ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 512.554.31

С.А. ТЮРИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОРОВ В АЛГЕБРЕ ЦАССЕНХАУЗА

Введение

Роль торов в модулярных алгебрах Ли состоит в их связи с подалгебрами Картана. В классических простых модулярных алгебрах Ли все подалгебры Картана сопряжены между собой и являются торами. В p-алгебрах Ли подалгебрами Картана являются централизаторы максимальных торов и только они [1]–[3]. Классификация торов в простых неклассических p-алгебрах Ли была получена в [3], [4]. В алгебрах Ли, не являющихся p-алгебрами, подалгебры Картана являются централизаторами допустимых торов в p-замыкании алгебры Ли [5].

Подалгебры Картана в алгебре Цассенхауза были классифицированы в [6]. В [7] получено описание соответствующих им допустимых торов в p-замыкании алгебры Цассенхауза.

Целью данной работы является описание всех торов в p-замыкании алгебры Цассенхауза. Основные определения и обозначения можно найти в [8] и [7].

1. Предварительные сведения

Пусть K — поле характеристики $p > 0$,

$$A_1(n) = \langle 1, x, x^{(2)}, \dots, x^{(p^n-1)} \rangle$$

— алгебра разделенных степеней,

$$\mathcal{L} = W_1(n) = \{ f(x)\partial \mid f(x) \in A_1(n) \},$$

где $\partial = \frac{d}{dx}$, — алгебра Цассенхауза, т.е. алгебра Ли специальных дифференцирований алгебры $A_1(n)$. Эта алгебра имеет естественную фильтрацию $\{\mathcal{L}_i\}$ $(-1 \le i \le p^n - 1)$ и не является p-алгеброй Ли. Ее p-замыканием в p-алгебре Ли $\operatorname{Der} A_1(n)$ является

$$\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \oplus \langle \partial^p, \partial^{p^2}, \dots, \partial^{p^{n-1}} \rangle.$$

Допустимый автоморфизм Φ алгебры $A_1(n)$ определяется образом $y = \Phi(x)$ элемента x. При этом, если $y = \sum\limits_{i=1}^{p^n-1} a_i x^{(i)}$, то $a_1 \ne 0$, $a_{p^k} = 0$ $(k \le n-1)$. В группе допустимых автоморфизмов выделяется подгруппа G однородных автоморфизмов $G = \{\Phi_\varepsilon \mid \varepsilon \in K^*\}$, $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon \cdot x$, и подгруппа $\mathcal{F}$ автоморфизмов с тождественной линейной частью. Допустимый автоморфизм алгебры Ли $\mathcal{L}$ индуцирован допустимым автоморфизмом алгебры $A_1(n)$ по формуле $\Phi(g(x)\partial) = \frac{g(y)}{y'} \cdot \partial$. Допустимый автоморфизм алгебры Ли $\overline{\mathcal{L}}$ является продолжением допустимого автоморфизма алгебры Ли $\mathcal{L}$ и на элементах ∂^{p^i} доопределяется следующим образом: $\Phi(\partial^{p^i}) = (\Phi(\partial))^{p^i}$.

Содержанием многочлена $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{p^n-1} a_i x^{(i)} \in A_1(n)$ будем называть многочлен

$$f = \operatorname{cont} g = \sum_{i=1}^{n-1} a_{p^i} x^{(p^i)}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00431-а).

Высотой $ht(g)$ многочлена g будем называть максимальное число k, для которого $a_{p^k} \neq 0$. Содержанием $\operatorname{cont} D$ дифференцирования $D = g(x)\partial \in \mathcal{L}$ также будем называть многочлен $f = \operatorname{cont} g$. Тором называется абелева p-подалгебра, состоящая из полупростых элементов.

2. Внутренние торы

Максимальная подалгебра

$$\mathcal{L}_0 = \{g(x)\partial \mid g(0) = 0\}$$

является p-подалгеброй. Торы алгебры $\overline{\mathcal{L}}$, содержащиеся в $\mathcal{L}_0$, будем называть внутренними, а остальные — внешними. Тор $\langle x\partial \rangle$ будем называть стандартным. Любой тор имеет базис, состоящий из тороидальных элементов. Поскольку член естественной фильтрации $\mathcal{L}_0$ является нильпотентным p-идеалом в $\mathcal{L}_0$, то все внутренние торы одномерны.

