ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.544

Н.Р. АБУБАКИРОВ

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В теории обратных краевых задач (ОКЗ) построены решения этих задач в том случае, когда неизвестная функция $w(z)$, $z = x+iy$, на границе L_z неизвестной области D_z задана как функция от x, s — длины дуги L_z, $\theta = \arg z$ [1] или как функция от двух параметров (x, y), (y, θ) [2]. В данной работе рассмотрен случай трех параметров (x, y, θ) и (y, x, θ) для внутренней и внешней ОКЗ в односвязной области.

Рассмотрим вначале внутреннюю ОКЗ в следующей постановке (всюду в дальнейшем считаем $0 \le \theta = \arg z < 2\pi \ \forall z \in \mathbf{C}$).

Требуется определить конечную односвязную область D_z и аналитическую в этой области функцию $w(z)$, непрерывно продолжимую на границу L_z, если $L_z = L_z^1 \cup L_z^2 \cup L_z^3$ и известны граничные значения функции $w(z)$:

$$\begin{array}{ll} w(z)\mid_{z\in L_z^1} = \varphi_1(\tau) + i\psi_1(\tau), & 0 \le \tau \le l_1; \\ w(z)\mid_{z\in L_z^2} = \varphi_2(K\sigma) + i\psi_2(K\sigma), & 0 \le \sigma \le l_2, \\ K = 1 \text{ при заданном } l_2, & K = 1/l_2 \text{ при неизвестном } l_2; \\ w(z)\mid_{z\in L_z^3} = \varphi_3(\theta) + i\psi_3(\theta), & 0 < \alpha_1\pi \le \theta \le \alpha_2\pi \le \pi/2. \end{array} \tag{1}$$

Здесь константы α_1, α_2 задаются заранее, а l_1 и l_2 определим позднее. Из постановки задачи следует, что $z = 0$ является точкой стыка дуг L_z^1 и L_z^2, поэтому $0 \notin L_z^3$. Функции φ_k и ψ_k, $k = 1, 2, 3$, предполагаются однозначными гельдеровыми функциями своих аргументов. Будем считать, что правые части равенств (1) являются параметрическими уравнениями кривой Ляпунова L_w, которая ограничивает конечную односвязную область D_w. Установим на L_z и L_w положительное направление обхода, при котором области D_z и D_w остаются слева. При таком обходе обозначим начальные точки дуг L_z^k через z_k. Соответствующие им точки на границе L_w будем обозначать через w_k, а соответствующие им дуги — через L_w^k.

Пусть $\tau = x$, $\sigma = y$. В этом случае считаем l_1 фиксированной, а l_2 пока неопределенной константой. Такую задачу назовем внутренней ОКЗ (1A). Если же $\tau = y$, $\sigma = x$, то $l_1, l_2 > 0$ считаем заранее фиксированными, и такую задачу назовем внутренней ОКЗ (1B).

Приступим к решению задачи (1A). Отобразим область D_w на внутренность единичного круга $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ во вспомогательной плоскости ζ с помощью функции $\zeta = \zeta(w)$, причем для единственности указанного отображения точкам w_1, w_2, w_3 поставим в соответствие точки i, -1 и $-i$. Обозначим $L_\zeta = \{e^{i\gamma} : 0 \le \gamma \le 2\pi\}$. Из сопоставления L_z и единичной окружности L_ζ определим зависимости $x(\gamma)$, $\widehat{y}(\gamma)$ и $\theta(\gamma)$ соответственно на дугах $L_\zeta^1 = \{e^{i\gamma} : \pi/2 \le \gamma \le \pi\}$, $L_\zeta^2 = \{e^{i\gamma} : \pi \le \gamma \le 3\pi/2\}$ и $L_\zeta^3 = L_{\zeta 0}^3 \bigcup L_{\zeta 1}^3$, где $L_{\zeta 0}^3 = \{e^{i\gamma} : 0 \le \gamma \le \pi/2\}$, $L_{\zeta 1}^3 = \{e^{i\gamma} : 3\pi/2 \le \gamma \le 2\pi\}$. В этом случае для однозначной аналитической функции $z(\zeta)$, отображающей D_ζ на искомую область D_z и понимаемой в дальнейшем как решение исходной задачи, получим краевую задачу

