ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 1 (524)

УДК 517.956

Л.Б. МИРОНОВА

О МЕТОДЕ РИМАНА В R^n ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

В типичных для задач Гурса и Коши областях рассматривается система уравнений с кратными характеристиками

$$u_{lx_j} = \sum_{i=1}^{m} a_{li}(x_1, \dots, x_n) u_i + f_l(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leqslant l \leqslant m = \sum_{i=1}^{n} k_i, \tag{1}$$

если $1 \leqslant l \leqslant k_1$, то $j = 1$, если $k_1 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2$, то $j = 2$, если $k_1 + k_2 + 1 \leqslant l \leqslant k_1 + k_2 + k_3$, то $j = 3$, ... , если $\sum\limits_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, то $j = n$. Далее всюду предполагается, что все a_{li}, f_l непрерывны в замыкании рассматриваемой области. Будем называть регулярным в области D решение (1), непрерывное в D вместе со всеми входящими в систему производными: $u_l \in C(D)$, $l = \overline{1, m}$, $u_{lx_j} \in C(D)$, $\sum\limits_{i=1}^{j-1} k_i + 1 \leqslant l \leqslant \sum\limits_{i=1}^{j} k_i$.

Подобные системы с некратными характеристиками исследовались в [1], [2]. В [1] методом последовательных приближений были построены формулы решения задачи Гурса для системы

$$u_{lx_l} = \sum_{i=1}^{n} a_{li}(x_1, \dots, x_n) u_i + f_l(x_1, \dots, x_n), \quad l = 1, \dots, n. \tag{2}$$

В [2] изучены задачи Коши и Гурса для системы (2) при $n = 2$, в частности, были предложены формулы интегрального представления решений, позволяющие установить их структурные свойства.

В данной работе предлагается другой подход к задаче получения решений задач Коши и Гурса, а именно — вариант метода Римана, являющийся развитием идей из [3], [4], где рассматриваются системы уравнений с двумя независимыми переменными. Но в отличие от [3] матрица Римана определяется как решение системы интегральных уравнений. Подобным образом для одного уравнения функции Римана ранее вводились в [5]–[13].

1. Пусть $G = \{x_i^0 < x_i < x_i^1, \, i = \overline{1, n}\}$. Обозначим через X_j грани G при $x_j = x_j^0$.

Задача Гурса. Найти регулярное в области G решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$u_l|_{X_j} = \varphi_l(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad l = \overline{1, m}, \tag{3}$$

$\varphi_l \in C(\overline{X}_j)$, связь между l и j дается формулой (1).

Решение задачи Гурса существует и единственно. Действительно, сведем (1) с условиями (3) к системе интегральных уравнений

$$u_l = \varphi_l + \int_{x_j^0}^{x_j} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \Big) d\alpha_j, \quad l = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Решение (4) существует и единственно в $C(\overline{G})$ (это можно доказать методом последовательных приближений ([14], с. 59; [15], с. 245–249; [16], с. 77–79)). Очевидно, (4) равносильна задаче Гурса (1), (3).

Перейдем к постановке задачи Коши. В ориентированном системой координат $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространстве R^n рассмотрим поверхность S класса C^1, заданную уравнениями

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ x_2 = x_2(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}), \end{array} \quad \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial \mu_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \mu_{n-1}} \end{pmatrix} = n-1,$$

где $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}) \in R^{n-1}$. Считаем, что S в каждой своей точке имеет касательную плоскость, не параллельную ни одной из координатных осей.

Проведем плоскости $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Пусть S^0 — участок поверхности S, вырезанный этими плоскостями, D_0 — конечная область пространства R^n, ограниченная плоскостями $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и поверхностью S^0, ∂D_0 — край D_0. Считаем ориентацию области D_0 положительной.