Пусть T — внутренний тор. Выберем базисный тороидальный элемент $D \in T$ так, что $D \equiv x\partial \pmod{\mathcal{L}_1}$, и пусть $\operatorname{cont} D = f$. В работе [7] доказано, что дифференцирование D автоморфизмом $\Phi \in \mathcal{F}$ приводится к каноническому виду

$$D_f = [x + f + xf^{p-1}(\partial^p f)]\partial. \tag{1}$$

Обратно, для любого многочлена

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x^{(p^i)} \in A_1(n)$$

дифференцирование D_f вида (1) тороидально. Однородный автоморфизм $\Phi_\varepsilon \in G$ переводит дифференцирование D_f в дифференцирование D_{f_1}, где

$$f_1 = \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon^{p^i - 1} x^{(p^i)}.$$

Таким образом, класс сопряженных внутренних торов определяется набором параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ с точностью до эквивалентности $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}) \sim (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}) \Leftrightarrow \exists \varepsilon \in K^* : \beta_i = \alpha_i \cdot \varepsilon^{p^i - 1}$ $(1 \leq i \leq n-1)$. При $n = 1$ существует одна орбита внутренних торов — это орбита стандартного тора. При $n = 2$ существуют две орбиты: одна соответствует значению $\alpha_1 = 0$ — орбита стандартного тора, другая — значению $\alpha_1 = 1$ — орбита тора $\langle (x + x^{(p)} - x^{(p^2 - p + 1)})\partial \rangle$.

Другой канонической формой внутреннего тороидального дифференцирования, имеющего содержание f, является

$$T_f = \frac{x + f}{1 + f'}\partial = [x + f - f(\partial^p f)x^{(p-1)}]\partial.$$

Обозначим через $C_0 = \langle x^{(ip)} \mid 0 \leq i \leq p^{n-1} - 1 \rangle$ алгебру констант стандартного тора. Алгеброй констант для тора $\langle T_f \rangle$ является ее фильтрованная деформация

$$C_f = \{c(\phi) \mid \phi \in C_0\}, \quad \text{где} \quad c(\phi) = \phi + \left(\sum_{i=1}^{p-1} f^{(p-i)} \cdot x^{(i)} \right) \cdot \partial^p \phi.$$

Она изоморфна алгебре разделенных степеней $A_1(n-1)$. Собственный вектор g дифференцирования T_f, соответствующий собственному значению $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, имеет вид

$$g = c(\phi) \cdot y^{(k)}, \quad \text{где} \quad c(\phi) \in C_f, \ \ y = x + f.$$

Алгебра $A_1(n)$ имеет разложение на весовые подпространства относительно тора $\langle T_f \rangle$

$$A_1(n) = \bigoplus_{i=0}^{p-1} C_f \cdot y^{(i)}.$$

Аналогично, собственные векторы для $\operatorname{ad} T_f$ имеют вид

$$D = c(\phi) \cdot \frac{y^{(k+1)}}{y'}\partial \quad (0 \le k \le p-2), \qquad D = c(\phi) \cdot \frac{1}{y'}\partial \quad (k = p-1), \quad c(\phi) \in C_f.$$

Отсюда следует, в частности, что любой внутренний тор является допустимым, подалгебра Картана H_f, соответствующая тору $\langle T_f \rangle$, имеет вид $H_f = C_f \cdot T_f$, содержится в $\mathcal{L}_0$ и является фильтрованной деформацией стандартной подалгебры Картана

$$H_0 = \langle x^{(ip+1)}\partial \mid 0 \le i \le p^{n-1} - 1 \rangle.$$

3. Внешние тороидальные дифференцирования

В алгебре Витта $W_1(1)$ существует одна орбита внешних тороидальных дифференцирований — орбита дифференцирования $(1+x)\partial$ [3]. Аналогичный результат имеет место и для алгебры Цассенхауза.