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z(e^{i\gamma}) = x(\gamma), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^1; \\ \operatorname{Im} z(e^{i\gamma}) = l_2\widehat{y}(\gamma), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^2; \\ \arg z(e^{i\gamma}) = \theta(\gamma), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^3. \end{cases} \tag{2}$$

Так как

$$\arg z(e^{i\gamma}) = \theta(\gamma) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left[e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta(\gamma))}z(e^{i\gamma})\right] = 0,$$

то (2) представляет собой краевую задачу Гильберта с разрывными коэффициентами. Поскольку искомая область D_z конечна, то функция $z(\zeta)$ в окрестности точек стыка i, -1, $-i$ должна быть ограниченной. Будем решать задачу (2) методом регуляризующего множителя, изложенным в работе [5]. Для этого запишем (2) в виде одного краевого условия

$$\mathrm{Re}[e^{-i\nu(\gamma)}z(e^{i\gamma})] = c(\gamma), \tag{3}$$

где

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} 2\pi k, & e^{i\gamma} \in L^1_\zeta; \\ \pi/2 + 2\pi l, & e^{i\gamma} \in L^2_\zeta; \\ \theta(\gamma) - \pi/2 + 2\pi m_j, & e^{i\gamma} \in L^3_{\zeta j}, \end{cases} \qquad c(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma), & e^{i\gamma} \in L^1_\zeta; \\ l_2\widehat{y}(\gamma), & e^{i\gamma} \in L^2_\zeta; \\ 0, & e^{i\gamma} \in L^3_\zeta. \end{cases} \tag{4}$$

В дальнейшем для функции $f(\gamma)$, заданной на L_ζ, под $f(\gamma_0 - 0)$ и $f(\gamma_0 + 0)$ будем понимать пределы, к которым стремится $f(\gamma)$, когда точка $e^{i\gamma}$ стремится к $e^{i\gamma_0}$ в положительном или отрицательном направлении соответственно.

Теперь приступим к вычислению индекса задачи (3). Для этого на интервале $(0, \pi/2)$ ветвь функции $\nu(\gamma)$ зафиксируем условием $\nu(\gamma) = \theta(\gamma) - \pi/2$, т. е. $m_0 = 0$. Тогда $\nu(0+0) = \theta(0) - \pi/2$. При переходе через каждую точку стыка ветвь $\nu(\gamma)$ будем выбирать так, чтобы $0 \le \delta_k = \nu(\gamma_k + 0) - \nu(\gamma_k - 0) < 2\pi$. Согласно этому правилу и с учетом того, что $0 < \theta(\gamma) < \pi/2$, будем иметь

$$0 \le \delta_1 = \nu(\pi/2 + 0) - \nu(\pi/2 - 0) = 2\pi k - (\theta(\pi/2) - \pi/2) < 2\pi.$$

Значит, надо положить $k = 0$. Тогда $\nu(\pi - 0) = 0$. Далее

$$0 \le \delta_2 = \nu(\pi + 0) - \nu(\pi - 0) = \pi/2 + 2\pi l - 0 < 2\pi.$$

И здесь полагаем $l = 0$, а $\nu(3\pi/2 - 0) = \pi/2$. Наконец,

$$0 \le \delta_3 = \nu(3\pi/2 + 0) - \nu(3\pi/2 - 0) = \theta(3\pi/2) - \pi/2 + 2\pi m - \pi/2 < 2\pi.$$

В этом случае следует взять $m_1 = 1$, поэтому $\nu(0-0) = \theta(2\pi) - \pi/2 + 2\pi$. В силу 2π-периодичности функции $\theta(\gamma)$

$$\nu(0-0) - \nu(0+0) = \theta(2\pi) - \pi/2 + 2\pi - (\theta(0) - \pi/2) = 2\pi.$$

