ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 514.76

И.Г. ШАНДРА

О КОНЦИРКУЛЯРНЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЯХ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Введение

Данная статья представляет собой продолжение серии работ [1]–[3] автора, посвященных изучению конциркулярных полей и их взаимосвязи со свойствами псевдоримановых пространств, допускающих геодезические отображения. В первом параграфе построен аналог понятия "конциркулярное поле" для тензорных полей произвольной валентности. Второй параграф посвящен выделению замкнутых относительно геодезических отображений классов псевдоримановых пространств, допускающих конциркулярные тензорные поля. В третьем параграфе дается решение проблемы о распределении степеней геодезической подвижности для римановых пространств. Исследования ведутся локально, в классе достаточно гладких функций.

1. Конциркулярные тензорные поля на псевдоримановых пространствах

1. Пусть $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — n-мерное псевдориманово пространство, $f(M)$ — модуль дифференцируемых функций на M, $X(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M, ∇ — риманова связность, соответствующая метрике g.

Определение 1. Ковекторное поле t на M называется *конциркулярным*, если

$$(\nabla_Z\phi)(X) = \rho\langle X, Z\rangle \quad \forall X, Z \in X(M), \tag{1}$$

где ρ — некоторое скалярное поле.

Если к тому же имеет место условие

$$(\nabla_Z\rho)(X) = \mathrm{K}\phi(Z) \quad \forall Z \in X(M), \tag{1a}$$

где K — некоторая константа, то конциркулярное ковекторное поле называется *специальным*.

В случае, когда $\rho = \mathrm{const}$, впервые такое поле (под названием *поле сходящихся направлений*) изучал П.А. Широков [4]. Наиболее ранней работой, посвященной конциркулярным полям, является статья Л. Фиалкова [5]. Само название *конциркулярное поле* предложено К. Яно [6]. Специальные конциркулярные поля были введены Фризом [7]. Конциркулярные поля играют важную роль в теориях геодезических отображений и инфинитезимальных преобразований и в этой связи изучались в [1]–[3], [8]–[13].

Рассмотрим теперь понятие, обобщающее понятие конциркулярного векторного поля на случай тензоров типа $(0, q)$.

Определение 2. Тензорное поле T на M типа $(0, q)$ будем называть *конциркулярным*, если

$$(\nabla_Z T)(X_1, \dots, X_q) = \sum_{\alpha=1}^{q} \underset{\alpha}{L}(X_1, \dots, \overline{X}_\alpha, \dots, X_q)\langle X_\alpha, Z\rangle \tag{2}$$

для всех $Z, X_1, \dots, X_q \in X(M)$, где $\underset{1}{L} \dots \underset{q}{L}$ — некоторые тензорные поля типа $(0, q-1)$, а черта над аргументом означает его отсутствие в данном выражении. Будем говорить, что конциркулярное поле относится к *основному типу*, если хотя бы один из тензоров $\underset{\alpha}{L}$ отличен от нуля, и к *исключительному типу* в противном случае.

Очевидно, что в случае, когда $q = 1$, соотношения (2) превращаются в (1).

Замечание 1. Очевидно, линейная комбинация с постоянными коэффициентами конциркулярных полей типа $(0, q)$ является конциркулярным полем типа $(0, q)$, произведение двух конциркулярных полей также является конциркулярным полем. Кроме того, можно также говорить о конциркулярных полях типа (p, q), как о тензорных полях, получающихся из конциркулярных полей типа $(0, p+q)$ путем поднятия индексов при помощи метрического тензора g.

Приведем теперь несколько примеров конциркулярных тензорных полей, встречавшихся ранее в литературе.

Пример 1. Как известно [13], необходимым и достаточным условием того, что риманово пространство (M, g) допускало геодезическое отображение, является существование на нем симметрического тензорного поля $a(X, Y)$, удовлетворяющего соотношениям

$$(\nabla_Z a)(X, Y) = \lambda(X)\langle Y, Z\rangle + \lambda(Y)\langle X, Z\rangle \tag{3}$$

для любых $X, Y \in X(M)$. Условия (3) показывают, что тензор a является конциркулярным полем типа (0,2).

Пример 2. *Сасакиево пространство* определяется заданием на псевдоримановом пространстве (M, g) кососимметрического поля F типа $(0, 2)$ такого, что

$$(\nabla_Z F)(X, Y) = l(X)\langle Y, Z\rangle - l(Y)\langle X, Z\rangle, \tag{4a}$$

$$(\nabla_Z l)(X) = F(X, Z), \tag{4b}$$

$$l(l^*) = 1, \tag{4c}$$

где l^* — сопряженное относительно метрики g векторное поле. Тензор F, как и в предыдущем примере, является конциркулярным полем типа $(0, 2)$.

2. Рассмотрим теперь обобщение понятия специального конциркулярного поля на случай тензоров типа $(0, q)$. Обозначим через A_q множество всех q-разрядных двоичных чисел. Каждому элементу этого множества $\gamma = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)_2$ (α_m принимают значения 0 или 1) поставим в соответствие некоторый тензор $\underset{\gamma}{T}(C(X_1), \dots, C(X_q))$ валентности $(0, p)$, где $p = \sum\limits_{m=1}^{q} \alpha_m$,

$$C(X_m) = \begin{cases} X_m, & \text{если } \alpha_m = 0; \\ \overline{X}_m, & \text{если } \alpha_m = 1. \end{cases}$$

Напомним, что черта над аргументом означает его отсутствие в данном выражении.