Теорема 1. *Группа автоморфизмов алгебры Цассенхауза действует транзитивно на множестве внешних тороидальных дифференцирований.*

Доказательство. При $n > 1$ внешнее тороидальное дифференцирование лежит в $\overline{\mathcal{L}}$, но вне $\mathcal{L}$, т.к. $\mathcal{L}$ не является p-подалгеброй. Пусть

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\partial)^{p^i} + f(x)\partial, \quad \text{где} \quad f(0) = 0,$$

— внешнее тороидальное дифференцирование. Из условия тороидальности следует, что $\alpha_i = \alpha_0^{p^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Однородный автоморфизм Φ_{α_0} приводит D к виду

$$D = \sum_{i=0}^{n-1} \partial^{p^i} + g(x)\partial, \quad \text{где} \quad g(0) = 0.$$

Далее будем использовать автоморфизмы из группы $\mathcal{F}$. Если $\Phi(x) = y$, то

$$\Phi(\partial) = \frac{1}{y'}\partial \equiv \partial \pmod{\mathcal{L}_0}, \quad \Phi(\partial^p) = \partial^p + \phi_1 \partial.$$

Из условия $\partial^p x = 0$ следует

$$0 = \Phi(\partial^p x) = \Phi(\partial^p) y = \partial^p y + \phi_1 \cdot y'.$$

Это означает, что многочлен $\phi_1 = -\frac{\partial^p y}{y'}$ не имеет свободного члена, т.е. $\Phi(\partial^p) \equiv \partial^p \pmod{\mathcal{L}_0}$.

Аналогично, $\Phi(\partial^{p^i}) = \partial^{p^i} + \phi_i \partial$, где $\phi_i = -\frac{\partial^{p^i} y}{y'}$ не имеет свободного члена. Теперь $\Phi(D) = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + \left(\frac{1+\Phi(g)-\partial^p y - \cdots - \partial^{p^{n-1}} y}{y'}\right)\partial$. Если $D \equiv \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + (1 + ax^{(i)})\partial \pmod{\mathcal{L}_i}$ и $y = x + ax^{(p^{n-1}+i)}$ $(0 < i < p^n - p^{n-1})$, то $\Phi(D) \equiv \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + \partial \pmod{\mathcal{L}_i}$. В итоге дифференцирование D будет приведено к виду $D = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + (1 + x^{(p^n - p^{n-1})} \cdot l)\partial$, где $l \in A_1(n-1)$. Для нахождения многочлена l будем использовать условие тороидальности, а также разложение алгебры $A_1(n)$ над подалгеброй $A_1(n-1)$. Эта подалгебра не инвариантна относительно D, но она инвариантна относительно дифференцирования $Y = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + \partial$. Заметим, что для любого $v \in A_1(n-1)$ справедливо равенство

$$x^{(ip^{n-1})} Dv = x^{(ip^{n-1})} Yv \quad (i = 1, \ldots, p-1).$$

Вычисляем действие степеней дифференцирования D на многочлен x

$$\begin{aligned} Dx &= 1 + x^{((p-1)p^{n-1})} \cdot l, \\ D^2 x &= x^{((p-1)p^{n-1})} \cdot Dl + Dx^{((p-1)p^{n-1})} \cdot l = x^{((p-1)p^{n-1})} \cdot Yl + x^{((p-2)p^{n-1})} \cdot lh, \end{aligned} \tag{2}$$

где $h = 1 + x^{(p^{n-1}-p^{n-2})} + x^{(p^{n-1}-p^{n-3})} + \cdots + x^{(p^{n-1}-p)} + x^{(p^{n-1}-1)} \in A_1(n-1)$. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} Dx^{(ip^{n-1})} &= X^{((i-1)p^{n-1})}h \quad (i = 2, 3, \ldots, p-1), \\ Dx^{(p^{n-1})} &= h + x^{((p-1)p^{n-1})} l x^{(p^{n-1}-1)}. \end{aligned}$$

