lambda_{2,ij}, \quad \|\overline{p}\|^2 = (\overline{p},\overline{p}),$$

$$(Ly)_{ij} = ((r_i - h_r/2)^{1/2}\overline{\partial}_r y_{ij}, 1/r_i^{1/2}\overline{\partial}_\varphi y_{ij}), \quad \theta(\overline{p}) = \tau_s \sum(p_{1,ij}^2 + p_{2,ij}^2)^{1/2} r_i^{1/2} = \tau_s \sum |\overline{p}_{ij}| r_i^{1/2},$$

$$(F,y) = \sum r_i f_{ij} y_{ij}.$$

Теперь функцию Лагранжа можно записать в виде

$$\mathcal{L}(y,\overline{p},\overline{\lambda}) = \frac{\mu}{2}\|\overline{p}\|^2 + \tau_s\theta(\overline{p}) + (\overline{\lambda}, Ly - \overline{p}) - (F, y).$$

Далее E — единичная матрица, $\partial\theta$ — субдифференциал функции θ.

Лемма 1. *Существует седловая точка функции Лагранжа, т. е. тройка $(y,\overline{p},\overline{\lambda})$ такая, что*

$$\mathcal{L}(v,\overline{q},\overline{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(y,\overline{p},\overline{\lambda}) \leqslant \mathcal{L}(y,\overline{p},\overline{\eta}) \quad \forall (v,\overline{q}), \quad \forall \overline{\eta}.$$

Эта точка является решением системы включений

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -L^T \\ 0 & \mu E & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \overline{p} \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_s\partial\theta(\overline{p}) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

компоненты y и $\overline{p}$ определяются однозначно и совпадают с решением задачи (3).

После вычитания последнего уравнения с множителем $-\alpha L^T$ при некотором $\alpha > 0$ из первого система (4) приводится к эквивалентному виду

$$\begin{pmatrix} \alpha L^T L & -\alpha L^T & -L^T \\ 0 & \mu E & E \\ -L & E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \overline{p} \\ \overline{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_s\partial\theta(\overline{p}) \\ 0 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

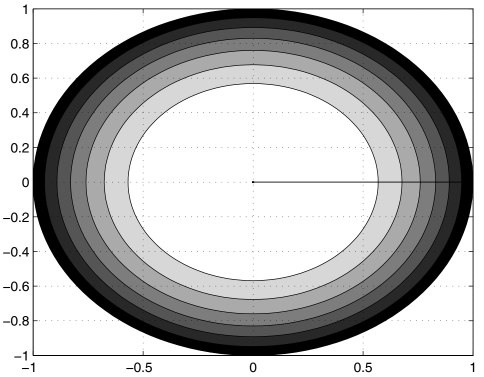
Лемма 2. *При $0 < \alpha < 4\mu$ матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha L^T L & -\alpha L^T \\ 0 & \mu E \end{pmatrix}$ в системе* (5) *положительно определена и энергетически эквивалентна блочно-диагональной матрице $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha L^T L & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Постоянные эквивалентности матриц A и A_0 — это минимальное и максимальное собственные числа 2×2-матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & \mu \end{pmatrix}$ соответственно. Если $B = (-L\ E)$, то матрица $B^T A^{-1} B$ энергетически эквивалентна единичной матрице.*

Согласно [12] из результатов леммы 2 следует, что оптимальным предобусловливателем в итерационном методе Удзавы является единичная матрица, поэтому он имеет вид

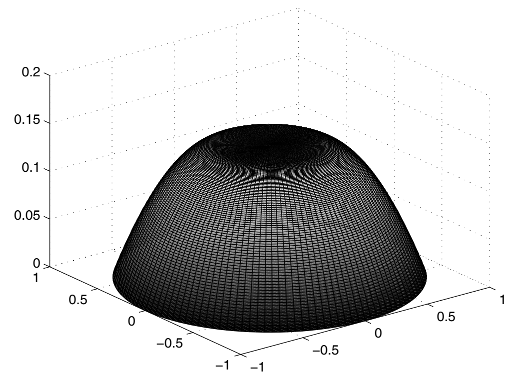
$$\begin{aligned} \alpha L^T L y^{k+1} - \alpha L^T \overline{p}^{k+1} - L^T \overline{\lambda}^k = F, \\ \mu\overline{p}^{k+1} + \overline{\lambda}^k + \tau_s\partial\theta(\overline{p}^{k+1}) \ni 0, \\ \frac{\overline{\lambda}^{k+1} - \overline{\lambda}^k}{\tau} + \overline{p}^{k+1} - Ly = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема. *Пусть $\alpha \in (0, 4\mu)$. Тогда достаточным условием сходимости итерационного метода* (6) *является неравенство $0 < \tau < \dfrac{4\alpha\mu - \alpha^2}{2\mu}$.*