Рассмотрим функцию $\phi(\gamma) = \nu(\gamma) - \beta(\gamma)\pi$, где $\beta(\gamma)$ — кусочно-постоянная функция. Вначале зафиксируем ее значение $\beta_0 = 0$ на интервале $(0, \pi/2)$. Поскольку отыскивается решение задачи (3), ограниченное вблизи всех точек стыка, то значения $\beta(\gamma)$ должны выбираться так, чтобы $-\pi < \phi(\gamma_k + 0) - \phi(\gamma_k - 0) < 0$. Для этого достаточно положить $\beta(\gamma) = 1$ на интервале $(\pi/2, \pi)$, $\beta(\gamma) = 2$ на интервале $(\pi, 3\pi/2)$ и $\beta(\gamma) = 4$ на интервале $(3\pi/2, 2\pi)$. При обходе L_ζ в положительном направлении функция $\phi(\gamma)$ получит приращение $\delta_0 = 2\pi - 4\pi = -2\pi$. Число $\varkappa = \delta_0/\pi = -2$ является индексом задачи (3), отвечающим данному классу решений.

Перепишем условие (3) в виде

$$\mathrm{Re}[\exp\{-i(\phi(\gamma) + \gamma)\}z(e^{i\gamma})e^{i\gamma}] = c(\gamma)\cos(\beta(\gamma)\pi). \tag{5}$$

Функция, определенная формулой Шварца

$$\Gamma(\zeta) = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\phi(\gamma) + \gamma]\frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta}d\gamma, \tag{6}$$

принимает значение $\Gamma^+(e^{i\gamma}) = \Gamma_0(e^{i\gamma}) + i[\phi(\gamma) + \gamma]$ при $\zeta \to e^{i\gamma}$ из D_ζ, причем

$$\Gamma_0(e^{i\gamma}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\phi(s) + s]\,\mathrm{ctg}\,\frac{s - \gamma}{2}ds. \tag{7}$$

Умножая условие (5) на регуляризующий множитель $\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})]$, получим

$$\mathrm{Re}[\exp[-\Gamma^+(e^{i\gamma})]z(e^{i\gamma})e^{i\gamma}] = c(\gamma)\cos(\beta(\gamma)\pi)\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] \equiv c_1(\gamma). \tag{8}$$

Пришли к задаче Шварца о нахождении аналитической в D_ζ функции $\zeta z(\zeta)\exp[-\Gamma(\zeta)]$, обращающейся в нуль в точке $\zeta = 0$. Ее решение определяется формулой

$$\zeta z(\zeta)\exp[-\Gamma(\zeta)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma$$

с условием

$$\int_0^{2\pi} c_1(\gamma)d\gamma = 0. \tag{9}$$

Отсюда

$$z(\zeta) = \frac{\exp\Gamma(\zeta)}{\zeta}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c_1(\gamma)\frac{e^{i\gamma}+\zeta}{e^{i\gamma}-\zeta}d\gamma\right\}. \tag{10}$$

С учетом формул (4), (8) и значений функции $\beta(\gamma)$ на окружности L_ζ условие (9) перепишем в виде

$$-\int_{\pi/2}^{\pi} x(\gamma)\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})]d\gamma + \int_{\pi}^{3\pi/2} l_2\widehat{y}(\gamma)\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})]d\gamma = 0. \tag{11}$$

Так как $0 \le x(\gamma) \le l_1$, то справедливо соотношение $x(\gamma) = l_1\widehat{x}(\gamma)$, где $0 \le \widehat{x}(\gamma) \le 1$. Поэтому формулу (11) представим следующим образом:

$$-l_1\int_{\pi/2}^{\pi} \widehat{x}(\gamma)\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})]d\gamma + l_2\int_{\pi}^{3\pi/2} \widehat{y}(\gamma)\exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})]d\gamma = 0. \tag{12}$$

Так как подинтегральные функции в (12) неотрицательны, то при заданной величине $l_1 > 0$ постоянная $l_2 > 0$ определится однозначно. Таким образом, при наборе параметров (x, y, θ) задача (1A) является разрешимой.