Пусть уже

$$D^k x = \sum_{i=1}^{k} x^{((p-i)p^{n-1})} g_{ik} \quad (k < p-1), \quad \text{причем } g_{ij} \in A_1(n-1) \text{ и } g_{kk} = lh^{k-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D^{k+1}x &= \sum_{i=1}^{k} x^{((p-i)p^{n-1})} D g_{ik} + \sum_{i=1}^{k} g_{ik} D x^{((p-i)p^{n-1})} = \\ &= \sum_{i=1}^{k} x^{((p-i)p^{n-1})} Y g_{ik} + \sum_{i=1}^{k} x^{((p-i-1)p^{n-1})} g_{ik} h = \\ &= x^{((p-1)p^{n-1})} Y g_{ik} + \sum_{i=2}^{k} x^{((p-i)p^{n-1})} (Y g_{ik} + g_{i-1,k} h) + x^{((p-(k+1))p^{n-1})} g_{kk} h. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} D^p x &= \sum_{i=1}^{p-1} x^{((p-i)p^{n-1})} D g_{i,p-1} + \sum_{i=1}^{p-2} g_{i,p-1} D x^{((p-i)p^{n-1})} + g_{p-1,p-1} D x^{(p^{n-1})} = \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} x^{((p-i)p^{n-1})} Y g_{i,p-1} + \sum_{i-1}^{p-2} g_{i,p-1} h x^{((p-i-1)p^{n-1})} + lh^{p-2}(h + x^{((p-1)p^{n-1})} l x^{(p^{n-1}-1)}) = \\ &= x^{((p-1)p^{n-1})} [Y g_{1,p-1} + l^2 h^{p-2} x^{(p^{n-1}-1)}] + \sum_{i=2}^{p-1} x^{((p-i)p^{n-1})} [Y g_{i,p-1} + g_{i-1,p-1} h] + lh^{p-1}. \end{aligned}$$

Сравнивая это разложение с разложением (2), находим, что $lh^{p-1} = 1$. Отсюда $l = h$ и

$$D = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + (1 + x^{(p^n - p^{n-1})} + x^{(p^n - p^{n-2})} + \cdots + x^{(p^n - p)} + x^{(p^n - 1)})\partial. \quad \square$$

Замечание. В качестве представителя орбиты можно взять тороидальное дифференцирование $B = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p + (1+x)\partial$. Найдем алгебру констант $C(B)$ этого дифференцирования.

Пусть $Z = \partial^{p^{n-1}} + \cdots + \partial^p$, т.е. $B = Z + (1+x)\partial$. Разложив элемент $f \in C(B)$ относительно C_0

$$f = \sum_{i=0}^{p-1} f_i \cdot x^{(i)}, \quad \text{где} \quad f_i \in C_0 \quad (i = 0, 1, \ldots, p-1),$$

из условия $Bf = 0$ найдем, что все коэффициенты f_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ выражаются через f_0 по формуле $f_i = (-1)^i \cdot Z \cdot (Z+1) \cdots (Z + (i-1)) f_0$, или, в другой форме,

$$f_i = \Big(\prod_{j=1}^{p-i} (j - Z)^{-1} \Big) \partial^p f_0.$$

Для элемента $\phi \in C_0$ введем обозначение

$$d(\phi) = \phi + \Big[\sum_{i=1}^{p-1} \Big\{ \Big(\prod_{j=1}^{p-i} (j - Z)^{-1} \Big) \partial^p \phi \Big\} x^{(i)} \Big].$$

Тогда $f = d(f_0)$. В частности, если взять $f_0 = -x^{(p)}$, то

$$f = d(-x^{(p)}) = \ln(1+x) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1}(i-1)!\,x^{(i)}.$$

Алгебра $C(B)$ изоморфна алгебре разделенных степеней $A_1(n-1)$, причем

$$C(B) = \langle y^{(i)} \mid 0 \le i \le p^{n-1} - 1\rangle, \quad \text{где} \quad y = \ln(1+x).$$

Эта алгебра инвариантна относительно дифференцирований Z и $(1+x)\partial$, т.е.