Определение 3. Конциркулярное поле T на (M, g) типа $(0, q)$ будем называть *специальным*, если существует множество тензоров $\{\underset{\gamma}{T}\}_{\gamma \in A_q}$ (где $\underset{(11\dots1)_2}{T} = T$) таких, что

$$(\nabla_Z \underset{(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_q)_2}{T})(C(X_1), \dots, C(X_q)) = \sum_{m=1,\ \alpha_m \neq 0}^{q} \underset{(\alpha_1\dots s(\alpha_m)\dots\alpha_q)_2}{T}(C(X_1), \dots, C(X_q))\langle X_m, Z\rangle +$$
$$+ K \sum_{m=1,\ \alpha_m = 0}^{q} \underset{(\alpha_1\dots s(\alpha_m)\dots\alpha_q)_2}{T}(C(X_1), \dots, C(X_q)), \tag{5}$$

где $K = \mathrm{const}$, а

$$s(\alpha_m) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_m = 0; \\ 0, & \text{если } \alpha_m = 1. \end{cases}$$

Пример 3. Если $q = 2$, то система (5) имеет вид

$$\begin{gathered} (\nabla_Z \underset{(11)}{T})(X_1, X_2) = \underset{(01)}{T}(X_2)\langle X_1, Z\rangle + \underset{(10)}{T}(X_1)\langle X_2, Z\rangle, \\ (\nabla_Z \underset{(10)}{T})(X_1) = \underset{(00)}{T}\langle X_1, Z\rangle + K\underset{(11)}{T}(X_1, Z), \\ (\nabla_Z \underset{(01)}{T})(X_2) = \underset{(00)}{T}\langle X_2, Z\rangle + K\underset{(11)}{T}(Z, X_2), \\ \nabla_Z \underset{(00)}{T} = K\underset{(01)}{T}(Z) + K\underset{(10)}{T}(Z). \end{gathered}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что тензор F, определяющий на (M, g) сасакиеву структуру (см. условия (4)), является специальным конциркулярным типа $(0, 2)$.

Пример 4. Как известно [12], если (M, g) допускает два линейно независимых решения уравнений (3), не пропорциональных метрическому тензору, то имеют место условия

$$(\nabla_Z \lambda)(X) = Ka(X, Z) + \mu\langle X, Z\rangle, \tag{6a}$$

$$\nabla_Z \mu = 2K\lambda(Z), \tag{6b}$$

где K — некоторая константа. При этом (M, g) называют *пространством* $V(K)$. Соотношения (6a), (6b) говорят о том, что решения системы (3) задают на пространстве $V(K)$ симметрическое конциркулярное поле типа $(0, 2)$.

3. Пусть T — специальное конциркулярное поле типа $(0, q)$ на псевдоримановом пространстве (M, g). Отнесем M к некоторой системе координат (x_i) (индексы $i, j, k, \ldots$ здесь и всюду в дальнейшем изменяются от 1 до n). Пусть константа К, участвующая в уравнениях (5), отлична от нуля. Рассмотрим $(n+1)$-мерное псевдориманово пространство $(\widetilde{M}, G)$, отнесенное к специальной системе координат (x^0, x^i), где $\widetilde{M} = M \times R$,

$$G_{IJ} = \exp(2Kx^0)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K}g_{ij} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Здесь G_{IJ} — компоненты метрического тензора G в системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$, а g_{ij} — компоненты метрического тензора g в системе координат (x_i) на M ($I, J, K, \ldots$ принимают значения от 0 до n). Путем прямых выкладок легко убедиться в справедливости следущего утверждения.

Лемма 1. *Пусть Γ^i_{jk} — компоненты римановой связности, соответствующей g, в системе координат (x_i) на M, тогда компоненты римановой связности $\widetilde{\Gamma}^I_{JK}$, соответствующей G, в специальной системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$ имеют следущие ненулевые блоки:*

$$\widetilde{\Gamma}^0_{jk} = g_{ij}; \quad \widetilde{\Gamma}^0_{00} = K; \quad \widetilde{\Gamma}^i_{0j} = \widetilde{\Gamma}^i_{j0} = K\delta^i_j; \quad \widetilde{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}. \tag{8}$$

Замечание 2. Используя (8), можно показать, что ковекторное поле, определенное в координатной системе (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$ соотношением

$$\psi_I = -\exp(2Kx^0)\delta^0_I,$$

удовлетворяет условию

$$\psi_{I,\,J} = KG_{IJ}, \tag{9}$$

где запятая означает ковариантное дифференцирование в римановой связности. Соотношения (9) говорят о том, что ψ_I является конциркулярным (сходящимся) полем. Более того, как показано в [4], существование ковекторного поля ψ_I, удовлетворяющего условию (9), является необходимым и достаточным условием того, что компоненты метрического тензора псевдориманова пространства $(\widetilde{M}, G)$ в некоторой системе координат приводились к виду (7). Нетрудно также показать, что $(\widetilde{M}, G)$ является пространством $V(0)$.