Теперь рассмотрим задачу (1B). Как будет показано в дальнейшем, задача (1) при таком наборе параметров отличается от только что рассмотренной. Аналогичным образом приведем ее к задаче (3) для $z(\zeta)$, в которой функции $\nu(\gamma)$ и $c(\gamma)$ в отличие от формул (4) определяются в виде

$$\nu(\gamma) = \begin{cases} \pi/2 + 2\pi k, & e^{i\gamma} \in L_\zeta^1; \\ 2\pi l, & e^{i\gamma} \in L_\zeta^2; \\ \theta(\gamma) - \pi/2 + 2\pi m_j, & e^{i\gamma} \in L_{\zeta j}^3, \end{cases} \qquad c(\gamma) = \begin{cases} y(\gamma), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^1; \\ x(\gamma), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^2; \\ 0, & e^{i\gamma} \in L_\zeta^3. \end{cases} \tag{13}$$

Подсчитаем индекс задачи (3) в этом случае. На интервале $(0, \pi/2)$ положим $\nu(\gamma) = \theta(\gamma) - \pi/2$, т. е. $m_0 = 0$. Тогда $\nu(0+0) = \theta(0) - \pi/2$. Далее

$$0 \le \delta_1 = \nu(\pi/2+0) - \nu(\pi/2-0) = \pi/2 + 2\pi k - (\theta(\pi/2) - \pi/2) < 2\pi.$$

Значит, нужно положить $k = 0$. Тогда $\nu(\pi - 0) = \pi/2$,

$$0 \le \delta_2 = \nu(\pi+0) - \nu(\pi-0) = 2\pi l - \pi/2 < 2\pi.$$

Здесь полагаем $l = 1$, а $\nu(3\pi/2 - 0) = 3\pi/2$. Наконец,

$$0 \le \delta_3 = \nu(3\pi/2+0) - \nu(3\pi/2-0) = \theta(3\pi/2) - \pi/2 + 2\pi m - 2\pi < 2\pi.$$

В этом случае необходимо взять $m_1 = 2$, поэтому $\nu(0-0) = \theta(2\pi) - \pi/2 + 4\pi$. Следовательно,

$$\nu(0-0) - \nu(0+0) = \theta(2\pi) - \pi/2 + 4\pi - (\theta(0) - \pi/2) = 4\pi.$$

Аналогично предыдущему вводим функцию $\phi(\gamma) = \nu(\gamma) - \beta(\gamma)\pi$, причем теперь значения $\beta(\gamma)$ определяются так:

$$\beta(\gamma) = \begin{cases} 0, & \gamma \in (0, \pi/2); \\ 1, & \gamma \in (\pi/2, \pi); \\ 3, & \gamma \in (\pi, 3\pi/2); \\ 5, & \gamma \in (3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Приращение функции $\phi(\gamma)$ при положительном обходе L_ζ окажется равным $4\pi - 5\pi = -\pi$, поэтому $\varkappa = -1$. Условие (5) теперь заменится следующим:

$$\mathrm{Re}[\exp\{-i(\phi(\gamma) + p(\gamma))\} z(e^{i\gamma})(e^{i\gamma} - 1)] = c(\gamma)|e^{i\gamma} - 1| \cos(\beta(\gamma)\pi), \tag{14}$$

где $p(\gamma) = \arg(e^{i\gamma} - 1) = (\pi + \gamma)/2$ и при положительном обходе L_ζ получает приращение π. Формула (6) примет вид

$$\Gamma(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\phi(\gamma) + p(\gamma)] \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma. \tag{15}$$

Значит, $\Gamma^+(e^{i\gamma}) = \Gamma_0(e^{i\gamma}) + i[\phi(\gamma) + p(\gamma)]$, где функция $\Gamma_0(e^{i\gamma})$ определяется формулой (7), в которой вместо s надо подставить $p(s)$. Задача Шварца (8) теперь выглядит так:

$$\mathrm{Re}[\exp[-\Gamma^+(e^{i\gamma})] z(e^{i\gamma})(e^{i\gamma} - 1)] = |e^{i\gamma} - 1| c(\gamma) \cos(\beta(\gamma)\pi) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] \equiv c_2(\gamma). \tag{16}$$

Следовательно, искомая функция $z(\zeta)$ имеет вид

$$z(\zeta) = \frac{\exp \Gamma(\zeta)}{\zeta - 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iB_0 \right\}. \tag{17}$$

