ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

УДК 517.968

О.Г. АВСЯНКИН

О ПРИМЕНЕНИИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА К ПАРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ С ОДНОРОДНЫМИ ЯДРАМИ

В современной математике все большее значение приобретают различные проекционные методы решения тех или иных уравнений (см., напр., [1]–[3]). В настоящее время довольно полно описаны условия применимости проекционных методов к операторам типа свертки, Тёплица, сингулярным интегральным операторам. В [4] и [5] рассматривались проекционные методы для интегральных операторов с однородными ядрами.

Основная цель данной работы — получить критерий применимости проекционного метода к многомерным парным интегральным операторам с ядрами, однородными степени $(-n)$ и инвариантными относительно всех вращений в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Для таких операторов вводится понятие символа, в терминах которого и формулируется вышеупомянутый критерий.

В статье используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство; $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$; $x' = x/|x|$; $x \cdot y = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$; $dx = dx_1 \dots dx_n$; $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$; $\Sigma_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$; $\dot{\mathbb{R}}$ — компактификация $\mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $\mathbb{Z}_+$ — множество всех целых неотрицательных чисел; $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ — компактификация множества $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}$ одной бесконечно удаленной точкой; $Y_{m\mu}(\sigma)$ — сферические гармоники порядка m; $d_n(m)$ — размерность пространства сферических гармоник порядка m:

$$d_n(m) = (n + 2m - 2)\frac{(n + m - 3)!}{m!(n - 2)!};$$

$P_m(t)$ — многочлены Лежандра, определяемые следующим образом:

$$P_m(t) = \begin{cases} \cos(m \arccos t), & n = 2; \\ (C_{m+n-3}^m)^{-1} C_m^{(n-2)/2}(t), & n \geqslant 3, \end{cases}$$

где $C_m^{(n-2)/2}(t)$ — многочлены Гегенбауэра.

1. Пусть X и Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ и $\{Q_{\tau_1,\tau_2}\}$ $(0 < \tau_1 < 1,\ 1 < \tau_2 < \infty)$ — семейства проекторов, действующих в X и Y соответственно. Будем предполагать, что проекторы P_{τ_1,τ_2} и Q_{τ_1,τ_2} сходятся в сильной операторной топологии при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ к единичным операторам I_X и I_Y соответственно. Рассмотрим уравнение

$$Q_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2} x = Q_{\tau_1,\tau_2} y. \tag{1}$$

Определение 1. Будем говорить, что к оператору A применим проекционный метод по системе проекторов $(P_{\tau_1,\tau_2}; Q_{\tau_1,\tau_2})$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$, если

1) существуют такие числа $\delta_1 \in (0, 1)$ и $\delta_2 \in (1, \infty)$, что при всех $\tau_1 < \delta_1$ и $\tau_2 > \delta_2$ для любого $y \in Y$ уравнение (1) имеет единственное решение $x_{\tau_1,\tau_2} \in P_{\tau_1,\tau_2} X$;

2) при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ решение x_{τ_1,τ_2} стремится по норме пространства X к решению $x \in X$ уравнения $Ax = y$.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, проект № 00-01-00046а.

Класс операторов, к которым применим проекционный метод по системе проекторов $(P_{\tau_1,\tau_2}; Q_{\tau_1,\tau_2})$, обозначим через $\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}; Q_{\tau_1,\tau_2}\}$. Если $X = Y$ и $P_{\tau_1,\tau_2} = Q_{\tau_1,\tau_2}$, то будем писать $\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ вместо $\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}; P_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Определение 1 эквивалентно тому, что оператор A обратим, при $0 < \tau_1 < \delta_1$ и $\delta_2 < \tau_2 < \infty$ операторы $Q_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2}$ как операторы, действующие из $P_{\tau_1,\tau_2} X$ в $Q_{\tau_1,\tau_2} Y$, обратимы, и операторы $(Q_{\tau_1,\tau_2} A P_{\tau_1,\tau_2})^{-1} Q_{\tau_1,\tau_2}$ при $\tau_1 \to 0$ и $\tau_2 \to \infty$ сильно сходятся к A^{-1}.