Пусть $\widetilde{T}_{I_1 \ldots I_q}$ — компоненты тензорного поля типа $(0, q)$ в специальной системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$. Эти компоненты могут быть расщеплены на 2^q блоков, которые удобно перенумеровать, используя q-разрядные двоичные числа. Так, числу $(\alpha_1 \ldots \alpha_q)_2$ будет соответствовать блок $\underset{(1\ldots q)}{\widetilde{T}}{}_{d(I_1)\ldots d(I_q)}$, где

$$d(I_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_m = 0; \\ i_m, & \text{если } \alpha_m = 1. \end{cases}$$

Так, например, компоненты тензора T типа $(0, 2)$ распадаются на четыре блока $\underset{(11)}{\widetilde{T}}{}_{i_1 i_2}$, $\underset{(01)}{\widetilde{T}}{}_{0 i_2}$, $\underset{(10)}{\widetilde{T}}{}_{i_1 0}$, $\underset{(00)}{\widetilde{T}}{}_{00}$. Имеет место

Теорема 1. *Тензорное поле $\widetilde{T}_{I_1 \ldots I_q}$ является ковариантно постоянным полем типа $(0, q)$ на псевдоримановом пространстве $(\widetilde{M}, G)$ тогда и только тогда, когда в специальной системе координат (x^0, x^i) его компоненты приводятся к виду*

$$\underset{(\alpha_1\ldots\alpha_q)}{\widetilde{T}}{}_{d(I_1)\ldots d(I_q)} = \exp(Kqx^0) \underset{(\alpha_1\ldots\alpha_q)}{T}{}_{c(I_1)\ldots c(I_q)},$$

где $\underset{(\alpha_1\ldots\alpha_q)}{T}{}_{d(I_1)\ldots d(I_q)}$ — компоненты тензоров, удовлетворяющих условиям (5) на (M, g); здесь

$$c(I_m) = \begin{cases} \text{индекс отсутствует}, & \text{если } \alpha_m = 0; \\ i_m, & \text{если } \alpha_m = 1, \end{cases}$$

т. е. когда $\underset{(11\ldots1)}{T}$ является специальным конциркулярным тензорным полем типа $(0, q)$.

Справедливость этого утверждения легко установить при помощи прямых вычислений с использованием соотношений (8).

Пример 5. Компоненты ковариантно постоянного ковекторного поля $\widetilde{\phi}_I$ в специальной системе координат (x^0, x^i) на $\widetilde{M}$ приводятся к виду $(\widetilde{\phi}_0, \widetilde{\phi}_i)$, где

$$\widetilde{\phi}_0 = \exp(Kx^0)\rho(x^j), \quad \widetilde{\phi}_i = \exp(Kx^0)\phi_i(x^j),$$

причем

$$\phi_{i,j} = \rho g_{ij}, \quad \rho_{,j} = K\phi_j.$$

2. Геодезические отображения и конциркулярные поля

1. **Определение 4.** Отображение псевдориманова пространства (M, g) на некоторое псевдориманово пространство $(\overline{M}, \overline{g})$ называется *геодезическим*, если при этом отображении каждая геодезическая пространства (M, g) переходит в геодезическую пространства $(\overline{M}, \overline{g})$. В общей по отображению системе координат объекты связностей этих пространств удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j, \tag{10}$$

где $\psi_j = (\psi_{,j})$ — некоторый градиентный ковектор. В случае, когда $\psi_j \neq 0$, геодезическое отображение называется *нетривиальным (НГО)*.

Для того чтобы псевдориманово пространство допускало НГО, необходимо и достаточно, чтобы на нем существовало невырожденное симметрическое тензорное поле a_{ij}, удовлетворяющее условиям

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} \tag{11}$$

при некотором ненулевом градиентном ковекторе $\lambda_i = \lambda_{,i}$. Ковекторы ψ_i и λ_i связаны соотношениями

$$\lambda_i = a_i^t \psi_t, \tag{12}$$

где $a_i^k = a_{im} g^{mk}$, а g^{mk} — компоненты контравариантного метрического тензора на M.

Замечание 3. Уравнения (11) суть координатная форма записи соотношений (3), задающих на (M, g) симметрическое конциркулярное поле типа $(0, 2)$ (см. пример 1).

2. Одним из важных направлений теории геодезических отображений псевдоримановых пространств является выделение классов пространств, замкнутых относительно геодезических отображений. Оказывается, что таким свойством обладают пространства, допускающие конциркулярные поля. Имеет место

Лемма 2. *Пусть псевдориманово пространство (M, g) допускает геодезическое отображение на псевдориманово пространство $(\overline{M}, \overline{g})$ и на M существует конциркулярное тензорное поле типа $(0, q)$. Тогда на $\overline{M}$ также существует конциркулярное поле типа $(0, q)$.*

Доказательство. Пусть $T_{i_1 \ldots i_q}$ — компоненты конциркулярного тензорного поля на M типа $(0, q)$. Следовательно,

$$\overline{\nabla}_k T_{i_1 \ldots i_q} = \underset{1}{L}_{i_2 \ldots i_q} g_{i_1 k} + \underset{2}{L}_{i_1 i_3 \ldots i_q} g_{i_2 k} + \underset{q}{L}_{i_1 \ldots i_{q-1}} g_{i_q k}.$$

Рассмотрим тензор

$$\overline{T}_{i_1 \ldots i_q} = T_{k_1 \ldots k_q} b_{i_1}^{k_1} \ldots b_{i_q}^{k_q},$$

где $b_i^k = \exp(-\psi) g^{kj} \overline{g}_{ij}$. Принимая во внимание (10) и (5), легко убедиться, что

$$\overline{\nabla}_k \overline{T}_{i_1 \ldots i_q} = \underset{1}{\overline{L}}_{p_2 \ldots p_q} \overline{g}_{k i_1} + \cdots + \underset{q}{\overline{L}}_{p_1 \ldots p_{q-1}} \overline{g}_{k i_q},$$