Для получения конечной области D_z необходимо потребовать, чтобы граничное значение функции, стоящей в фигурных скобках формулы (17), в точке $\zeta = 1$ обращалось в нуль. Из этого условия с учетом $c_2(0) = 0$ имеем

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} d\gamma. \tag{18}$$

Тогда формулу (17) можно переписать в виде

$$z(\zeta) = \exp \Gamma(\zeta) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\gamma} c_2(\gamma)}{e^{i\gamma} - 1} \frac{d\gamma}{e^{i\gamma} - \zeta}. \tag{19}$$

Формула (19) и дает решение задачи (3) при $\tau = y$, $\sigma = x$. Следовательно, при наборе параметров (y, x, θ) является разрешимой задача (1B).

Исходя из геометрических соображений, поясним тот факт, что внутренняя ОКЗ (1) в первом случае — при чередовании параметров (x, y, θ) после ее сведения к задаче Гильберта (3) имеет индекс на единицу меньший, чем аналогичная задача в случае набора параметров (y, x, θ). Область по параметрам (y, x, θ) получается как топологический образ четверти единичного круга, лежащего в первом квадранте, с заданным положительным обходом, и при этой деформации его ориентация не меняется. В случае параметров (x, y, θ) указанная четверть круга вначале должна подвергнуться симметрии относительно луча $\arg z = \pi/4$, затем смене ориентации на противоположную, и лишь затем она может быть топологически преобразована в нужную область. Именно эта симметрия и последующая смена ориентации приводят к уменьшению индекса задачи (3) на единицу и появлению дополнительного условия (10).

Так как функция $z(\zeta)$ ограничена в окрестности точек i, 1, $-i$, L_ζ — гладкий контур и $x(\gamma)$, $y(\gamma)$ и $\theta(\gamma)$ являются гельдеровскими функциями, то $z(\zeta)$ непрерывно продолжима на границу L_ζ ([3], с. 131). Этим же свойством обладает и функция $\zeta(w)$, осуществляющая вспомогательное отображение D_w на D_ζ. Тогда $w(z) = z^{-1}[\zeta^{-1}(w)]$ также непрерывна в $\overline{D}_z$, что и требовалось.

Точки z_1, z_2, z_3 являются угловыми точками области D_z. Обозначим внутренние углы в этих точках через $\psi_1\pi$, $\psi_2\pi$ и $\psi_3\pi$ соответственно. Из геометрических построений видно, что в случае набора (y, x, θ)

$$0 \le \psi_1 < 3/2 + \alpha_2, \quad 0 \le \psi_2 \le 1/2, \quad 0 \le \psi_3 < 2 - \alpha_1,$$

а в случае набора (x, y, θ)

$$0 \le \psi_1 < 1 + \alpha_2, \quad 0 \le \psi_2 \le 1/2, \quad 0 \le \psi_3 < 3/2 - \alpha_1.$$

Докажем теперь, что решение задачи (1) как для набора (x, y, θ), так и для набора (y, x, θ) единственно. Доказательство проведем методом от противного. Для определенности будем считать, что рассматривается набор (x, y, θ), и предположим, что существуют два различных решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$ этой задачи, которым отвечают две различные функции $z_1(\zeta)$ и $z_2(\zeta)$ задачи (2), т. е.

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z_k(e^{i\gamma}) = x(\gamma), & e^{i\gamma} \in L^1_\zeta; \\ \operatorname{Im} z_k(e^{i\gamma}) = y(\gamma), & e^{i\gamma} \in L^2_\zeta; \\ \arg z_k(e^{i\gamma}) = \theta(\gamma), & e^{i\gamma} \in L^3_\zeta, \quad k = 1, 2. \end{cases} \tag{20}$$