Задача Коши. Найти регулярное в D_0 решение системы (1), удовлетворяющее на поверхности S условиям

$$u_l|_S = u_{l0}, \quad l = \overline{1,m}, \quad u_{l0} \in C^1(\overline{S^0}). \tag{5}$$

Отметим, что поверхность S допускает различные формы записи через переменные $x_1, \ldots, x_n$: $x_1 = \sigma_1(x_2, \ldots, x_n)$, $x_2 = \sigma_2(x_1, x_3, \ldots, x_n), \ldots, x_n = \sigma_n(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Поэтому можно считать, что функции u_{l0} зависят от любого набора $(n-1)$ переменных из числа $x_1, \ldots, x_n$.

Существование и единственность решения задачи Коши доказывается так же, как и в случае задачи Гурса. Система (1) с условиями (5) сводится к системе интегральных уравнений

$$u_l = u_{l0} + \int_{\sigma_j}^{x_j} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{li} u_i + f_l \Big) d\alpha_j, \quad l = \overline{1,m}, \tag{6}$$

связь между l и j снова дается соотношениями после формулы (1).

Решение (6) существует и единственно в $C(\overline{D}_0)$. Система (6) равносильна задаче Коши (1), (5).

2. Выведем формулы решений задач Коши и Гурса в терминах матрицы Римана. Перепишем (1) в векторно-матричной форме

$$L(\mathbf{U}) = \mathbf{F}, \quad L(\mathbf{U}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i \mathbf{U}_{x_i} - \mathbf{B}\mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \operatorname{colon}(u_1, \ldots, u_m).$$

Здесь $\mathbf{A}_i$ — постоянные диагональные матрицы, $\mathbf{A}_i = \operatorname{diag}(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \ldots, \alpha_n^i)$, причем $\alpha_s^1 = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant k_1$, $\alpha_s^2 = 1$ при $k_1 + 1 \leqslant s \leqslant k_1 + k_2, \ldots,$ $\alpha_s^n = 1$ при $\sum\limits_{i=1}^{n-1} k_i + 1 \leqslant s \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} k_i$, остальные диагональные элементы матриц $\mathbf{A}_i$ равны нулю; $\mathbf{B} = \|a_{li}\|$, a_{li} — коэффициенты системы (1), $l = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,m}$; $\mathbf{F} = \operatorname{colon}(f_1, f_2, \ldots, f_m)$.

Введем матрицу Римана $\mathbf{R} = \operatorname{colon}(\mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_m)$; здесь $\mathbf{R}_i(x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (r_{i1}, \ldots, r_{im})$, $i = \overline{1,m}$, являются решениями систем

$$\begin{aligned} &r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \\ &\quad = \delta_{ij} - \int_{\xi_p}^{x_p} \Big(\sum_{q=1}^{m} a_{qj}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) r_{iq}(x_1, \ldots, x_{p-1}, \eta_p, x_{p+1}, \ldots, x_n) \Big) d\eta_p, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\sum_{q=1}^{p-1} k_q + 1 \leqslant j \leqslant \sum_{q=1}^{p} k_q, \quad p = \overline{1,n},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, a_{qj} — коэффициенты системы (1).

Решения систем (7) при каждом i существуют и единственны в классе непрерывных функций. Дифференцируя (7), получаем, что по первым n аргументам $(x_1, \dots, x_n)$ матрица $\mathbf{R}$ удовлетворяет сопряженной к (1) системе

$$L^*(\mathbf{V}) = 0, \quad L^*(\mathbf{V}) \equiv -\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{V}\mathbf{A}_i)_{x_i} - \mathbf{V}\mathbf{B}.$$

Для любого вектора $\mathbf{U} \in C^1$ справедливо тождество

$$\mathbf{R}L(\mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i}. \tag{8}$$

Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U}_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} = \mathbf{R}L(\mathbf{U}) + \mathbf{R}\mathbf{B}\mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i)_{x_i}\mathbf{U} =$$
$$= \mathbf{R}L(\mathbf{U}) - L^*(\mathbf{R})\mathbf{U} = \mathbf{R}L(\mathbf{U}).$$