где

$$\begin{aligned} \underset{1}{\overline{L}}_{i_1 \ldots i_q} &= \exp(-\psi)(\underset{1}{L}_{p_2 \ldots p_q} + \psi^k T_{k p_2 \ldots p_q}) b_{i_2}^{p_2} \ldots b_{i_q}^{p_q}, \\ &\vdots \\ \underset{q}{\overline{L}}_{i_1 \ldots i_{q-1}} &= \exp(-\psi)(\underset{q}{L}_{p_1 \ldots p_{q-1}} + \psi^k T_{p_1 \ldots p_{q-1} k}) b_{i_1}^{p_1} \ldots b_{i_{q-1}}^{p_{q-1}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Это говорит о том, что $\overline{T}$ является конциркулярным полем типа $(0, q)$ на $\overline{M}$. $\square$

Замечание 4. Данная лемма обобщает результат из [11], полученный для конциркулярных ковекторных полей.

3. Докажем теперь несколько вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы, усиливающей лемму 2.

Лемма 3. *Пусть на псевдоримановом пространстве (M, g), допускающем НГО, существует ненулевая ковариантно постоянная q-форма, $q < n$, тогда ковектор λ_i, участвующий в уравнениях (11), является конциркулярным ковекторным полем.*

Доказательство. Пусть (M, g) допускает НГО, тогда на нем существует невырожденный симметрический тензор a_{ij}, удовлетворяющий условиям (11). Условия интегрируемости уравнений (11) имеют вид

$$a_{ti}R^t_{jkm} + a_{tj}R^t_{ikm} = \lambda_{i,m}g_{kj} + \lambda_{j,m}g_{ik} - \lambda_{i,k}g_{mj} - \lambda_{j,k}g_{ik}, \tag{14}$$

где R^t_{ikm} — компоненты тензора кривизны. Пусть $F_{i_1\dots i_q}$ — ковариантно постоянная q-форма на M, т. е. кососимметрический тензор типа $(0, q)$ такой, что

$$F_{i_1\dots i_q,k} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим условия интегрируемости уравнений (15)

$$\sum_{p=1}^{q} R^t_{i_pkm}F_{i_1\dots i_{p-1}ti_{p+1}\dots i_q} = 0.$$

Свернув эти соотношения с $a^k_{\cdot j}$ по k (где индекс k поднят при помощи метрического тензора) и просимметрировав полученное соотношение по j и m, с учетом (14) получаем

$$(F_{ji_2\dots\lambda_p}\lambda_{m,i_1} + F_{mi_2\dots i_q}\lambda_{j,i_1} - F^t_{.i_2\dots i_q}\lambda_{m,t}g_{ji_1} - F^t_{.i_2\dots\lambda_q}\lambda_{j,t}g_{mi_1}) + \dots + \\ + (F_{i_1\dots i_{q-1}j}\lambda_{m,i_q} + F_{i_1\dots i_{q-1}m}\lambda_{j,i_q} - F_{i_1\dots i_{q-1}.}{}^t\lambda_{j,t}g_{mi_q} - F_{i_1\dots i_{q_1}.}{}^t\lambda_{m,t}g_{ji_q}) = 0. \tag{16}$$

Свернув (16) с g^{jm} по индексам j и m, находим

$$nF^t_{.i_2\dots i_q}\lambda_{t,j} = \mu F_{ji_2\dots i_q}, \tag{17}$$

где $\mu = g^i_r\lambda_{i,r}$. С учетом (17) соотношения (16) приводятся к виду

$$(F_{ji_2\dots i_q}\Pi_{mi_1} + F_{mi_2\dots i_q}\Pi_{ji_1}) + \dots + (F_{i_1\dots i_{q_1}j}\Pi_{mi_q} + F_{i_1\dots i_{q-1}m}\Pi_{ji_q}) = 0,$$

где $\Pi_{ij} = n\lambda_{i,j} - \mu g_{ij}$. Отсюда, принимая во внимание косую симметрию по всем индексам тензора $F_{i_1\dots i_q}$ и симметричность тензора Π_{ij}, нетрудно показать, что $\Pi_{ij} = 0$, т. е.

$$\lambda_{i,j} = \frac{\mu}{n}g_{ij}. \quad \square \tag{18}$$

Замечание 5. Исследуя условия интегрируемости уравнений (18), (15), подобно тому, как это делалось в лемме 3, легко установить, что $\mu = \mathrm{const}$.

Лемма 4. *Пусть псевдориманово пространство (M, g) таково, что на нем существует ковариантно постоянная q-форма F ($q < n$ и фиксировано), но оно не допускает конциркулярных q-форм основного типа. Тогда, если (M, g) допускает НГО, на нем существует последовательность ковариантно постоянных q-форм $\{\overset{m}{F}\}_{m\in\mathbf{N}}$, удовлетворяющих условиям*

$$\overset{m}{F}_{i_1\dots i_{q-1}t}\lambda^t_{\cdot} = 0 \quad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы. Так как (M, g) допускает НГО, то на нем существует симметрическое конциркулярное поле a типа $(0, 2)$. Причем, как это следует из леммы 3, ковектор λ_i, участвующий в уравнениях (11), является конциркулярным полем. Причем он должен быть ковариантно постоянен, т. е. $\lambda_{i,j} = 0$. Так как в противном случае следовало бы, что q-форма

$$L = \underbrace{\lambda \wedge \dots \wedge \lambda}_{q \text{ раз}}$$

является конциркулярной q-формой основного типа. Это противоречит предположению, что M не допускает таких форм. Пусть F — ковариантно постоянная q-форма на M. Тогда F