Очевидно, все основные теоремы о проекционных методах, доказанные в [1] для случая однопараметрического семейства проекторов, сохраняют справедливость и для исследуемого здесь случая. В дальнейшем будем ссылаться на результаты [1], предполагая, что они переформулированы в соответствии с определением 1.

2. В пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, рассмотрим интегральный оператор

$$(K\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)\varphi(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

предполагая, что ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условиям

1°. однородности степени $(-n)$, т. е.

$$k(\alpha x, \alpha y) = \alpha^{-n} k(x,y) \quad \forall\, \alpha > 0;$$

2°. инвариантности относительно группы $SO(n)$ вращений пространства $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$k(\omega(x), \omega(y)) = k(x,y) \quad \forall\, \omega \in SO(n);$$

3°. суммируемости, т. е.

$$k = \int_{\mathbb{R}^n} |k(e_1, y)|\, |y|^{-n/p} dy < \infty.$$

Определим в $L_p(\mathbb{R}^n)$ проектор P по формуле

$$(P\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & |x| \leqslant 1; \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

и положим $Q = I - P$. Рассмотрим оператор

$$A = \lambda I - K_1 P - K_2 Q,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, а K_1 и K_2 — операторы вида (2). Символом оператора A назовем пару функций $(\sigma_1(m,\xi),\ \sigma_2(m,\xi))$, заданных на компакте $\mathbb{Z}_+ \dot{\times} \mathbb{R}$ равенствами

$$\sigma_j(m,\xi) = \lambda - \int_{\mathbb{R}^n} k_j(e_1, y) P_m(e_1 \cdot y') |y|^{-n/p + i\xi}\, dy, \quad j = 1, 2.$$

Далее, в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, определим проектор P_{τ_1,τ_2} $(0 < \tau_1 < 1,\ 1 < \tau_2 < \infty)$ по формуле

$$(P_{\tau_1,\tau_2}\varphi)(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \tau_1 < |x| < \tau_2; \\ 0, & |x| < \tau_1 \ \text{ или } \ |x| > \tau_2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $s - \lim\limits_{\substack{\tau_1 \to 0 \\ \tau_2 \to \infty}} P_{\tau_1,\tau_2} = I$.

Наша задача — изучить вопрос о применимости к оператору A проекционного метода по системе проекторов $(P_{\tau_1,\tau_2}; P_{\tau_1,\tau_2})$. Для этого в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ рассмотрим интегральное уравнение, порождаемое оператором A,

$$\lambda\varphi(x) = \int_{|y| \leqslant 1} k_1(x,y)\varphi(y)\,dy + \int_{|y| > 1} k_2(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{3}$$

Поскольку функция $k_j(x,y)$, $j=1,2$, удовлетворяет условию 2°, то существует такая функция $k_{0j}(r^2,\rho^2,t)$, что $k_j(x,y)=k_{0j}(|x|^2,|y|^2,x'\cdot y')$ ([6], с. 36). Учитывая это и переходя в уравнении (3) к сферическим координатам $x=r\sigma$, $y=\rho\theta$, получим

$$\lambda\Phi(r\sigma)=\int_0^1\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{1}{r}D_1\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta+$$
$$+\int_1^\infty\int_{\Sigma_{n-1}}\frac{1}{r}D_2\left(\frac{\rho}{r},\sigma\cdot\theta\right)\Phi(\rho\theta)\,d\rho\,d\theta+F(r\sigma),\quad (4)$$

где

$$\Phi(r\sigma)=\varphi(r\sigma)r^{(n-1)/p};\quad F(r\sigma)=f(r\sigma)r^{(n-1)/p},$$
$$D_j(\rho,t)=k_{0j}(1,\rho^2,t)\rho^{(n-1)/p'}.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^\infty\int_{-1}^1|D_j(\rho,t)|\rho^{-1/p}(1-t^2)^{(n-3)/2}d\rho\,dt<\infty.\quad (5)$$

Умножая уравнение (4) на $Y_{m\mu}(\sigma)$, интегрируя по единичной сфере и применяя формулу Функа–Гекке ([6], с. 43), получим бесконечную диагональную систему одномерных интегральных уравнений

$$\lambda\Phi_{m\mu}(r)=\int_0^1\frac{1}{r}D_{m1}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho+\int_1^\infty\frac{1}{r}D_{m2}\left(\frac{\rho}{r}\right)\Phi_{m\mu}(\rho)\,d\rho+F_{m\mu}(r),\quad r\in(0,\infty),\quad (6)$$