Рассмотрим регулярную функцию $\widetilde{z}(\zeta) = z_1(\zeta) - z_2(\zeta) \not\equiv 0$. В силу линейности первых двух краевых условий задачи (20) функция $\widetilde{z}(\zeta)$ отображает L^1_ζ на конечную часть границы $L^1_{\widetilde{z}}$, полностью лежащую на мнимой оси, а L^2_ζ — на конечную часть границы $L^2_{\widetilde{z}}$, полностью лежащую на вещественной оси. Если же $e^{i\gamma} \in L^3_\zeta$, то

$$\widetilde{z}(e^{i\gamma}) = |z_1(\gamma)|e^{i\theta(\gamma)} - |z_2(\gamma)|e^{i\theta(\gamma)} = (|z_1(\gamma)| - |z_2(\gamma)|)\, e^{i\theta(\gamma)}.$$

Положим $\widetilde{r}(\gamma) = |z_1(\gamma)| - |z_2(\gamma)|$. В случае, если величина $\widetilde{r}(\gamma)$ сохраняет знак, образ части границы L^3_ζ при отображении функцией $\widetilde{z}(\zeta)$ представляет собой петлеобразную кривую с началом в нуле, лежащую в секторе $\{\alpha_1\pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_2\pi\}$ при $\widetilde{r} > 0$ и в секторе $\{\alpha_1\pi + \pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_2\pi + \pi\}$ при $\widetilde{r} < 0$.

Предположим теперь, что в некоторой точке $e^{i\gamma_0}$ дуги L^3_ζ, отличной от ее концов, $\widetilde{r}(\gamma_0) = 0$ и $\arg\widetilde{z}(e^{i\gamma_0}) = \alpha_0\pi$. Тогда возможны два случая.

1) В точке $e^{i\gamma_0}$ $\widetilde{r}(\gamma)$ меняет знак, предположим с положительного на отрицательный. Тогда образ L^3_ζ представляет собой две петлеобразные кривые, одна из которых лежит в секторе $\{\alpha_1\pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_0\pi\}$, а другая – в секторе $\{\alpha_0\pi + \pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_2\pi + \pi\}$.

2) В точке $e^{i\gamma_0}$ $\widetilde{r}(\gamma)$ не меняет знака, оставаясь, например, положительной. В этом случае образом L^3_ζ будут две петлеобразные кривые, лежащие в соседних секторах $\{\alpha_1\pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_0\pi\}$ и $\{\alpha_0\pi \le \arg\widetilde{z} \le \alpha_2\pi\}$.

В том случае, когда точек $e^{i\gamma}$, в которых $\widetilde{r}(\gamma) = 0$, больше, чем одна, картина образа L^3_ζ получается комбинацией двух рассмотренных случаев.

Теперь для малого $\varepsilon > 0$ рассмотрим точку $\zeta_0 = (1 - \varepsilon)e^{\frac{3\pi i}{4}}$, которая является внутренней точкой области D_ζ. Согласно принципу сохранения области образ $\widetilde{z}_0$ этой точки также должен являться внутренней точкой области $D_{\widetilde{z}} = \widetilde{z}(D_\zeta)$, лежащей вблизи границы $L^1_{\widetilde{z}}$. Рассмотрим величину $(2\pi)^{-1}\Delta\arg[\widetilde{z}(\zeta) - \widetilde{z}_0]$, когда точка ζ пробегает единичную окружность L_ζ. Поскольку функция $\widetilde{z}(\zeta)$ регулярна, то с одной стороны, по принципу аргумента эта величина равна числу корней уравнения $\widetilde{z}(\zeta) - \widetilde{z}_0 = 0$ в области D_ζ, т. е. больше или равна 1. С другой стороны, вектор $\widetilde{z}(\zeta) - \widetilde{z}_0$ при обходе L_z возвращается в первоначальное положение, не получив приращения, т. е. $\Delta\arg[\widetilde{z}(\zeta) - \widetilde{z}_0] = 0$. Полученное противоречие приводит к тому, что $\widetilde{z}(\zeta) \equiv 0$, т. е. $z_1(\zeta) \equiv z_2(\zeta)$. Аналогично доказывается единственность решения задачи в случае набора (y, x, θ).

Докажем теперь однолистность области D_z, являющейся образом единичного круга D_ζ при отображении функцией $z(\zeta)$. Вновь для определенности предположим, что рассматривается набор (x, y, θ), значит, функция $z(\zeta)$ определяется формулой (9).