Результаты тестовых вычислений. Задача (1) решалась при следующих входных данных: $\mu = 1$, $\tau_s = 0.1$, $f(r,\varphi) = c = \mathrm{const}$. Конечно-разностная аппроксимация задачи была построена на сетке 128×128. Регуляризующий параметр в задаче (5) выбран $\alpha = 1$, а итерационный шаг в методе (6) взят $\tau = 0.5$. Условием остановки итерационного процесса являлась малость сеточного аналога L_2-нормы невязки $\|r_k\|_{L_2} = \|p^k - Ly\|_{L_2}$, гарантирующая хорошую близость полученного решения к решению y сеточной задачи. На рис. 1 представлен результат тестового расчета при перепаде давления $f = 1$. Поведение $\|r_k\|_{L_2}$ представлено на рис. 2.



а)



б)

Рис. 1. Линии уровня (слева) функции y и график (справа) этой функции

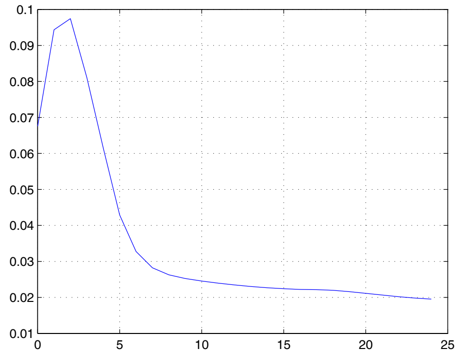


Рис. 2. Норма L_2-невязки в зависимости от количества итераций

Литература

[1] Мосолов П.П., Мясников В.П. *Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды*, ПММ **29** (3), 468–492 (1965).

[2] Мосолов П.П., Мясников В.П. *О качественных особенностях течений вязко-пластической среды в трубах*, ПММ **31** (3), 609–613 (1967).

[3] Дюво Г., Лионс Ж.-Л. *Неравенства в механике и физике* (Наука, М., 1980).

[4] Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р. *Численное исследование вариационных неравенств* (Мир, М., 1979).

[5] Glowinski R. *Numerical methods for nonlinear variational problems* (Springer-Verlag, N. Y., 1984).

[6] Dean E.J., Glowinski R., Guidoboni G. *On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow: old and new results*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., №142, 36–62 (2007).

[7] Muravleva E.A., Olshanskii M.A. *Two finite-difference schemes for calculation of Bingham fluid flows in a cavity*, Rus. J. Num. Anal. Math. Model. **23** (6), 615–634 (2008).

[8] Muravleva E.A. *Finite-difference schemes for the computation of viscoplastic medium flows in a channel*, Math. Model. and Comput. Simulations **1** (6), 768–779 (2009).

[9] Fortin M., Glowinski R. *Augmented Lagrangan methods* (North-Holland, Amsterdam, N. Y., 1983).

[10] Glowinski R., LeTallec P. *Augmented Lagrangan and operator-splitting methods in nonlinear mechanics* (SIAM studies in applied mathematics, PA,1989).

[11] Lapin A. *Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems*, Lobachevskii J. Math. **31** (4), 309–322 (2010).

А.В. Лапин

профессор, кафедра математической статистики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` Alexandr.Lapin@kpfu.ru

А.Д. Романенко

аспирант, кафедра математической статистики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` romart92@mail.ru

A.V. Lapin and A.D. Romanenko

Solving the problem of Bingham fluid flow in cylindrical pipeline

Abstract. We consider an elliptic variational inequality in a circular domain, which simulates viscoplastic Bingham flow in a pipe. This variational inequality is approximated by finite-difference scheme on a grid in polar coordinates. To solve the finite-dimensional problem we propose a generalized Uzawa-type iterative method. We prove the convergence of the iterative method.

Keywords: Bingham's flow, finite-difference approximation, iterative method.

A.V. Lapin

Professor, Chair of Mathematical Statistics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` Alexandr.Lapin@kpfu.ru

A.D. Romanenko

Postgraduate, Chair of Mathematical Statistics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` romart92@mail.ru