$$Zd(\phi) = d(Z\phi), \quad (1+x)\partial d(\phi) = d(-Z\phi).$$

Собственный вектор для дифференцирования B, соответствующий собственному значению $k \in \{1, \dots, p-1\}$, имеет вид $u = d(\phi)(1+x)^k$ ($\phi \in C_0$). Это дает разложение алгебры $A_1(n)$ относительно B

$$A_1(n) = \mathop{\oplus}_{k=0}^{p-1} C(B) \cdot (1+x)^k.$$

Алгебра констант для $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}\, B$ есть

$$C(B) \cdot (1+x)\partial = \left\{ \frac{y^{(i)}}{y'}\partial \mid 0 \le i \le p^{n-1} - 1 \right\} \quad (y = \ln(1+x)).$$

Она изоморфна $W_1(n-1)$.

4. Внешние торы

Подалгебру алгебры Ли $\overline{\mathcal{L}}$ будем называть транзитивной, если она имеет нулевое пересечение с подалгеброй $\mathcal{L}_0$.

Для любой одномерной транзитивной подалгебры $R \subset \mathcal{L}$ существует однозначно определенный базисный элемент $D \in R$ такой, что $D \equiv \partial \pmod{\mathcal{L}_0}$. Представим его в виде $D = \frac{1}{y'}\partial$, где y — многочлен без свободного члена, принадлежащий $A_1(n) \oplus \langle x^{(p^n)}\rangle$. Подалгебру R будем обозначать через $R(y)$. Высотой подалгебры $R(y)$ будем называть число $ht(y)$.

Теорема 2. *Пусть R — одномерная транзитивная подалгебра алгебры Ли $\mathcal{L}$ и $ht(R) = k$. Тогда $\overline{R} = T \oplus N$, где T — транзитивный тор, N — абелева ниль-подалгебра,* $\dim T = k$, $\dim N = n - k$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{cont} y = d_1 x^{(p)} + \dots + d_k x^{(p^k)}$ ($d_k \ne 0$, если $k > 0$). В работе [9] доказано, что дифференцирование D удовлетворяет уравнению

$$D^{p^n} + (d_1 D)^{p^{n-1}} + \dots + (d_k D)^{p^{n-k}} = 0.$$

Отсюда следует

1) $\overline{R} = \langle D, D^p, \dots, D^{p^{n-1}}\rangle$;
2) $U = D^{p^{n-k}}$ — полупростое дифференцирование при $k > 0$ и $U = 0$ при $k = 0$, $V = D^{p^k} + (d_1 D)^{p^{k-1}} + \dots + d_k D$ — нильпотентное дифференцирование;
3) $T = \langle U, U^p, \dots, U^{p^{k-1}}\rangle$ — транзитивный тор при $k > 0$ и $T = \{0\}$ при $k = 0$, $\dim T = k$, $N = \langle V, V^p, \dots, V^{p^{n-k-1}}\rangle$ — абелева ниль-подалгебра, $\dim N = n - k$, и $\overline{R} = T \oplus N$ $\square$.

Доказанная теорема каждой одномерной транзитивной подалгебре $R = R(y)$ ставит в соответствие транзитивный тор $T = T(y)$ (при $k = 0$ будем полагать, что $T(y) = \{0\}$). Обозначим через $\mathcal{L}(y)$ его централизатор в $\mathcal{L}$ — подалгебру $\mathcal{L}(y) = \left\langle \frac{y^{(i)}}{y'}\partial \mid 0 \le i \le p^{n-k} - 1 \right\rangle$. Она изоморфна алгебре Ли $W_1(n-k)$ при $k < n$ и совпадает с $R(y)$ при $k = n$. Эта подалгебра содержит $R(y)$ и является нуль-компонентой Фиттинга дифференцирования $\mathrm{ad}\, D$, т.е. ядром дифференцирования $\mathrm{ad}_{\mathcal{L}}\, U$.