где $m\in\mathbb{Z}_+$, $\mu=1,2,\ldots,d_n(m)$,

$$\Phi_{m\mu}(r)=\int_{\Sigma_{n-1}}\Phi(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,\quad F_{m\mu}(r)=\int_{\Sigma_{n-1}}F(r\sigma)Y_{m\mu}(\sigma)\,d\sigma,$$
$$D_{mj}(r)=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-1}^1D_j(\rho,t)P_m(t)(1-t^2)^{(n-3)/2}\,dt,\quad j=1,2.$$

Рассмотрим в $L_p(0,\infty)$, $1<p<\infty$, оператор

$$(A_mg)(r)=\lambda g(r)-\int_0^1\frac{1}{r}D_{m1}\left(\frac{\rho}{r}\right)g(\rho)\,d\rho-\int_1^\infty\frac{1}{r}D_{m2}\left(\frac{\rho}{r}\right)g(\rho)\,d\rho,\quad r\in(0,\infty).$$

Из условия (5) сразу следует, что функция $D_{mj}(\rho)$, $j=1,2$, удовлетворяет условию суммируемости. Символом оператора A_m является пара функций $(\sigma_{m1}(\xi),\sigma_{m2}(\xi))$, заданных равенствами

$$\sigma_{mj}(\xi)=\lambda-\int_0^\infty D_{mj}(\rho)\rho^{-1/p+i\xi}d\rho,\quad \xi\in\mathbb{R},\quad j=1,2.$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, получаем

$$\sigma_{mj}(\xi)=\lambda-\int_{\mathbb{R}^n}k_j(e_1,y)P_m(e_1\cdot y')|y|^{-n/p+i\xi}dy,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

т. е. $\sigma_{mj}(\xi)=\sigma_j(m,\xi)$ при фиксированном значении m.

Лемма. *Если $A\in\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, то $A_m\in\Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для всех $m\in\mathbb{Z}_+$.*

Доказательство. Пусть $A\in\Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$. Тогда, как уже было отмечено выше, оператор A обратим, операторы $P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2}$ как операторы, действующие в $P_{\tau_1,\tau_2}(L_p(\mathbb{R}^n))$, обратимы для достаточно малых τ_1 и достаточно больших τ_2, и $s-\lim\limits_{\substack{\tau_1\to0\\ \tau_2\to\infty}}(P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2})^{-1}P_{\tau_1,\tau_2}=A^{-1}$.

Если оператор A обратим в $L_p(\mathbb{R}^n)$, то для любой функции $f(x)\in L_p(\mathbb{R}^n)$ уравнение (3) имеет единственное решение. Тогда, учитывая связь между уравнением (3) и системой (6), получаем, что каждое из уравнений системы (6) имеет единственное решение при любом свободном члене. Следовательно, оператор A_m обратим в $L_p(0,\infty)$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогично, если "усеченный" оператор $P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2}$ обратим в $P_{\tau_1,\tau_2}(L_p(\mathbb{R}^n))$, то и оператор $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}$ обратим в $\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}(L_p(0,\infty))$.

Наконец, из условия $s-\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to\infty}}(P_{\tau_1,\tau_2}AP_{\tau_1,\tau_2})^{-1}P_{\tau_1,\tau_2}{=}A^{-1}$ следует $s-\lim\limits_{\substack{\tau_1\to 0\\ \tau_2\to\infty}}(\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}A_m\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2})^{-1}\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}{=}$ A_m^{-1}. Значит, $A_m \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для всех $m \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

Основным результатом данной работы является

Теорема. *Для того чтобы оператор $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ $(\sigma_1(m,\xi),\ \sigma_2(m,\xi))$ удовлетворял условиям*

1) $\sigma_1(m,\xi) \neq 0,\ \sigma_2(m,\xi) \neq 0\ \forall (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$;
2) $\operatorname{ind}_\xi \sigma_1(m,\xi) = \operatorname{ind}_\xi \sigma_2(m,\xi) = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+$,

где $\operatorname{ind}_\xi f(m,\xi)$ — индекс функции $f(m,\xi)$ при фиксированном значении m.