является замкнутой, а следовательно, точной (напомним, что исследования ведутся локально). Это означает, что существует такая $(q-1)$-форма f, для которой

$$f_{i_1\dots i_{q-1},k} = F_{i_1\dots i_{q-1}k}. \tag{19}$$

Рассмотрим q-форму

$$\overset{2}{F}_{i_1\dots i_q} = F_{[i_1\dots i_{q-1}t}a_{i_q]}{}^t - f_{[i_1\dots i_{q-1}}\lambda_{i_q]}.$$

Дифференцируя эти соотношения ковариантно, с учетом (11) и (19) получим

$$\overset{2}{F}_{i_1\dots i_q,k} = F_{[i_1\dots i_{q-1}|t|}g_{i_q]k}\lambda^t_{.}\ .$$

Отсюда следует, что

$$F_{i_1\dots i_{q-1}t}\lambda^t_{.} = 0,$$

т. к. в противном случае q-форма $F_{i_1\dots i_q}$ была бы конциркулярной формой основного типа. Следовательно,

$$\overset{2}{F}_{i_1\dots i_q,k} = 0.$$

Применив теперь такие рассуждения к форме $\overset{2}{F}_{i_1\dots i_q}$ и продолжая этот процесс, можно рекуррентным способом

$$\overset{1}{F}_{i_1\dots i_q} = F_{i_1\dots i_q};\quad \overset{m}{F}_{i_1\dots i_q} = \overset{m-1}{F}_{[i_1\dots i_{q-1}t}a_{i_q]}{}^t - \overset{m-1}{f}_{[i_1\dots i_{q-1}}\lambda_{i_q]}\quad \forall m\in\mathbf{N} \tag{20}$$

построить последовательность ковариантно постоянных q-форм $\{\overset{m}{F}\}_{m\in\mathbf{N}}$, удовлетворяющих условиям

$$\overset{m}{F}_{i_1\dots i_{q-1}t}\lambda^t_{.} = 0\quad \forall m\in\mathbf{N}.\quad\square \tag{21}$$

Замечание 6. Соотношения (21) в силу (20) равносильны тому, что

$$F_{i_1\dots i_{q-1}t}\overset{m}{a}{}^t_p\lambda^p_{.} = 0\quad \forall m\in\mathbf{N}, \tag{22}$$

где $\overset{m}{a}{}^t_p$ — m-я степень аффинора a^t_p.

Теорема 2. *Пусть псевдориманово пространство (M,g) допускает НГО на псевдориманово пространство (M,g) и на M существует конциркулярная q-форма основного типа $(q<n)$. Тогда на $\overline{M}$ также существует конциркулярная q-форма основного типа.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть (M,g) допускает НГО на $(\overline{M},\overline{g})$, причем на $\overline{M}$ существует конциркулярная q-форма $\overline{F}$ основного типа, а M не допускает таких q-форм. На основании леммы 2 на M существует конциркулярная q-форма F, которая в силу сделанного предположения принадлежит к исключительному типу, т. е. $F_{i_1\dots i_q,k}=0$. Тогда из (13) следует

$$F_{i_1\dots i_{q-1}t}\psi^t_{.} \neq 0, \tag{23}$$

где ψ_i — ковектор, определяющий геодезическое отображение. Связанный с ним соотношениями (12) ковектор λ_i в силу леммы 3 и предположения является ковариантно постоянным. Поэтому на основании леммы 4 для него рекуррентными формулами

$$\overset{1}{\lambda}_i = \lambda_i,\quad \overset{m}{\lambda}_i = \overset{m-1}{\lambda}{}_t a^t_i - \overset{m-1}{\lambda}\lambda_i,\quad m\in\mathbf{N}, \tag{24}$$

может быть построена последовательность ковариантно постоянных точных 1-форм ($\lambda_i = \lambda_{,i}$), удовлетворяющих условиям

$$\overset{m}{\lambda}{}^t_{.}\lambda_t = 0\quad \forall m\in\mathbf{N}. \tag{25}$$

Так как любое псевдориманово пространство допускает не более n линейно независимых ковариантно постоянных 1-форм, то существует такой номер r $(\leq n)$, что

$$\overset{r+1}{\lambda}_i = \sum_{k=1}^{r} \underset{k}{C} \overset{k}{\lambda}_i, \tag{26}$$

где $\underset{k}{C}$ — некоторые константы, а $\overset{1}{\lambda}_i, \dots, \overset{r}{\lambda}_i$ линейно независимы. Не ограничивая общности, можно считать $\overset{r+1}{\lambda}_i = 0$, т. е.

$$a_i^t \overset{r}{\lambda}_t = \overset{r}{\lambda} \lambda_i. \tag{27}$$

Действительно, т. к. функции $\overset{m}{\lambda}$ определены с точностью до константы, то применив замену

$$\overset{\overline{1}}{\lambda} = \overset{1}{\lambda} + \underset{r}{C}, \quad \overset{\overline{2}}{\lambda} = \overset{2}{\lambda} - \underset{r}{C} \overset{1}{\lambda} + \underset{r-1}{C}, \dots, \overset{\overline{r}}{\lambda} = \overset{r}{\lambda} - \underset{r}{C} \overset{r-1}{\lambda} - \underset{r-1}{C} \overset{r-2}{\lambda} - \dots - \underset{2}{C} \overset{1}{\lambda} + \underset{1}{C},$$