Теорема 3. *Для любого транзитивного тора $T \subset \overline{\mathcal{L}}$ размерности $k > 0$ существует одномерная транзитивная подалгебра $R = R(y) \subset \mathcal{L}$ высоты k такая, что $T = T(y)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k < n$. Выберем тороидальный базис $\{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ тора T. Согласно п. 3 подалгебра $C_{\mathcal{L}}(t_1)$ является транзитивной подалгеброй, изоморфной $W_1(n-1)$. Дифференцирования $t_2, \ldots, t_k$ принадлежат $C_{\overline{\mathcal{L}}}(t_1) = \overline{C_{\mathcal{L}}(t_1)}$. По индукции подалгебра $M = C_{\mathcal{L}}(T)$ есть транзитивная подалгебра, изоморфная $W_1(n-k)$. Выберем в M транзитивное дифференцирование D такое, что $\mathrm{ad}_M D$ нильпотентно и $D \equiv \partial \pmod{\mathcal{L}_0}$. В качестве подалгебры $R(y)$ возьмем $\langle D \rangle$. Из того, что $\dim M = p^{n-k}$, следует $ht(R) = k$. По теореме 2 дифференцирование $U = D^{p^{n-k}}$ полупросто. Покажем, что $U \in T$. Это дифференцирование коммутирует с M и T. Возьмем тор $T_1 = T + U$. Его централизатором является

$$C_{\mathcal{L}}(T_1) = C_{\mathcal{L}}(T) \cap C_{\mathcal{L}}(U) = M. \tag{3}$$

Если бы тор T_1 не был транзитивным, то он содержал бы внутренний одномерный тор S. Но тогда $T_1 = T \oplus S$, и его централизатор

$$C_{\mathcal{L}}(T_1) = C_{\mathcal{L}}(T) \cap C_{\mathcal{L}}(S) = M \cap C_{\mathcal{L}}(S) = C_M(S)$$

был бы внутренней подалгеброй Картана алгебры Ли M, что противоречит (3). Итак, T, T_1, $T \subset T_1$, — два транзитивных тора, имеющих одинаковые централизаторы, $C_{\mathcal{L}}(T) = C_{\mathcal{L}}(T_1) = M$. Но размерность p^{n-k} централизатора транзитивного тора определяет размерность k самого тора, поэтому $T = T_1$ и $U \in T$.

Из включений $U, U^p, \ldots, U^{p^{n-k}} \in T$ следует, что $T = \langle U, U^p, \ldots, U^{p^{n-k}} \rangle$. Это означает, что $T = T(y)$.

Пусть теперь $k = n$. Тогда $M = C_{\mathcal{L}}(T)$ — одномерная подалгебра, причем $ht(M) = n$. Выберем в M базисный элемент $D = \frac{1}{y'}\partial$ с условием $D \equiv \partial \pmod{\mathcal{L}_0}$. Это полупростое дифференцирование, т.к. $ht(y) = n$. Покажем, что $D \in T$. Если $D \notin T$, то $T_1 = \langle D, T \rangle$ — тор, $\dim T_1 = n+1$. Но тогда $\dim(T_1 \cap \mathcal{L}) \geq 2$, что приводит к противоречию, т.к. в алгебре Цассенхауза транзитивная алгебра, размерность которой больше 1, не может быть абелевой. Отсюда $T = \langle D, D^p, \ldots, D^{p^{n-1}} \rangle$, т.е. $T = T(y)$. $\square$

Теоремы 2 и 3 дают описание транзитивных торов. Рассмотрим нетранзитивные внешние торы. Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал алгебры $A_1(n)$, и $y \in A_1(n)$ — многочлен высоты $k < n$, удовлетворяющий условию $y \equiv x \pmod{\mathfrak{m}^{(2)}}$. Тогда дифференцирование $\tau(y) = \frac{y}{y'}\partial$ тороидально. Оно принадлежит подалгебрам $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}(y)$. Любой внутренний тор имеет вид $\langle \tau(y) \rangle$. Подпространство $S(y) = T(y) \oplus \langle \tau(y) \rangle$ является нетранзитивным внешним тором размерности $k+1$.