Так как контур L_w по предположению является кривой Ляпунова, то $w'(e^{i\gamma})$ не обращается в нуль и удовлетворяет условию Гёльдера ([4], с. 117). Поэтому функции $x(\gamma)$, $y(\gamma)$ и $\theta(\gamma)$ являются монотонными, а значит, соответствующие участки L^1_z, L^2_z и L^3_z границы области D_z не

будут иметь самопересечений. После этого над участками L_z^1 и L_z^2 можно построить достаточно большие П-образные кривые C_1 и C_2, не имеющие с областью $\overline{D}_z$ общих точек, за исключением концов, лежащие в полосах $\{0 \le \operatorname{Re} z \le l_1\}$ и $\{0 \le \operatorname{Im} z \le l_2\}$ соответственно и, следовательно, не пересекающиеся друг с другом. Тогда однолистность области D_z является следствием принципа аргумента ([6], с. 5). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Внутренняя ОКЗ* (1A) *в случае набора* (y, x, θ) *безусловно разрешима и ее решение определяется по формуле* (19), *а в случае набора* (x, y, θ) *безусловно разрешима задача* (1B) *и ее решение определяется по формуле* (10).

Рассмотрим теперь внешнюю ОКЗ в постановке Нужина ([1], с. 34). В этом случае требуется отыскать область D_z, содержащую бесконечно удаленную точку, и функцию $w(z)$, аналитическую в этой области и непрерывно продолжимую на ее границу, если граничные значения $w(z)$ определяются по формулам (1), а положение точки $w_0 = w(\infty)$ задается заранее. Константы α_1, α_2, l_1 и l_2 фиксируем и будем коротко называть эту задачу внешней ОКЗ (1).

Пусть $\tau = x$, $\sigma = y$. Отобразим с помощью функции $w = w(\zeta)$ область D_w на внутренность единичного круга D_ζ с соответствием точек $w_1 \to i$, $w_0 \to 0$. Тогда $w_2 \to e^{i\gamma_2}$, $w_3 \to e^{i\gamma_3}$, причем без ограничения общности можно считать, что $\gamma_2 < \gamma_3 < 2\pi$(в противном случае этого можно добиться соответствующим поворотом единичного круга D_ζ). Таким образом, для аналитической в D_ζ функции $z(\zeta)$, за исключением точки $\zeta = 0$, где она имеет простой полюс, получается краевая задача (2). Будем отыскивать эту функцию в виде $z(\zeta) = \Phi(\zeta) + C/\zeta$, где $\Phi(\zeta)$ — новая неизвестная аналитическая в D_ζ функция, $C = A + iB$ — пока неопределенная комплексная постоянная, являющаяся вычетом в нуле искомой функции.

Для нахождения $\Phi(\zeta)$ получаем краевую задачу (3), где $\nu(\gamma)$ определяется по формуле (4), а

$$c(\gamma) = \begin{cases} \widetilde{x}(\gamma) = x(\gamma) - \operatorname{Re}(C/e^{i\gamma}), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^1; \\ \widetilde{y}(\gamma) = y(\gamma) - \operatorname{Im}(C/e^{i\gamma}), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^2; \\ \operatorname{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta(\gamma))} C/e^{i\gamma}\right), & e^{i\gamma} \in L_\zeta^3. \end{cases}$$

Так как индекс этой задачи по-прежнему равен -2, то $\Phi(\zeta)$ определяется по формуле

$$\Phi(\zeta) = \frac{\exp \Gamma(\zeta)}{\zeta} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_1(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma \tag{21}$$

с выполнением условия разрешимости (9), которое примет вид

$$-\int_{\pi/2}^{\gamma_2} \widetilde{x}(\gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma + \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} \widetilde{y}(\gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma + \\ \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\gamma_3}^{2\pi} \right) \operatorname{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta(\gamma))} C/e^{i\gamma}\right) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma = 0. \tag{22}$$