Справедлива общая формула Стокса ([17], с. 246)

$$\int_H \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k = \int_{\partial H} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} F_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_k.$$

Пусть $M(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in G$. Считая в тождестве (8) матрицу $\mathbf{U}$ решением системы (1), проинтегрируем (8) по области $G_1 = \{x_i^0 < x_i < \xi_i,\ i = \overline{1,n}\}$:

$$\int_{G_1} \mathbf{R}\mathbf{F} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{G_1} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U})_{x_i} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

По формуле Стокса

$$\int_{G_1} \mathbf{R}\mathbf{F} dx_1 \dots dx_n = \int_{\partial G_1} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \mathbf{R}\mathbf{A}_i\mathbf{U} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n. \tag{9}$$

Найдем значение $u_k(M)$. Пусть в (1) входит производная функции u_k по переменной x_s. Ясно, что номера s и k связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^{s-1} k_i + 1 \leqslant k \leqslant \sum_{i=1}^{s} k_i.$$

Запишем k-ю строку (9)

$$\int\limits_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki} f_i \right) dx_1 \dots dx_n =$$
$$= \int\limits_{\partial G_1} \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1} k_q + 1}^{\sum_{q=1}^{i} k_q} r_{kj} u_j \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n. \tag{10}$$

Так как ∂G_1 — граница параллелограмма, формула (10) принимает вид

$$\int\limits_{G_1}\Big(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\Big)dx_1\dots dx_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_1^0}^{\xi_1}\cdots\int\limits_{x_{i-1}^0}^{\xi_{i-1}}\int\limits_{x_{i+1}^0}^{\xi_{i+1}}\cdots\int\limits_{x_n^0}^{\xi_n}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)\Bigg|_{x_i^0}^{\xi_i} dx_n\dots dx_{i+1}dx_{i-1}\dots dx_1. \quad (11)$$

Из системы (7) следует, что входящие в правую часть (11) функции r_{kj} удовлетворяют соотношениям

$$r_{kj}(x_1,\dots,x_{i-1},\xi_i,x_{i+1},\dots,x_n;\xi_1,\dots,\xi_n) \equiv \begin{cases}1, & j=k;\\ 0, & j\neq k,\end{cases} \quad (12)$$

где $\sum\limits_{q=1}^{i-1}k_q+1\leqslant j\leqslant\sum\limits_{q=1}^{i}k_q$. Левая часть (11) и функции $u_j(x_1,\dots,x_{i-1},x_i^0,x_{i+1},\dots,x_n)$, $\sum\limits_{q=1}^{i-1}k_q+1\leqslant j\leqslant\sum\limits_{q=1}^{i}k_q$, $j=\overline{1,n}$, известны (если считать известной матрицу $\mathbf{R}$). Поэтому (11) можно переписать в виде

$$\int\limits_{x_1^0}^{\xi_1}\cdots\int\limits_{x_{s-1}^0}^{\xi_{s-1}}\int\limits_{x_{s+1}^0}^{\xi_{s+1}}\cdots\int\limits_{x_n^0}^{\xi_n}u_k(x_1,\dots,x_{s-1},\xi_s,x_{s+1},\dots,x_n)dx_n\dots dx_{s+1}dx_{s-1}\dots dx_1=\psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

с известной $\psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$. Отсюда

$$u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{\partial^{n-1}\psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n)}{\partial\xi_1\dots\partial\xi_{s-1}\partial\xi_{s+1}\dots\partial\xi_n}. \quad (13)$$

Из предыдущих рассуждений следует

Теорема 1. *Решение задачи Гурса* (1), (3) *существует, единственно и дается формулой* (13).