легко убедиться, что соотношения (26) примут вид (27). Условия (25), как уже говорилось в замечании 6, могут быть записаны в форме

$$\lambda_t \overset{m}{a}{}_i^t \lambda_i = 0. \tag{28}$$

Аналогичные условия (22) для ковариантно постоянной формы F в силу (24), (28) принимают вид

$$F_{i_1 \dots i_{q-1} t} \overset{m}{\lambda}{}^t_{.} = 0 \quad \forall m \in \mathbf{N}. \tag{29}$$

Положив в соотношениях (29) $m = r$, получим

$$F_{i_1 \dots i_{q-1} t} \overset{r}{\lambda}{}^t_{.} = 0. \tag{30}$$

Так как аффинор a_j^i невырожден, то, свернув (27) с обратным к нему аффинором $\widetilde{a}_k^i$, на основании (12) имеем

$$\overset{r}{\lambda}_k = -\overset{r}{\lambda} \psi_k. \tag{31}$$

В силу (31) условия (30) принимают вид

$$F_{i_1 \dots i_{q-1} t} \psi^t_{.} = 0,$$

что противоречит (23). $\square$

Замечание 7. Теорема 2 разбивает псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярные q-формы, на два непересекающихся и замкнутых относительно геодезических отображений класса: допускающих конциркулярные q-формы основного типа и допускающих только лишь ковариантно постоянные q-формы (q фиксировано). Эта теорема обобщает результат, полученный автором для конциркулярных ковекторных полей [3].

3. Решение проблемы о геодезической подвижности римановых пространств

1. **Определение 5.** *Степенью геодезической подвижности* p n-мерного псевдориманова пространства (M, g) называется размерность линейного пространства решений системы (11).

Определение понятия геодезической подвижности было дано в [13]. Там же было доказано, что максимальную степень подвижности $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ имеют пространства постоянной кривизны и только они, была обнаружена лакуна в распределении степеней геодезических подвижностей, было доказано, что не существует псевдоримановых пространств, имеющих степень геодезической подвижности p такую, что

$$\frac{(n-1)n}{2} + 3 < p < \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Позже в [12] были определены точные границы первой лакуны

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 < p < \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

и показано, что степень подвижности $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ достигают псевдоримановы пространства, допускающие $n-2$ линейно независимых конциркулярных ковекторных поля и только они. Ниже дадим полное решение проблемы о распределении степеней геодезической подвижности римановых пространств (пространств со знакоопределенной метрикой) и определим точные границы всех лакун.

Замечание 8. Если псевдориманово пространство (M, g), отличное от пространств постоянной кривизны, допускает m линейно независимых ковекторных полей основного типа $\overset{1}{\phi}_i \ldots \overset{m}{\phi}_i$, то тензорное поле

$$a_{ij} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} \underset{\alpha\beta}{C} \overset{\alpha}{\phi}_{(i} \overset{\beta}{\phi}_{j)} + C g_{ij}$$

является решением системы (11), где C, $\underset{\alpha\beta}{C}$ — некоторые константы, а круглые скобки означают симметрирование без деления. Это говорит о том, что степень подвижности такого пространства не ниже $\frac{m(m+1)}{2}$, т. е.

$$p = \frac{m(m+1)}{2} + l, \tag{32}$$

где $l \in \mathbf{N}$. Таким образом, чтобы найти p, необходимо определить значение l.

2. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что (M, g) является римановым пространством, т. е. метрика g положительна определена. Покажем, что задача об определении степени геодезической подвижности риманова пространства (M, g) может быть сведена к задаче о нахождении количества линейно независимых абсолютно параллельных симметрических тензорных полей типа $(0, 2)$ на римановом пространстве, допускающем сходящееся ковекторное поле. Действительно, как уже было сказано выше (см. пример 4), псевдоримановы пространства, допускающие степень подвижности $p \geq 3$, т. е. имеющее не менее двух линейно независимых решений системы (11), не пропорциональных метрическому тензору, являются по необходимости пространствами $V(K)$. Рассмотрим два возможных случая.

1) $K = 0$. Как показано в работе [11], на пространствах $V(0)$ со знакоопределенной метрикой существует сходящееся конциркулярное поле ϕ_i основного типа, т. е.

$$\phi_{i,j} = \rho g_{ij}; \quad \rho = \text{const}.$$

Пусть (M, g) допускает m линейно независимых конциркулярных ковекторных полей. Базис линейного пространства конциркулярных полей $\overset{1}{\phi}_i \dots \overset{m}{\phi}_i$ можно выбрать так, что

$$\overset{1}{\phi}_{i,j} = g_{ij}, \quad \overset{2}{\phi}_{i,j} = 0, \dots, \overset{m}{\phi}_{i,j} = 0.$$

Из соотношений (6а) при $K = 0$ следует, что λ_i является конциркулярным полем, поэтому

$$\lambda_i = \sum_{\alpha=1}^{m} \underset{\alpha}{C} \overset{\alpha}{\phi}_i.$$