Теорема 4. *Тор $S(y)$ максимален.*

Доказательство. Пусть t — тороидальный элемент, не принадлежащий тору $S(y)$ и коммутирующий с ним. Поскольку $[t, \tau(y)] = 0$, то $t \notin \mathcal{L}_0$. Тор $T(y) \oplus \langle t \rangle$ транзитивен, поэтому из теоремы 3 следует существование такого многочлена z высоты $k+1$, что $T(y) \oplus \langle t \rangle = T(z)$.

Если $k < n-1$, то внутреннее тороидальное дифференцирование $\tau(y)$ принадлежит подалгебре $\mathcal{L}(z)$ (централизатору в $\mathcal{L}$ тора $T(z)$), поэтому $\frac{y}{y'} = \frac{f(z)}{z'}$, где f — многочлен без свободного члена. Но $ht(\frac{y}{y'}) = ht(y) = k$, тогда как $ht(\frac{f(z)}{z'}) = ht(f(z)) > ht(z) = k+1$.

Если же $k = n-1$, то тор $T(z)$ — максимальный транзитивный тор в $\overline{\mathcal{L}}$. Его централизатором является одномерная транзитивная подалгебра $R(z)$, которая не может содержать $\tau(y) \in \mathcal{L}_0$. $\square$

Следствие. Внутренний тор $\langle \tau(y) \rangle$ максимален тогда и только тогда, когда $ht(y) = 0$, т.е. $\mathrm{cont}\, y = 0$.

Из доказанной теоремы следует, что любой транзитивный тор $T = T(y)$, размерность которого меньше n, содержится в максимальном торе $S(y)$. Это же верно и для нетранзитивных торов.

Теорема 5. *Для любого нетранзитивного тора $T \subset \overline{\mathcal{L}}$ существует тор $S(y)$ такой, что $T \subset S(y)$.*

Доказательство. Пусть $\dim T = k$. Если $k = 1$, то $T \subset \mathcal{L}_0$. Тогда

$$T = \langle \tau(y) \rangle \quad \text{и} \quad T \subset S(y).$$

Пусть теперь $k > 1$. Выберем в торе T базис $\{t_1, \ldots, t_k\}$ из тороидальных дифференцирований так, что $t_1 \in \mathcal{L}_0$. По теореме 3 существует многочлен z высоты $k-1$ такой, что $\langle t_2, \ldots, t_k \rangle = T(z)$. Тогда $T = T(z) \oplus \langle t_1 \rangle$. Внутреннее тороидальное дифференцирование t_1 принадлежит подалгебре $\mathcal{L}(z) \cong W_1(n-k+1)$. Из результатов п. 2 следует, что подалгебра $\mathcal{L}(z)$ содержит одномерную транзитивную подалгебру $R(y)$ такую, что $t_1 = \tau(y)$. Поскольку $D = \frac{1}{y'}\partial \in \mathcal{L}(z)$, то D коммутирует с тором $T(z)$, а значит, тор $T(y) \subset \langle \overline{D} \rangle$ коммутирует с $T(z)$ и, следовательно, с T. Тор $T(y) + T$ содержит тор $S(y)$, но по теореме 4 $S(y)$ максимален, поэтому $S(y) = T(y) + T$. Отсюда $T(y) + T(z) = T(y)$, т.е. $T(z) \subset T(y)$ и $T = T(z) \oplus \langle \tau(y) \rangle \subset S(y)$. □

Следствие 1. Любой максимальный нетранзитивный тор имеет вид $S(y)$.

Следствие 2. Для любого натурального числа k $(1 \le k \le n)$ в p-алгебре Ли $\overline{\mathcal{L}}$ существует максимальный тор размерности k.

Следствие 3. Транзитивный тор максимален тогда и только тогда, когда его размерность равна n.

Следствие 4. Внешний тор является допустимым тогда и только тогда, когда он транзитивен и максимален, т.е. $T = T(y)$, где $ht(y) = n$. В этом случае его централизатором в $\mathcal{L}$ является одномерная подалгебра Картана $R(y)$.