Перейдем к решению задачи Коши. Через точку $M(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)\in D_0$ проведем плоскости $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2,\dots,x_n=\xi_n$. Пусть D_1 — часть D_0, ограниченная плоскостями $x_1=\xi_1$, $x_2=\xi_2,\dots,x_n=\xi_n$; D_{1i} — пересечение D_1 с плоскостью $x_i=\xi_i$. Тогда $\partial D_1=S_1^0\cup\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n}D_{1i}\Big)$, где S_1^0 является частью S^0. Снова считая в тождестве (8) $\mathbf{U}$ решением системы (1), проинтегрируем (8) по области D_1. По формуле Стокса получаем

$$\int_{D_1}\mathbf{RF}dx_1\dots dx_n=\int_{\partial D_1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\mathbf{RA}_i\mathbf{U}dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n. \quad (14)$$

Построчная запись (14) дает

$$\int\limits_{D_1}\Big(\sum_{i=1}^{m}r_{ki}f_i\Big)dx_1\dots dx_n=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{D_{1l}}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q}r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n+$$

$$+\int\limits_{S_1^0}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n.$$

Очевидно,

$$\int\limits_{D_{1l}}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n=$$

$$=\int\limits_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\dots\wedge dx_n.$$

Отсюда

$$\int\limits_{D_1}\left(\sum_{i=1}^{m} r_{ki}f_i\right)dx_1\dots dx_n=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{D_{1l}}(-1)^{l-1}\left(\sum_{j=\sum_{q=1}^{l-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{l}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{l-1}\wedge dx_{l+1}\wedge\dots\wedge dx_n+$$

$$+\int\limits_{S_1^0}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\sum_{j=\sum_{q=1}^{i-1}k_q+1}^{\sum_{q=1}^{i}k_q} r_{kj}u_j\right)dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge\dots\wedge dx_n. \quad (15)$$

В силу (12) формулу (15) можно записать в виде

$$\int_{D_{1s}} u_k dx_1\dots dx_{s-1}dx_{s+1}\dots dx_n=\Psi_k(\xi_1,\dots,\xi_n), \quad (16)$$

где Ψ_k выражается через элементы матрицы Римана $\mathbf{R}$ и данные Коши. Преобразуя интеграл по $(n-1)$-мерному многообразию D_{1s} в повторный и дифференцируя (16) по $\xi_1,\dots,\xi_{s-1},\xi_{s+1},\dots,\xi_n$, получим выражение для $u_k(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Решение задачи Коши* (1), (5) *существует, единственно и определяется по формуле* (16).

Литература

1. Чекмарев Т.В. *Формулы решения задачи Гурса для одной линейной системы уравнений с частными производными* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 9. – С. 1614–1622.
2. Бицадзе А.В. *О структурных свойствах решений гиперболических систем уравнений в частных производных* // Матем. моделирование. – 1994. – Т. 6. – № 6. – С. 22–31.
3. Holmgren E. *Sur les systemes lineaires aux derivees partielles du premier ordre* // Arkiv för matematik, astronomy och fysik. – 1910. – Band 6. – № 2. – P. 1–10.
4. Бурмистров Б.Н. *Решение задачи Коши методом Римана для системы уравнений первого порядка с вырождением на границе* // Тр. семин. по краев. задачам. Казанск. ун-т, 1971. – Вып. 8. – С. 41–54.
5. Жегалов В.И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – Новосибирск: Ин-т матем. СО АН СССР. – 1990. – С. 94–98.
6. Жегалов В.И., Севастьянов В.А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 10. – С. 1429–1430.

7. Севастьянов В.А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.
8. Севастьянов В.А. *Об одном случае задачи Коши* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 12. – С. 1706–1707.
9. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
10. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей частной производной* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 77–81.
11. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казанское матем. об-во, 2001. – 226 с.
12. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *О задачах Коши для двух уравнений в частных производных* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 23–30.
13. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка с тремя независимыми переменными* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 1. – С. 93–97.
14. Забрейко П.П., Кошелев А.И. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
15. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
16. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. *Уравнения в частных производных математической физики.* – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.
17. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.

Елабужский государственный
педагогический университет

Поступила
15.03.2005