Доказательство. Необходимость. Если $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, то по лемме оператор $A_m \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\}$ для любого $m \in \mathbb{Z}_+$. Учтем вид символа оператора A_m и применим легко проверяемую эквивалентность

$$H \in \Pi\{\widetilde{P}_{\tau_1,\tau_2}\} \iff \{\sigma_k(\xi) \neq 0\ \forall \xi \in \dot{\mathbb{R}};\ \operatorname{ind}\sigma_k(\xi) = 0,\ k = 1,2\},$$

где $\{\sigma_1(\xi),\sigma_2(\xi)\}$ — символ оператора H. Тем самым получили условия 1) и 2).

Достаточность. Представим оператор A в виде

$$A = P(\lambda I - K_1)P + Q(\lambda I - K_2)Q + T,$$

где $T = -QK_1P - PK_2Q$. Поскольку для любого оператора K вида (2) операторы PKQ и QKP являются компактными в $L_p(\mathbb{R}^n)$ [4], то T — компактный оператор. Положим $A_0 = P(\lambda I - K_1)P + Q(\lambda I - K_2)Q$ и покажем, что $A_0 \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$. Введем обозначения

$$\begin{gathered}\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_1 = P(\lambda I - K_1)P\big|_{\operatorname{im} P} = A_0\big|_{\operatorname{im} P},\\ \lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_2 = Q(\lambda I - K_2)Q\big|_{\operatorname{im} Q} = A_0\big|_{\operatorname{im} Q},\\ \mathcal{P}_{\tau_1} = P_{\tau_1,\tau_2}\big|_{\operatorname{im} P},\quad \mathcal{P}_{\tau_2} = P_{\tau_1,\tau_2}\big|_{\operatorname{im} Q}.\end{gathered}$$

Так как $\sigma_1(m,\xi) \neq 0\ \forall (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$ и $\operatorname{ind}_\xi \sigma_1(m,\xi) = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+$, то оператор $\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_1$ обратим [4]. Тогда $\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_1 \in \Pi\{\mathcal{P}_{\tau_1}\}$ [5]. Аналогично доказывается, что $\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_2 \in \Pi\{\mathcal{P}_{\tau_2}\}$. В силу теоремы о поблочной применимости проекционного метода ([1], с. 93) оператор $A_0 \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$.

Далее, из условий 1) и 2) теоремы следует, что оператор A обратим. Поскольку $A_0 \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$ и оператор $A = A_0 + T$ обратим, то по теореме о возмущении компактным оператором ([1], с. 94) оператор $A \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$. $\square$

В заключение приведем критерий применимости проекционного метода к оператору $\lambda I - K$, где K определяется из (2). Учитывая, что $\lambda I - K = \lambda I - KP - KQ$, и применяя теорему, получаем

Следствие. Для того чтобы оператор $\lambda I - K \in \Pi\{P_{\tau_1,\tau_2}\}$, необходимо и достаточно, чтобы его символ $\sigma(m,\xi)$ удовлетворял условиям

1) $\sigma(m,\xi) \neq 0\ \forall (m,\xi) \in \mathbb{Z}_+\dot{\times}\mathbb{R}$,
2) $\operatorname{ind}_\xi \sigma(m,\xi) = 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+$.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Фельдман И. А. *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.
2. Böttcher A., Silbermann B. *Analysis of Toeplitz operators.* – Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. – 1990. – 512 p.
3. Prößdorf S., Silbermann B. *Numerical analysis for integral and related operator equations.* – Birkhäuser Verlag. Basel, Boston, Berlin. – 1991. – 476 p.
4. Авсянкин О.Г. *Многомерные интегральные операторы с однородными ядрами*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Ростов-на-Дону, 1997. – 145 с.
5. Авсянкин О.Г., Карапетянц Н.К. *Многомерные интегральные операторы с однородными степени $(-n)$ ядрами* // Докл. РАН. – 1999. – Т. 368. – № 6. – С. 727–729.
6. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. *Уравнения с инволютивными операторами и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1988. – 192 с.
7. Самко С.Г. *Гиперсингулярные интегралы и их приложения.* – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовск. ун-та, 1984. – 208 с.

Ростовский государственный
университет

Поступила
14.06.2001