Пусть a_{ij} — произвольное решение уравнений (11) на $V(0)$, тогда, как нетрудно проверить, тензор

$$b_{ij} = 2a_{ij} - 2\sum_{\alpha=2}^{m} \underset{\alpha}{C} \overset{\alpha}{\phi}_{(i} \overset{1}{\phi}_{j)} - \underset{1}{C} \overset{1}{\phi}_{(i} \overset{1}{\phi}_{j)} \tag{33}$$

является абсолютно параллельным на M. Таким образом, справедлива

Лемма 5. *Степень геодезической подвижности риманова пространства $V(0)$ равна сумме числа линейно независимых конциркулярных полей на $V(0)$ и числа линейно независимых абсолютно параллельных дважды ковариантных симметрических тензорных полей на $V(0)$.*

Как известно [14], риманово пространство (M, S), допускающее нетривиальное ковариантно постоянное симметрическое поле b_{ij} типа $(0, 2)$, приводимо (неприводимые римановы пространства допускают такие поля только вида $b = \mathrm{const} \cdot g$). Метрическая форма $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ и квадратичная форма $B = b_{ij}dx^i dx^j$ в некоторой системе координат на M могут быть приведены к виду

$$ds^2 = \overset{0}{g}_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{j_0} + \sum_{\alpha=1}^{l} \overset{\alpha}{g}_{i_\alpha j_\alpha}(x^{k_\alpha}) dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \tag{34}$$

$$B = C_{i_0 j_0} dx^{i_0} dx^{j_0} + \sum_{\alpha=1}^{l} \underset{\alpha}{C} \overset{\alpha}{g}_{i_\alpha j_\alpha}(x^{k_\alpha}) dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \tag{35}$$

где $C_{i_0 j_0}$, $\underset{\alpha}{C}$ — некоторые константы, $\overset{\alpha}{g}_{i_\alpha j_\alpha}(x^{k_\alpha})$ — метрический тензор некоторого неприводимого риманового пространства $(\overset{\alpha}{M}, \overset{\alpha}{g})$, $\overset{0}{g}_{i_0 j_0} = \mathrm{const}$ — метрический тензор плоского риманова пространства $(\overset{0}{M}, \overset{0}{g})$, $\dim \overset{\alpha}{M} = n_\alpha$, $\dim \overset{0}{M} = n_0 = k$ (k равно числу линейно независимых абсолютно параллельных ковекторных полей на (M, g)); индексы $i_0, j_0, k_0, \dots$ изменяются от 1 до n_0; $i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha, \dots$ изменяются от $1 + \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} n_\beta$ до $\sum_{\beta=0}^{\alpha} n_\beta$, $\sum_{\beta=0}^{l} n_\beta = n$.

Отметим, что т. к. исследуемое $V(0)$ допускает сходящееся конциркулярное поле, то все пространства $(\overset{\alpha}{M}, \overset{\alpha}{g})$ будут также допускать такие поля, а следовательно, должны иметь размерность не ниже 3, т. к. в противном случае они были бы плоскими, что противоречит их неприводимости. Поэтому величина l в формулах (34), (35) может принимать значение от 0 до $[\frac{n-k}{3}]$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Причем случай $l = 0$ соответствует плоскому пространству. Принимая это во внимание, на основании соотношений (33) можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 6. *Число p_a линейно независимых абсолютно параллельных симметрических тензорных полей типа $(0, 2)$ на n-мерном римановом пространстве $V(0)$ может принимать лишь следующие значения:*

$$p_a = \frac{k(k-1)}{2} + l,$$

где l изменяется от 0 до L_a,

$$L_a = \left[\frac{n-k}{3}\right],$$

а k — число линейно независимых ковекторных полей на $V(0)$. Случай $l=0$ соответствует плоскому $V(0)$.

Учитывая, что $k = m-1$, из лемм 5 и 6 получаем, что степень геодезической подвижности пространства $V(0)$ определяется соотношениями (32), где l изменяется от 0 до L, а

$$L = \left[\frac{n+1-m}{3}\right]. \tag{36}$$

Замечание 9. Если b_{ij} — абсолютно параллельное симметрическое тензорное поле типа $(0,2)$ на римановом пространстве $V(0)$, то существует ковекторное поле ν_i такое, что $\nu_{i,j} = b_{ij}$. Действительно, таковым является $\nu_i = b_{ij}\overset{1}{\phi}{}^j$. Более того, т. к. $\nu_{i,jk} = 0$, то ν_i определяет на $V(0)$ аффинное движение.

2) Пусть $K \neq 0$. Теорема 1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями системы (11) на n-мерном римановом пространстве (M,g) и ковариантно постоянными, билинейными формами на $(n+1)$-мерном пространстве $V(0)$ с метрическим тензором G, определяемым формулой (7). Если $K<0$, то G будет знакоопределена, и к ней применимы рассуждения, использованные в п. 1. Поэтому из соотношений (34) с учетом того, что $k=m$, $N=n+1$, опять приходим к оценке (32), (36). Если же $K>0$, то метрика G имеет лоренцеву сигнатуру. Тогда одна из метрик $\overset{0}{G}, \overset{1}{G}, \dots, \overset{l}{G}$ в разложении (34) для G будет иметь лоренцеву сигнатуру, а остальные будут знакоопределены. Если таковой является $\overset{0}{G}$, то это ничего не изменяет по сравнению со случаем $K<0$ в оценке l. Пусть таковой является одна из метрик $\overset{\alpha}{G}$. Будем считать для определенности $\overset{1}{G}$. Как показано в [9], [10], [15], неприводимое псевдориманово пространство $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$ лоренцевой сигнатуры, являющееся пространством $V(0)$, может допускать симметрические абсолютно параллельные билинейные формы только лишь вида

$$b_{I_1J_1} = \underset{1}{C} G_{I_1J_1} + \underset{2}{C}\phi_{I_1}\phi_{J_1},$$