Так как $\widetilde{x(\gamma)} = x(\gamma) - (A\cos\gamma + B\sin\gamma)$, $\widetilde{y(\gamma)} = y(\gamma) - (B\cos\gamma - A\sin\gamma)$, а $\operatorname{Re}\left(e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta(\gamma))} C/e^{i\gamma}\right) = B\cos(\theta(\gamma) + \gamma) - A\sin(\theta(\gamma) + \gamma)$, то введя обозначения

$$K_1 = \int_{\pi/2}^{\gamma_2} \widetilde{x}(\gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma, \quad K_2 = \int_{\pi/2}^{\gamma_2} \cos\gamma \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

$$K_3 = \int_{\pi/2}^{\gamma_2} \sin\gamma \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

$$L_1 = \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} \widetilde{y}(\gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma, \quad L_2 = \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} \cos\gamma \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

$$L_3 = \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} \sin\gamma \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

$$M_1 = \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\gamma_3}^{2\pi} \right) \cos(\theta(\gamma) + \gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

$$M_2 = \left(\int_0^{\pi/2} + \int_{\gamma_3}^{2\pi} \right) \sin(\theta(\gamma) + \gamma) \exp[-\Gamma_0(e^{i\gamma})] d\gamma,$$

перепишем условие (22) в виде

$$(K_2 + L_3 + M_2)A + (K_3 - L_2 + M_1)B + (L_1 - K_1) = 0. \tag{23}$$

Это означает, что константа C в плоскости $A + iB$ должна лежать на прямой с уравнением (23).

Совершенно аналогично решается задача в случае $\tau = y$, $\sigma = x$. Если вновь искать $z(\zeta)$ в виде $z(\zeta) = \Phi(\zeta) + C/\zeta$, то $\Phi(\zeta)$ будет определяться по формуле

$$\Phi(\zeta) = \frac{\exp \Gamma(\zeta)}{\zeta - 1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(\gamma) \frac{e^{i\gamma} + \zeta}{e^{i\gamma} - \zeta} d\gamma + iB_0 \right\}, \tag{24}$$

где $B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c_2(\gamma) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} d\gamma$.

Если рассматривать задачу по параметрам (x, y, θ), то изменению величин A и B при выполнении условия (23) соответствует движение участков L_z^1, L_z^2 и L_z^3, которое не выводит их за пределы полос $P_1 = \{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le l_1\}$, $P_2 = \{z : 0 \le \operatorname{Im} z \le l_2\}$ и сектора $\{z : \alpha_1 \pi \le \arg z \le \alpha_2 \pi\}$ и не влияет на вещественную часть, мнимую часть и аргумент функции $z(\zeta)$ на дугах L_ζ^1, L_ζ^2 и L_ζ^3 соответственно. Аналогичные рассуждения, но без ограничений на константы A и B справедливы и для задачи по параметрам (y, x, θ) с перестановкой полос P_1 и P_2 и заменой вещественной части $z(\zeta)$ на мнимую, а мнимой части $z(\zeta)$ на вещественную соответственно на дугах L_ζ^1 и L_ζ^2.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Решение внешней ОКЗ* (1) *по параметрам* (x, y, θ) *дается формулой* $z(\zeta) = \Phi(\zeta) + C/\zeta$, *где* $\Phi(\zeta)$ *определяется по формуле* (21), *а* A *и* B *удовлетворяют условию* (23). *Решение внешней ОКЗ* (1) *по параметрам* (y, x, θ) *дается той же формулой* $z(\zeta) = \Phi(\zeta) + C/\zeta$, *где* $\Phi(\zeta)$ *определяется по формуле* (24), *а константа* C *является произвольной.*

В заключение автор выражает благодарность проф. Аксентьеву Л.А. за полезные замечания при работе над статьей.

Литература

1. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – 333 с.
2. Абубакиров Н.Р., Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Внешняя обратная краевая задача при комбинировании двух параметров из декартовых координат и полярного угла* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 3–10.
3. Обносов Ю.В. *Решение смешанной краевой задачи теории аналитических функций* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1982. – Вып. 19. – С. 122–132.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1973. – 736 с.
5. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1979. – Вып. 16. – С. 149–162.
6. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // УМН. – 1975. – Т. 30. – Вып. 4. – С. 4–60.

Казанский государственный университет

Поступила 24.11.2004