Г. Браун [6] заметил, что подалгебре Картана $H = R(y)$ соответствует подгруппа $\Gamma(y)$ аддитивной группы поля K, имеющая порядок p^n. Она задается p-уравнением

$$\lambda^{p^n} + (\alpha_1 \lambda)^{p^{n-1}} + \cdots + (\alpha_{n-1}\lambda)^p + \alpha_n \lambda = 0,$$

а однородный автоморфизм $\Phi_\varepsilon \in G$ индуцирует эквивалентность $\Gamma \to \varepsilon \cdot \Gamma$ на множестве таких подгрупп.

Автоморфизмом из группы $\mathcal{F}$ подалгебра Картана H может быть приведена к виду

$$H = \Big\langle \frac{1}{y'}\partial \Big\rangle = \Big\langle \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{(p^i - 1)}\Big)\partial \Big\rangle, \quad \text{где} \quad y = x + f.$$

Однородный автоморфизм $\Phi_\varepsilon \in G$ переводит $R(x+f)$ в $R(x+f_1)$, где

$$f_1 = \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon^{p^i - 1} x^{(p^i)}.$$

Таким образом, класс сопряженных внешних подалгебр Картана определяется с точностью до эквивалентности набором параметров

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \sim (\alpha_1 \varepsilon^{p-1}, \alpha_2 \varepsilon^{p^2-1}, \ldots, \alpha_n \varepsilon^{p^n - 1}), \quad \text{где} \quad \alpha_n \ne 0, \ \ \varepsilon \in K^*.$$

Собственные векторы $g_\lambda = \exp \lambda y$ $(\lambda \in \Gamma)$ дифференцирования $D = \frac{1}{y'}\partial$ имеют вид

$$g_\lambda = \prod_{i=1}^{n} f_i\big(-(\alpha_i\lambda)^{p^{-i}} \cdot x\big), \quad \text{где} \quad f_i(x) = 1 + \sum_{j=1}^{p^i - 1} x^{(j)}.$$

Все весовые подпространства одномерны, и алгебра $A_1(n)$ изоморфна групповой алгебре группы $\Gamma(y)$: $K(\Gamma) \cong A_1(n) = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} \langle g_\lambda \rangle$.

Корневые векторы Z_λ дифференцирования D имеют вид

$$Z_\lambda = g_\lambda \cdot D = \frac{\exp \lambda y}{y'} \cdot D.$$

Все корневые подпространства одномерны, и корневое разложение алгебры Цассенхауза относительно транзитивной подалгебры Картана $H = R(y)$ имеет вид $\mathcal{L} = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} \langle Z_\lambda \rangle$.

Литература

1. Seligman G.B. *Modular Lie algebras.* – Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. – Bd. 40. – Berlin: Springer-Verlag, 1967.
2. Winter D.J. *On the toral structure of Lie p-algebras* // Acta Math. – 1969. – V. 123. – № 1–2. – P. 69–81.
3. Демушкин С.П. *Подалгебры Картана простых p-алгебр Ли W_n и S_n* // Сиб. матем. журн. – 1970. – Т. 11. – № 2. – С. 310–325.
4. Демушкин С.П. *Подалгебры Картана простых неклассических p-алгебр Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1972. – Т. 36. – № 5. – С. 915–932.
5. Wilson R.L. *Cartan subalgebras and tori in prime characteristics* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 53. – № 2. – P. 325–327.
6. Brown G. *Cartan subalgebras of Zassenhaus algebras* // Can. J. Math. – 1975. – V. 27. – № 5. – P. 1011–1021.
7. Тюрин С.А. *Торы в алгебре Цассенхауза.* – "Материалы 6-й научн. конф. молодых ученых мех.-матем. фак. и НИИ мех. Ч. 3". – Горький, 1981. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.01.82, № 202-82.
8. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 33. – № 2. – С. 251–322.
9. Тюрин С.А. *Линейные дифференциальные уравнения в алгебре разделенных степеней.* – "Материалы 6-й научн. конф. молодых ученых мех.-матем. фак. и НИИ мех. Ч. 3". – Горький, 1981. – 4 с. – Деп в ВИНИТИ 14.01.82, № 202-82.

Нижегородский государственный университет

Поступила
07.08.1995