где $\underset{1}{C}, \underset{2}{C} = \mathrm{const}$, а ϕ_{I_1} — ковариантно постоянное изотропное ковекторное поле на $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$. Так как кроме ϕ_{I_1} пространство $(\overset{1}{M}, \overset{1}{G})$ допускает еще и сходящееся конциркулярное поле, его размерность должна быть не менее 4, в противном случае оно было бы плоским. С другой стороны, $\dim \overset{0}{M} = m-1$. Поэтому суммарно это не повлияет на оценку l в разложении (34) для G. Таким образом, и в этом случае в оценке геодезической степени подвижности (M,g) приходим к формулам (32), (36). Итак, доказана

Теорема 3. *Степень геодезической подвижности риманова пространства (M,g), отличного от пространств постоянной кривизны, может принимать лишь следующие значения:*

$$p = \frac{m(m+1)}{2} + l,$$

где m — число линейно независимых конциркулярных ковекторных полей на M, а l изменяется от 1 до $[\frac{n+1-m}{3}]$.

Из теоремы 3 в случае, когда $m=0$, получаем

Следствие. Римановы пространства, не допускающие конциркулярных ковекторных полей, имеют степень геодезической подвижности, не превышающую $[\frac{n+1}{3}]$.

Замечание 10. Нетрудно видеть, что оценка степени геодезической подвижности, указанная в теореме 3, является точной. Действительно, рассмотрим $\widehat{n}$-мерное риманово пространство $(\widehat{M}, \widehat{g})$, метрическая форма которого в некоторой системе координат на $\widehat{M}$ приводится к виду

$$d\widehat{s}^2 = \exp(2x^1)((dx^1)^2 + \widetilde{g}_{i_2 j_2}(x^{k_2}) dx^{i_2} dx^{j_2}), \tag{37}$$

где $\widetilde{g}_{i_2 j_2}(x^{k_2})$ — метрический тензор некоторого $(\widehat{n}-1)$-мерного симметрического риманового пространства $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$; индексы i_2, j_2, k_2 изменяются от 2 до $\widehat{n}$. Очевидно, $(\widehat{M}, \widehat{g})$ может допускать абсолютно параллельные симметрические тензорные поля типа $(0,2)$ только лишь вида $b = \mathrm{const} \cdot g$. Действительно, в противном случае на основании теоремы 1 $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ допускало бы симметрическое конциркулярное тензорное поле типа $(0,2)$ (т. е. допускало НГО), и мы пришли бы к противоречию, ведь, как известно [13], симметрические пространства не допускают НГО. Таким образом, если в разложении (34) в качестве $\overset{\alpha}{g}$ выбрать метрики вида (37), то степень геодезической подвижности (M, g) будет равна $p = \frac{m(m+1)}{2} + l$.

Литература

1. Шандра И.Г. *Горизонтально эквидистантные расслоенные пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 12. – С. 76–79.
2. Шандра И.Г. *Пространства $V(K)$ и йордановы алгебры* // Сб. “Памяти Лобачевского посвящается”. – Казань, 1992. – Вып. 1. – С. 99–104.
3. Шандра И.Г. *О геодезических отображениях эквидистантных пространств и йордановых алгебрах пространства $V(K)$* // Дифференц. геометрия многообразий и фигур. – Калининград, 1993. – Вып. 24. – С. 104–111.
4. Широков П.А. *О сходящихся направлениях в римановых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те. Сер. A. – 1934–1935. – Т. 10. – С. 77–88.
5. Fialkow A. *Conformals geodesics* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45. – P. 443–473.
6. Yano K. *Concircular geometry* // Proc. Imp. Acad. Tokyo. – 1940. – V. 16. – P. 195–200.
7. Vries H.L. *Über Riemannische Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten* // Math Z. – 1954. – Bd. 60. – № 3. – S. 328–347.
8. Аминова А.В. *О конциркулярных движениях в римановых пространствах* // Гравитация и теория относительн. – Казань, 1975–1976. – Вып. 10–11. – С. 127–138.
9. Аминова А.В. *Алгебры Ли проективных движений пространств $V(0)$ лоренцевой сигнатуры* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 12. – С. 3–13.
10. Аминова А.В. *Группы преобразований римановых пространств* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1990. – Т. 22. – С. 97–165.
11. Горбатый Е.З. *О геодезическом отображении эквидистантных римановых пространств и пространств первого класса* // Укр. геометрич. сб. – 1972. – Т. 41. – № 4. – С. 45–53.
12. Киосак В.А., Микеш Й. *Геодезические отображения и проективные преобразования римановых пространств* // Движения в обобщенных пространствах. – Рязань, 1988. – С. 29–31.
13. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М: Наука, 1979. – 255 с.
14. Кручкович Г.И., Солодовников А.С. *Постоянные симметрические тензоры римановых пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 3. – С. 147–158.
15. Аминова А.В. *О косоортогональных реперах и некоторых свойствах параллельных тезорных полей на римановых многообразиях* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 6. – С. 63–67.

Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации

Поступила 28.05.1999